профессор Петров Ю. П.

ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДОСТОВЕРНОСТИ И НАДЕЖНОСТИ КОМПЬЮТЕРНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

(учебное пособие)

Санкт-Петербург

2007

Предисловие

Настоящее учебное пособие посвящено одной из важнейших проблем прикладной математики – проблеме достоверности и надежности компьютерных вычислений (и компьютерных технологий, надежность которых, в конечном счете, зависит от надежности вычислений) с учетом неизбежной ограниченной точности любых исходных данных.

Если исходные данные известны лишь с точностью до $\pm\varepsilon$, то какова наименьшая достижимая погрешность решения? Вот проблема, без решения которой нельзя говорить о надежности вычислений, поскольку давно известны примеры, когда малые погрешности исходных данных приводят к большим и даже очень большим погрешностям решений.

Данная проблема неоднократно исследовалась, однако в последнее десятилетие двадцатого века в этой старой и важной проблеме открылся новый и неожиданный поворот, связанный с новыми результатами, обнаруженными в теории эквивалентных преобразований.

Было неожиданно обнаружено (смотри публикации [2, 3, 4]), что привычные и широчайшим образом используемые в математике и во всех расчетах эквивалентные преобразования могут изменять корректность решаемой задачи, а значит – и достоверность ее решения. Было также обнаружено, что привычное и общепризнанное разделение всех задач математики, физики и техники на корректные и некорректные – недостаточно, что существует третий класс – класс задач, меняющих свою корректность в ходе эквивалентных преобразований, использованных при их решении.

Эти неожиданно обнаруженные результаты, полученные в Санкт-Петербургском государственном университете (СПбГУ), заставили по-новому взглянуть на старую проблему достоверности и надежности вычислений. Если раньше спокойно применяли эквивалентные преобразования, то теперь надо проверить – изменили они корректность решаемой задачи, или не изменили. Если раньше считали достаточным проверить корректность решаемой задачи при ее постановке, то теперь выявилась необходимость проверки – не относится ли задача к третьему классу, не меняется ли ее корректность в ходе решения.

Встречи с задачами, относящимися к третьему классу, не раз становились причиной ошибок в вычислениях, которые затем становились причиной аварий и катастроф. Примеры аварий и катастроф, порожденных ошибками расчета при встречах с задачами третьего класса, описаны в монографии [4]. Для избежания ошибок в расчетах, для уменьшения вероятности аварий и катастроф, необходимо дополнить традиционные методы вычислений проверками возможных изменений корректности и обусловленности решаемых задач при эквивалентных преобразованиях, используемых в ходе решения. Методы подобных проверок были частично описаны в [4; 11], а более подробно в настоящем издании.

Разумеется, новые проверки требуют дополнительного труда и «осложняют жизнь» математику, инженеру и пользователю компьютера. Поэтому они не всегда были встречены с радостью, а некоторые математики и инженеры пытались даже поставить под сомнение их необходимость. Однако дополнительные проверки необходимы, поскольку они повышают надежность и достоверность вычислений, не говоря уже о том, что новые результаты позволили объяснить источники ошибок в расчетах, которые ранее неоднократно становились причинами аварий и даже катастроф.

Таким образом, в предлагаемом вниманию читателя учебном пособии изложены новые научные результаты, полученные в СПбГУ и поднимающие науку на новый уровень.

Учебное пособие состоит из двух частей. В первой части (главы с первой по четвертую) рассмотрены ошибки в расчетах, возникающие там, где не учитывали возможность изменения корректности при эквивалентных преобразованиях и описаны методы, позволяющие избегать ошибок.

Во второй части рассмотрены более сложные вопросы обеспечения надежности компьютерных вычислений, а также приведены примеры и задачи.

Учебное пособие написано на основе лекций, прочитанных автором в Санкт-Петербургском государственном университете (СПбГУ), на факультете прикладной математики – процессов управления.

Автор благодарен И. А. Петрову за помощь в подготовке рукописи.

Вопросы и замечания можно посылать на *e-mail*: *petrov*1930@*mail.ru*.

Часть первая

Глава 1. Простые примеры и первые выводы

§1. Первый пример

Перед тем, как перейти к исследованию проблемы надежности компьютерных вычислений в общем случае, рассмотрим предварительно несколько простых примеров, проясняющих суть дела.

Начнем с рассмотрения примера системы двух дифференциальных уравнений (где $D = \frac{d}{dt}$)

$$(1{,}03D^2 + 2D + 1)x_1 + Dx_2 = 0; \tag{1}$$

$$Dx_1 + x_2 = 0, \tag{2}$$

для которой требуется вычислить значение $x_1(t)$ при $t = 1$.

Как хорошо известно из теории линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами [1], система (1) - (2) имеет характеристический полином, равный определителю

$$\det = \begin{vmatrix} 1{,}03\lambda^2 + 2\lambda + 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 0{,}03\lambda^2 + 2\lambda + 1 \tag{3}$$

с двумя корнями: λ_1 = -0,5038, λ_2 = -66,1629 (с точностью до четырех знаков после запятой).

Общее решение системы (1)-(2) имеет вид

$$x_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \tag{4}$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий. Пусть эти условия таковы, что $C_1 = 1$; $C_2 = 1$. Пользуясь формулой (4), нетрудно вычислить значение $x_1(t)$ для любого t. В частности, для $t = 1$ будем иметь $x_1(1) = 0{,}6042$.

Теперь поставим вопрос: будет ли вычисленное значение надежным и достоверным, если некоторые коэффициенты системы (1)-(2) и, в частности, коэффициенты при D^2x_1 и Dx_2 в уравнении (1) и коэффициент при Dx_1 в уравнении (2) известны лишь с точностью до одной сотой? Для ответа на этот вопрос нам достаточно найти решения семейства уравнений

$$[1{,}03(1+\varepsilon_1)D^2 + 2\,D + 1]x_1 + (1+\varepsilon_2)Dx_2 = 0; \tag{5}$$

$$(1+\varepsilon_3)Dx_1 + x_2 = 0 \tag{6}$$

для всех ε_1; ε_2; ε_3, удовлетворяющих неравенствам

$$-0{,}01 \le \varepsilon_1 \le +0{,}01; \tag{7}$$

$$-0{,}01 \le \varepsilon_2 \le +0{,}01; \tag{8}$$

$$-0{,}01 \le \varepsilon_3 \le +0{,}01. \tag{9}$$

Если $\varepsilon_1 = -0{,}01$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$, то, как нетрудно вычислить, характерический полином системы (5)-(6) примет вид

$$\det = \begin{vmatrix} 1{,}0197\lambda^2 + 2\lambda + 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 0{,}0197\lambda^2 + 2\lambda + 1 \tag{10}$$

с корнями $\lambda_1 = -0{,}5025$, $\lambda_2 = -101{,}0204$ и значение $x_1(1)$ при тех же постоянных интегрирования $C_1 = C_2 = 1$ будет равно $x_1(1) = 0{,}6050$ или всего на 0,13% больше, чем при $\varepsilon_1 = 0$.

Если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = +0{,}01$, то характеристический полином системы (5)-(6) примет вид:

$$\det = \begin{vmatrix} 1{,}03(1+0{,}01)\lambda^2 + 2\lambda + 1 & \lambda(1+0{,}01) \\ \lambda(1+0{,}01) & 1 \end{vmatrix} = 0{,}0202\lambda^2 + 2\lambda + 1 \tag{11}$$

с корнями $\lambda_1 = -0{,}50351$, $\lambda_2 = -98{,}5074$. В этом случае $x_1(1) = 0{,}6044$ или на 0,03% больше, чем при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$.

Это типичное, чаще всего встречающееся поведение решений: при малых изменениях коэффициентов решения изменяются мало. Однако так бывает не всегда. Если, например, $\varepsilon_1 = -0{,}01$, а $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = +0{,}01$, то характеристический полином системы (5)-(6) примет вид

$$\det = -0{,}0004\lambda^2 + 2\lambda + 1 \tag{12}$$

с корнями $\lambda_1 = -0{,}5$, $\lambda_2 = +5000{,}5$ и поэтому $x_1(1)$ станет чрезвычайно большой величиной: $x_1(1) > e^{5000}$.

Отсюда сразу следует, что решение системы уравнений (1)-(2) с учетом неточности в задании коэффициентов, определяемой неравенствами (7)-(9), практически смысла не имеет и не приносит достоверной информации об истинном поведении объекта, математической моделью которого является система (1)-(2). При некоторых, вполне возможных, комбинациях погрешностей решение системы (1)-(2) делается неустойчивым и за короткое время $x_1(t)$ может стать чрезвычайно большой величиной, не имеющей ничего общего с решением системы (1)-(2) при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$.

Рассмотренный пример показывает также иллюзорность надежд многих пользователей компьютера на обеспечение надежности и достоверности вычислений путем «покачивания» коэффициентов, т. е. путем вычисления решений системы уравнений не только при номинальных значениях коэффициентов, но и при измененных значениях (на величину возможной погрешности) и в сторону уменьшения и в сторону увеличения. Если все результаты расчета при всех измененных значениях коэффициентов будут мало отличаться друг от друга, то это является сильным аргументом в пользу достоверности результатов расчета. Однако произвести такую проверку далеко не всегда возможно. Если точнее, то для простых систем, подобных системе (1) - (2) такая проверка «покачиванием» вполне возможна, но для более сложных систем она может занять совершенно не реальное время. Действительно, когда в системе (1) - (2) мы проверяли значения $x_1(t)$ при учете погрешностей трех коэффициентов, то нам нужно было проверить $2^3 = 8$ комбинаций сочетаний положительных и отрицательных значений погрешностей ε_1, ε_2, ε_3 . При этом только одна комбинация ($\varepsilon_1 = -0{,}01$, а $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = +0{,}01$) соответствовала неустойчивой системе и стремительному росту $x_1(t)$ (как известно, если хотя бы один корень характеристического полинома положителен или имеет положительную вещественную часть, то система неустойчива). Остальные семь комбинаций давали успокоительные ответы. Проверить восемь комбинаций для компьютера, конечно, совсем несложно. Однако в современной технике, как правило, приходится иметь дело с системами, состоящими из значительно большего числа уравнений. Уже система седьмого порядка в нормальной форме имеет в общем случае 49 коэффициентов и для нее, следовательно, возможны 2^{49} сочетаний положительных и отрицательных погрешностей различных коэффициентов и поэтому для обеспечения достоверности путем «покачивания» необходимо провести 2^{49} вычислений корней характеристического полинома системы. Но 2^{49} больше, чем 10^{14}. Даже для компьютера с большим быстродействием такое количество вычислений затруднительно, а при увеличении числа уравнений быстро перестает быть выполнимым.

Все сказанное относится и к более простой задаче проверки устойчивости. Если нам нужно проверить устойчивость линейной системы в нормальной форме седьмого порядка, имеющей 49 не идеально точно заданных коэффициентов с погрешностями $\pm\varepsilon_1$, $\pm\varepsilon_2$, …, $\pm\varepsilon_{49}$, то для обеспечения достоверности заключения об устойчивости путем «покачивания» коэффициентов нужно провести 2^{49} вычислений характеристического полинома, что не реально.

Все сказанное не означает, естественно, что достоверность расчетов не достижима. Просто надо понимать, что обеспечение достоверности расчета при неизбежных погрешностях в исходных данных является сложной задачей. Простыми, легкими средствами ее не решить.

Для обеспечения достоверности компьютерных расчетов нужно подробно разобраться в причинах возможных ошибок, что мы и будем делать в ходе дальнейшего изложения.

Прежде всего, надо разобраться в свойствах эквивалентных (называемых также равносильными) преобразований. При этом надо разобраться как в хорошо известных свойствах этих преобразований, так и в тех свойствах, на которые долго не обращали внимания, и которые были открыты недавно в ходе исследований, выполненных в Санкт-Петербургском государственном университете (публикации [2; 3; 4; 10]).

Определение: эквивалентные (равносильные) преобразования – это преобразования, не изменяющие решений. Эквивалентность (равносильность) уравнений, неравенств и их систем означает совпадение множеств их решений (Математическая энциклопедия издания 1977 года, том 4, стр. 800).

Примеры эквивалентных преобразований: умножение всех членов на число, не равное нулю, прибавление к левой и правой частям уравнения равных величин, подстановка – т. е. замена какого-либо члена уравнения на член, равный ему.

Определение показывает, что эквивалентные преобразования сохраняют неизменными решениями, но совсем не обязаны сохранять некоторые свойства решений. На это обстоятельство очень долго не обращали внимания, и часто даже молчаливо считалось, что «эквивалентные преобразования ничего не меняют». На самом деле это совсем не так. Примеры эквивалентных преобразований, не изменяющих самих решений как таковых, но изменяющих их некоторые важные свойства, были приведены в [2; 3; 4; 10].

§2. Пример системы дифференциальных уравнений, не имеющей непрерывной зависимости решений от параметров

Важнейшей теоремой, лежащей в основе всех практических приложений теории дифференциальных уравнений, является теорема о непрерывной зависимости решений от коэффициентов и параметров. Как уже упоминалось, коэффициенты дифференциальных уравнений и входящие в эти коэффициенты параметры исследуемого объекта (от которых зависят коэффициенты) известны почти всегда с ограниченной, конечной точностью. Если непрерывной зависимости решений от коэффициентов и параметров нет, то мы не можем быть уверены в том, что неизбежные сколь угодно малые отклонения истинных значений коэффициентов от принятых в расчете не приведут к большим или даже коренным различиям между результатами расчета и реальным поведением исследуемого объекта, и тогда расчет потеряет всякий смысл.

Поэтому теорема о непрерывности зависимости решений от параметров занимает центральное место в учебниках по дифференциальным уравнениям (смотри, например, известный учебник [1], стр. 259-272 и многие другие) и подробно в них доказывается. Так, для систем в нормальной форме (т. е. записанных в виде системы из n уравнений первого порядка, в форме):

$$\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dt} = f_1(x; y_1; y_2; ...; y_n; \lambda_1; \lambda_2; ...; \lambda_m);\\
&\frac{dy_2}{dt} = f_2(x; y_1; y_2; ...; y_n; \lambda_1; \lambda_2; ...; \lambda_m);\\
&...\\
&\frac{dy_n}{dt} = f_n(x; y_1; y_2; ...; y_n; \lambda_1; \lambda_2; ...; \lambda_m),
\end{aligned} \tag{13}$$

где λ_1, λ_2, …, λ_m – параметры, доказано, что если функции f_i непрерывны относительно всех аргументов и ограничены, а также удовлетворяют условиям Липшица относительно функций y_i, то решения $y_i(x)$ зависят от параметров λ_i непрерывно.

Условия Липшица означают, что для любой f_i выполняется неравенство:

$$\left| f_k(x; \bar{y}_1; \bar{y}_2; ...; \bar{y}_n; \lambda_1; \lambda_2; ...; \lambda_n) - f_k(x; \bar{\bar{y}}_1; \bar{\bar{y}}_2; ...; \bar{\bar{y}}_n; \lambda_1; \lambda_2; ...; \lambda_n) \right| \le L \cdot \sum_{i=1}^{n} (\bar{y}_i - \bar{\bar{y}}_i), \tag{14}$$

где L – постоянная Липшица, т. е. положительное число, которое может быть большим, не зависящее от параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$.

Условия Липшица не обременительны и для подавляющего большинства уравнений, встречающихся в приложениях, они заведомо выполняются. Поэтому иногда упоминание об условиях Липшица опускается и теорема формулируется коротко: решения дифференциальных уравнений зависят от коэффициентов и параметров непрерывно.

Теперь идет самое интересное: в учебниках по дифференциальным уравнениям эта теорема доказана для двух крайних случаев – для систем в нормальной форме (т. е. состоящих из n уравнений первого порядка) и для одного уравнения n-го порядка. Для всего многообразия промежуточных случаев – т. е. систем, состоящих из m уравнений второго порядка; систем состоящих из уравнений третьего порядка и второго и т. д. и. т. п. – для всех этих случаев теорема в учебниках не доказана.

Вместо этого существует почти всеобщая уверенность в том, что для всех систем, которые можно привести с помощью эквивалентных преобразований к нормальной форме или к одному уравнению n-го порядка, решения зависят от параметров непрерывно.

Эта уверенность основана, очевидно, на следующем рассуждении: эквивалентные преобразования, как известно, решений не изменяют. У одного уравнения n-го порядка, к которому привели исходную систему, решения те же, что были у ней. А поскольку решения уравнения n-го порядка зависят (как доказано) от параметров непрерывно, то те же самые решения исходной системы, казалось бы, тоже должны зависеть от параметров непрерывно. И все же это простое рассуждение ошибочно. Покажем это на примере.

Пример №2.

Рассмотрим систему двух уравнений с параметром m (похожую на систему (1)-(2):

$$(D^2 + 2D + 1)x_1 + mDx_2 = 0; \qquad (15)$$

$$Dx_1 + x_2 = 0. \qquad (16)$$

Характеристический полином системы (15)-(16) равен определителю:

$$\det = \begin{vmatrix} \lambda^2 + 2\lambda + 1 & m\lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = (1 - m)\lambda^2 + 2\lambda + 1 \qquad (17)$$

и имеет корни:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{1-m}(-1 \pm \sqrt{m}). \tag{18}$$

Общее решение системы (15)-(16) имеет вид:

$$x_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{19}$$

Из формул (18) и (19) сразу следует, что критическим значением параметра m является $m = 1$. До тех пор, пока $m < 1$ и приближается к значению $m = 1$ слева, оба корня λ_1 и λ_2 остаются отрицательными. При $m \to 1$ слева, будет $\lambda_1 \to -0{,}5$, а λ_2 оставаясь отрицательным, делается очень большим по абсолютной величине. Поэтому в решении (19) при *m,* близких к единице, член $C_2 e^{\lambda_2 t}$ для любого t будет пренебрежимо мал, и для *m,* близких к единице, будет $x_1(t) \approx C_1 e^{-0{,}5t}$.

Совсем по-другому будет вести себя решение (19), если $m > 1$ и приближается к значению $m = 1$ справа. В этом случае $\lambda_1 \to -0{,}5$, а $\lambda_2 \to +\infty$. В решении (19) при *m,* близких к $m = 1$, будет очень большой член $C_2 e^{\lambda_2 t}$, знак которого зависит от C_2. Таким образом, для любого значения времени t зависимость величины $x_1(t)$ от параметра m терпит разрыв: $m \to 1$ слева будет $x_1(t) \to C_1 e^{-0{,}5t}$, а при $m \to 1$ справа будет $x_1(t) \to \pm\infty$.

Таким образом, мы прямым построением убедились, что существует система дифференциальных уравнений, у которой зависимость решений от параметров не является непрерывной, имеет точки разрыва. Второй пример подобной системы будет приведен в §3.

3. Пример решения технической задачи проверки устойчивости

В качестве еще одного примера рассмотрим конкретную техническую задачу – исследуем систему дифференциальных уравнений, являющуюся моделью системы управления частотой вращения электродвигателя постоянного тока, работающего на механизм, у которого зависимость колебаний момента сопротивления $\varphi(t)$ от времени является стационарным случайным процессом со спектром

$$S_\varphi = \frac{1}{(1+\omega^2)^2}. \tag{20}$$

Уравнение равновесия моментов на валу электродвигателя имеет вид:

$$T_M \frac{d\omega}{dt} = M_{\partial в} + k\omega + M_c, \tag{21}$$

где ω – частота вращения, $M_{\partial в}$ – вращающий момент на валу, пропорциональный току якоря и играющий роль управления, $k\omega$ – момент трения, M_c – момент сопротивления исполнительного механизма, T_M – механическая постоянная времени, численно равная времени разгона электродвигателя от нулевой частоты до номинальной.

Переходя от уравнения (21) к уравнениям «в отклонениях» от номинального режима, измеряя время t в долях от механической постоянной времени T_M, и учитывая спектр (20) по общим правилам решения задач со стационарными возмущающими силами, получаем для случая $k = –2$ следующие уравнения электродвигателя:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + x_2 + x_3; \\ \dot{x}_3 &= x_4; \\ \dot{x}_4 &= -x_3 - 2x_4, \end{aligned} \tag{22}$$

где x_1 – отклонение частоты вращения от номинальной, x_2 – отклонение тока якоря от номинального значения, играющее роль управления, x_3 – отклонение момента сопротивления от его среднего значения, x_4 – производная от x_3.

Если управляющее воздействие формировать согласно известной методике аналитического конструирования регуляторов как линейную комбинацию от переменных состояния, то уравнение регулятора примем имеющим вид:

$$x_2 = - x_1 - 2\, x_3 – x_4. \tag{23}$$

В уравнении (23) коэффициенты усиления регулятора для облегчения проверки последующих выкладок выбраны округленными до целых чисел, однако в целом уравнения (22) - (23) – всего это четыре уравнения для четырех переменных x_1; x_2; x_3; x_4 – описывают вполне реальную систему управления частотой вращения.

Следует учесть также, что переменные x_3 и x_4 не могут быть использованы в регуляторе, поэтому после исключения их из уравнений (22) – (23) приходим к следующим уравнениям, связывающим переменные x_1 и x_2, то есть регулируемую частоту и управляющее воздействие (через $D = \dfrac{d}{dt}$ обозначен оператор дифференцирования):

$$(D^3 + 4D^2 + 5D + 2)x_1 = (D^2 + 2D + 1)x_2, \tag{24}$$

$$(D^2 + 4D + 5)x_1 = (D + 1)x_2. \tag{25}$$

Уравнение (24) является уравнением электродвигателя как объекта управления, уравнение (25) – уравнением регулятора.

Система уравнений (24) - (25), рассматриваемая совместно, описывает замкнутую систему управления.

Характеристический полином системы (24) – (25) равен следующему определителю:

$$\det = \begin{vmatrix} \lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2 & -(\lambda^2 + 2\lambda + 1) \\ \lambda^2 + 4\lambda + 5 & -(\lambda + 1) \end{vmatrix} = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 7\lambda + 3 = (\lambda + 3)(\lambda + 1)^2 \tag{26}$$

и имеет корни: $\lambda_1 = -3$; $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ (кратный корень).

Поэтому решение $x_1(t)$ имеет вид:

$$x_1(t) = C_1 e^{-3t} + (C_2 t + C_3)e^{-t}, \tag{27}$$

где C_1, C_2, C_3 – постоянные интегрирования.

Однако это решение изменяется коренным образом при сколь угодно малых изменениях некоторых коэффициентов системы (24) – (25). Пусть, например, коэффициент при Dx_2 в уравнении (25) равен не единице, а (1+ε), где ε – число, малое в сравнении с единицей, и система (24) – (25) приняла вид:

$$\left.\begin{aligned} (D^3 + 4D^2 + 5D + 2)x_1 &= (D^2 + 2D + 1)x_2 \\ (D^2 + 4D + 5)x_1 &= [(1 + \varepsilon)D + 1]x_2 \end{aligned}\right\}. \tag{28}$$

Ее характеристический полином, равный определителю

$$\begin{aligned} \det = &\begin{vmatrix} \lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2 & -(\lambda^2 + 2\lambda + 1) \\ \lambda^2 + 4\lambda + 5 & -[(1 + \varepsilon)\lambda + 1] \end{vmatrix} = \\ = &-\varepsilon\lambda^4 + (1 - 4\varepsilon)\lambda^3 + (5 - 5\varepsilon)\lambda^2 + (7 - 2\varepsilon)\lambda + 3, \end{aligned} \tag{29}$$

становится полиномом четвертой степени и помимо трех корней, близких (при малых ε) к прежним значениям $\lambda_1 = -3$; $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, он получает (при $\varepsilon > 0$) большой положительный корень λ_4, приближенно (при малых ε) равный $\lambda_4 \approx \frac{1}{\varepsilon}$.

Поэтому в решении $x_1(t)$ системы (28) уже при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ появится четвертый, стремительно растущий член:

$$C_4 e^{+\frac{1}{\varepsilon}t}. \tag{30}$$

Следствие: все поведение решений системы (24) – (25) изменяется коренным образом при сколь угодно малых вариациях некоторых коэффициентов. Непрерывной зависимости решений от этих коэффициентов или от параметров, от которых они зависят в системе (24) – (25) в данном случае нет.

Решения системы (24) – (25), как показывает формула (27) – устойчивы, но уже при сколь угодно малых $\varepsilon > 0$ устойчивость теряется (любопытно, что при малых $\varepsilon < 0$ устойчивость сохраняется).

Важно отметить, что всех этих важных свойств решений системы (24) – (25) мы не увидим, если эта система будет приведена к нормальной форме, к системе уравнений первого порядка. В нормальной форме система (24) – (25) принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -3x_1 - x_2 - x_3; \\ \dot{x}_2 &= x_3; \\ \dot{x}_3 &= -x_2 - 2x_3. \end{aligned} \tag{31}$$

Ее характеристический полином, равный определителю

$$\begin{vmatrix} \lambda+3 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 7\lambda + 3 = (\lambda+3)(\lambda+1)^2, \tag{32}$$

полностью совпадает с полиномом (26). Это говорит о том, что система (31) эквивалентна системе (25) – (26) и имеет те же решения вида (27), что и система (25) – (26).

Однако свойства решений будут совсем другими. У системы (31) ее решения (согласно теореме, рассмотренной в §2) будут непрерывно зависеть от коэффициентов. Непрерывную зависимость решений системы (31) от любых ее коэффициентов легко проверить и прямым расчетом. А у эквивалентной ей системе (25) – (26) непрерывной зависимости решений от коэффициентов нет.

Решения системы (31) сохраняют устойчивость при малых изменениях любых своих коэффициентов. В то же время решения системы (25) – (26) могут терять устойчивость даже при сколь угодно малых изменениях некоторых коэффициентов. Между тем традиционные методы численного решения систем дифференциальных уравнений, воплощенные в известных пакетах прикладных программ – таких, как *MATLAB*, *Mathcad* и другие – включают в себя приведение исходной системы к нормальной форме, к форме n уравнений первого порядка. Такое приведение очень удобно, поскольку позволяет одной программой охватить все многообразие различных систем, состоящих из уравнений разных порядков. Однако мы убедились, что существуют системы, для которых традиционное решение через приведение к нормальной форме не отражает истинных свойств исследуемого объекта. Система управления электродвигателем, математической моделью которой является система (25) – (26), теряет устойчивость и коренным образом изменяет свои свойства при сколь угодно малых вариациях некоторых своих параметров, но традиционные методы решения этого не скажут.

§4. Выводы

Рассмотренные нами простые примеры (которые, при желании, можно дополнить многочисленными подобными примерами, ранее опубликованными в [2; 3; 4]) позволяют сделать следующие важные выводы:

1. Существуют эквивалентные (равносильные) преобразования уравнений, которые не изменяют самих решений, но могут изменять некоторые их свойства.

2. Существуют математические модели, для которых традиционные методы решения, использующие эквивалентные преобразования, приводят к неверным выводам о свойствах решений. Такие математические модели мы назовем «особыми», поскольку для большинства математических моделей традиционные методы дают, разумеется, правильные результаты.

3. Существуют (в технике, в физике, в экономике) «особые» объекты (описываемые «особыми» математическими моделями) для которых

традиционные методы проектирования и расчета, использующие эквивалентные преобразования, дают неверные предсказания о свойствах объекта. По расчету, например, может казаться, что объект устойчив и обладает хорошими запасами устойчивости, а на самом деле запасы устойчивости очень малы и при неизбежных в ходе эксплуатации малых изменениях параметров, объект может в непредвиденный момент времени потерять устойчивость, «пойти в разнос» и стать причиной тяжелой аварии и даже катастрофы. Подобные аварии и катастрофы неоднократно происходили. Некоторые из них описаны в [4]. Поэтому «особые» объекты очень опасны. Мы называем их «особыми» поскольку они встречаются сравнительно редко, но пренебрегать ими ни в коем случае нельзя, поскольку каждая непредвиденная встреча с «особым» объектом может стать причиной катастрофы. Заметим еще, что раньше, когда расчеты проводились вручную, интуиция опытных инженеров до известной степени предостерегала от «особых» объектов. В последние десятилетия почти все расчеты ведутся с использованием вычислительных машин, а машина интуицией не обладает. Для обеспечения достоверности компьютерных расчетов необходимо использовать усовершенствованные программы, учитывающие недавно открытые свойства эквивалентных преобразований и особенно – такое свойство, как возможность изменения некоторых важных характеристик решений после эквивалентных преобразований.

Действительно, посмотрим еще раз: что произойдет, если в ходе проектирования системы управления электроприводом математической моделью проектируемой замкнутой системы окажутся дифференциальные уравнения (24) – (25) с характеристическим полиномом (26)?

Если об устойчивости системы мы будем (как это рекомендуется в учебниках) судить по расположению корней характеристического полинома на комплексной плоскости, то мы должны будем сделать вывод о том, что проектируемая система устойчива и сохраняет устойчивость при довольно существенных отклонениях параметров системы от расчетных значений. К такому же точно выводу мы должны будем придти и после детального расчета процессов на ЭВМ с использованием пакетов прикладных программ *MATLAB, Mathcad* и других. Все эти программы (использующие приведение исследуемой системы (24) – (25) к нормальной форме (31)) еще раз подтвердят, что проектируемая система устойчива и сохраняет устойчивость при вариациях параметров, имеет хорошие переходные процессы и ее вполне можно рекомендовать к изготовлению и «воплощению в металле». Но изготовленная система обманет ожидания проектантов и жестоко их подведет: при изготовлении невозможно идеально точно воспроизвести расчетные параметры, и поэтому математической моделью изготовленной системы могут оказаться не уравнения (25) – (26), а уравнения (28), где вариация ε может быть равна, например, ε = –0,001 (такое малое отклонение – всего в одну тысячную – практически устранить невозможно). Но система (28) при ε = –0,001 – устойчива, и поэтому изготовленная система на испытаниях покажет вполне хорошую работу. Система будет обладать малыми запасами устойчивости, но их величину на испытаниях не проверить. Испытания покажут только сам факт устойчивости или неустойчивости, а величину запасов устойчивости дает расчет. Поскольку система управления частотой вращения электропривода (математической моделью которой являются уравнения (25) – (26)) является особым объектом, то традиционные методы расчета дадут неверный результат: по расчету будет казаться, что все хорошо, а на самом деле запас устойчивости очень мал. Но поскольку система управления успешно прошла испытания, и по расчету все в порядке, то ее могут со спокойной совестью поставить на самый ответственный объект – например, на самолет. Некоторое время самолет будет исправно летать, но в ходе эксплуатации, как известно, параметры любых объектов не остаются идеально постоянными. Они немного изменяются, происходит, как говорят техники, малый «дрейф» параметров, в ходе которого исходное значение ε = –0,001 может постепенно перейти в ε > 0 (такие изменения – порядка одной тысячной от первоначального значения – практически неизбежны). Но как только в заранее непредвиденный момент времени «дрейф» параметров приведет к тому, что вместо ε < 0 станет ε > 0, то система регулирования частоты вращения сразу потеряет устойчивость, «пойдет в разнос» и создаст аварийную ситуацию, которая может привести к тяжелой аварии и даже катастрофе самолета. Подобные аварии и катастрофы неоднократно происходили. Они описаны, например, в [4] и в [26]. В ходе дальнейшего изложения подобные катастрофы, их характерные черты и методы их предотвращения будут подробно рассмотрены. Будут изложены и усовершенствованные методы расчета, позволяющие обеспечивать достоверность результата и для особых систем.

<u>Основной и главный вывод:</u> необходимо ввести в практику вычислений и в преподавание в вузах усовершенствованные методы расчетов, учитывающие открытые не так давно в Санкт-Петербургском государственном университете новые свойства эквивалентных преобразований и «особых» технических объектов. Если этого не сделать, то будут неизбежно продолжаться аварии и катастрофы при каждой новой встрече с особым объектом.

Глава 2. Корректность решений и традиционные методы ее проверки

§1. Вариации коэффициентов и параметров

В дальнейшем мы будем изучать поведение различных объектов техники, физики, экономики при изменениях их параметров и будем изучать поведение математических моделей исследуемых объектов при вариациях коэффициентов математических моделей, порожденных изменениями параметров объекта.

Введем определения.

Будем полагать, что истинные, но неизвестные нам, значения коэффициентов $\overline{m}_i$ математической модели находятся внутри интервала

$$m_i(1 \pm \varepsilon_i), \tag{1}$$

или, что то же самое – подчинены неравенствам:

$$m_i(1-\varepsilon_i) \leq \overline{m}_i \leq m_i(1+\varepsilon_i), \tag{2}$$

где m_i - номинальные значения коэффициентов, принятые при расчете, а ε_i – числа, малые в сравнении с единицей; конкретные значения этих чисел определяются каждый раз свойствами того или иного конкретного объекта.

Величины $m_i\varepsilon_i$ будем называть вариациями номинальных коэффициентов m_i.

Из неравенств (2) сразу следует, что если какой-либо коэффициент m_i равен нулю, то и его вариация равна нулю, т. е. «нуль не варьируется».

Заметим сразу, что если в основу определения вариаций коэффициентов положены неравенства (2), то это означает, что в дальнейшем будут рассматриваться только относительные вариации коэффициентов, а не абсолютные, т. е. не будут рассматриваться «вариации нуля». Такой подход, разумеется, не является единственно возможным. Существуют такие объекты и такие задачи их исследования, в которых можно рассматривать превращения некоторых нулевых коэффициентов в ненулевые. Подобные задачи рассматриваются, например, в теории сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, то есть уравнений, имеющих малые коэффициенты при старших производных. В теории сингулярно возмущенных уравнений могут рассматриваться, например, изменения решений, происходящие при переходе от уравнения

$$\dot{x} + x = 0 \tag{3}$$

(которое можно, разумеется, рассматривать как уравнение

$$0 \cdot \ddot{x} + \dot{x} + x = 0 \tag{4}$$

с нулевым коэффициентом при старшей производной) к уравнению

$$\varepsilon \cdot \ddot{x} + \dot{x} + x = 0\,, \tag{5}$$

где ε – малое число, не равное нулю. Понятно, что решения уравнения (5) почти всегда будут существенно отличаться от решений уравнения (4), даже при сколь угодно малых ε.

Теория сингулярно возмущенных уравнений является важной (и весьма сложной) теорией, но она не имеет почти ничего общего с той теорией, которая будет далее изложена, и которая опирается на определение вариаций через неравенства (2), исключающие вариации нулей.

В дальнейшем изложении будет использоваться понятие «ε – окрестности» системы автономных дифференциальных уравнений. Коэффициенты такой системы можно нумеровать, обозначать числами от m_1 до m_k. Примером может служить система

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x}_1 = m_1 x_2; \\ &\dot{x}_2 = m_2 x_1 + m_3 x_2 + m_4 x_2^3 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

с четырьмя коэффициентами.

Определение: ε – окрестностью рассматриваемой системы назовем семейство дифференциальных уравнений той же структуры, коэффициенты которых, обозначаемые через $\overline{m}_i$, подчинены неравенствам (2).

Теорема: если нулевое решение рассматриваемой системы устойчиво, то для того, чтобы она сохраняла устойчивость при вариациях коэффициентов, подчиненных неравенствам (2), необходимо и достаточно, чтобы в ее ε – окрестности находились только те системы, у которых нулевое решение устойчиво.

Доказательство: если в ε – окрестности находится хотя бы одна система, нулевое решение которой неустойчиво, то при вариациях коэффициентов рассматриваемой системы они могут совпасть с коэффициентами именно этой неустойчивой системы, и тогда решение станет неустойчивым. Это доказывает необходимость условия теоремы. Достаточность очевидна: если в ε – окрестности нет ни одной системы, нулевое решение которой было бы неустойчивым, то при любых вариациях коэффициентов, удовлетворяющим неравенствам (2), устойчивость нулевого решения рассматриваемой системы сохраняется.

Понятие «ε – окрестности» системы будет использовано позже при анализе свойств эквивалентных преобразований.

§2. Вариации решений. Корректные и некорректные решения

При вариациях коэффициентов уравнения (или системы уравнений), его решения также, разумеется, будут испытывать вариации. Зависимость вариаций решений от вариаций коэффициентов может быть различной. Поясним это на простом примере. Пусть изгородью длиною «*a*» метров нужно огородить прямоугольный участок земли площадью «*b*» квадратных метров. Обозначив длины сторон прямоугольника через x_1 и x_2, можно составить уравнения:

$$2(x_1 + x_2) = a\,; \tag{7}$$

$$x_1 \cdot x_2 = b\,. \tag{8}$$

Решая их, нетрудно установить, что x_1 и x_2 будут двумя решениями квадратного уравнения

$$x^2 - \frac{a}{2}x + b = 0,$$

т. е. $x_1 = \frac{a}{4} + \sqrt{\frac{a^2}{16} - b}\,;\; x_2 = \frac{a}{4} - \sqrt{\frac{a^2}{16} - b}\,.$ (9)

На рис. 1 показаны зависимости x_1 и x_2 от коэффициента b для случая $a = 8$ м.

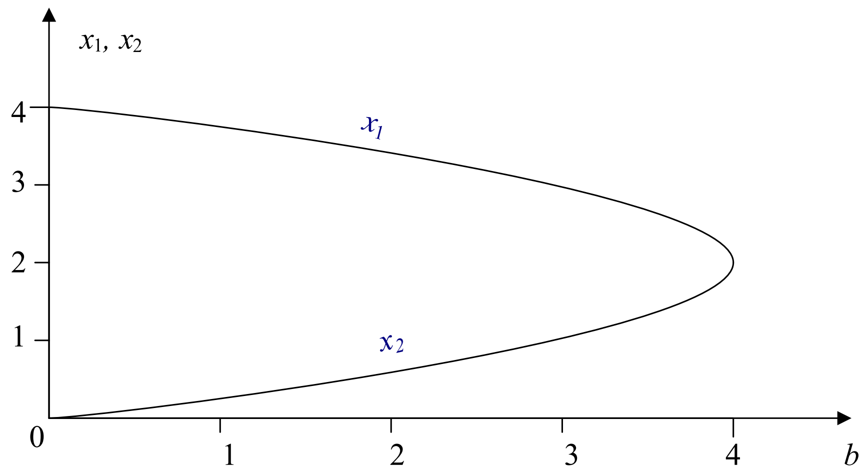


Рисунок 1

Мы убеждаемся, что при $b < 4$ м^2 значения x_1 и x_2 зависят от «b» непрерывно. Сколь угодно малым изменениям коэффициента площади огораживания b соответствуют сколь угодно малые изменения x_1 и x_2. Так, если $b = 3$, то $x_1 = 3$; $x_2 = 1$. Если $b = 3 - \varepsilon$, то из формул (9) следует, что

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{1+\varepsilon} = 2 \pm (1 + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \ldots). \qquad (10)$$

Формула (10) подтверждает непрерывную зависимость x_1 и x_2 от площади огораживаемого участка при $b < 4$. Однако уже при $b = 4$ непрерывная зависимость исчезает: если $b = 4 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, то уже при сколь угодно малых ε вещественные решения исчезают, переходят в комплексные; в этом случае

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{-\varepsilon} \qquad (11)$$

и уже при сколь угодно малых $\varepsilon > 0$, вещественных решений нет. Непрерывная зависимость x_1 и x_2 от b при $b = 4$ исчезает.

Практически это означает, что если площадь участка больше, чем 4 м^2, то огородить его изгородью длиной 8 м нельзя. Длины изгороди не хватит.

Наиболее интересен случай, когда $b = 4$ м^2 (или, для общего случая, когда $b = \frac{a^2}{16}$. В этом случае, используя формулы (9) получаем простое решение:

$$x_1 = x_2 = \frac{a}{4}. \qquad (12)$$

Это решение практического смысла не имеет, потому что оно может измениться коренным образом при сколь угодно малых (а значит и совершенно неизбежных на практике) вариаций параметра b (огораживаемой площади), при сколь угодно малых (а значит – неизбежных) погрешностях при ее измерении.

Далее мы увидим, что подобные явления (отсутствие непрерывной зависимости от коэффициентов и параметров) встречаются довольно часто и имеют большой практический смысл. Поэтому введем важные определения:

1. Корректными назовем решения, которые зависят от коэффициентов и параметров непрерывно. Сколь угодно малым изменениям коэффициентов и параметров соответствуют сколь угодно малые изменения решений.

2. Некорректными назовем решения, не имеющие непрерывной зависимости от коэффициентов и параметров. Некорректные решения могут изменяться на конечные величины, или даже вообще измениться коренным образом при сколь угодно малых вариациях коэффициентов и параметров.

Пример: решение только что рассмотренной задачи об огораживании при $a = 8$ и $b = 3$ корректно. При $a = 8$ и $b = 4$ решение той же задачи – решение $x_1 = x_2 = 4$ – некорректно; при $b = 4 + \varepsilon$ решение меняется коренным образом (исчезает) даже при сколь угодно малых ε.

Дальнейшее изложение будет основываться на приведенных вполне точных определениях корректных и некорректных решений.

Отметим, что в более ранних учебниках и учебных пособиях в основу изложения было положено не определение корректного (или некорректного) решения, а определение корректно или не корректно поставленной задачи.

Так, в наиболее распространенном учебнике [5], та или иная задача называется корректно поставленной (корректной), если она удовлетворяет следующим трем условиям:

1. решение существует;

2. решение единственно;

3. решение устойчиво – т. е. оно зависит от исходных данных, от коэффициентов и параметров непрерывно.

Если рассматриваемая задача не удовлетворяет хотя бы одному из этих трех условий, то она называется некорректной (некорректно поставленной).

Данное определение неудачно, поскольку далеко не каждую задачу, не имеющую решения, или имеющую множество решений целесообразно относить к некорректным. Так, например, простое уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет решений в поле действительных чисел; уравнение $sin\ x = 0$ имеет бесчисленное множество решений: $x = n\pi$, но задачи нахождения их решений никак не отнесешь к некорректным. Специфику некорректных задач отражает лишь третье условие (точнее – невыполнение третьего условия), а введение первого и второго условия растворяет действительно некорректные задачи в необъятном море задач, в которых решение не существует или не является единственным. А если сам объект исследования (некорректность) точно не определен, то ни о какой «математической строгости» говорить уже не приходится. Было бы, разумеется, желательно использовать более точные определения корректных и некорректных задач, но это сделать трудно, поскольку приведенное ранее определение, состоящие из трех условий, сделалось уже привычным и общепринятым. Введение нового определения корректных и некорректных задач может вызвать путаницу. Для избежания путаницы, в дальнейшем изложении мы будем брать за основу не определение корректных и некорректных задач, а определение корректных и некорректных решений.

Следующим важным объектом исследования, также нуждающимся в хорошем определении, являются плохо обусловленные решения и плохо обусловленные задачи.

Определение: плохо обусловленным решением назовем решение, существенно изменяющееся при малых изменениях исходных условий, коэффициентов и параметров. Плохо обусловленной системой уравнений назовем ту, решения которой являются плохо обусловленными.

Сразу видно, что это определение не является полным, не является замкнутым, не позволяет без дополнительных уточнений судить о плохой или хорошей обусловленности решения. Для того, чтобы определение получило точный смысл, нужно дополнительно определить – какое именно изменение коэффициентов и параметров считать «малым» и какое изменение решения считать существенным.

Пример. Вычислим определитель:

$$\begin{vmatrix} 100 & 90 \\ 90 & 100 \end{vmatrix} = 1900. \tag{13}$$

Если элементы первого столбца изменятся на ±1%, то решение (величина определителя) может стать, например, равным:

$$\begin{vmatrix} 100(1-0{,}01) & 90 \\ 90(1+0{,}01) & 100 \end{vmatrix} = 1719, \tag{14}$$

т. е. изменится на 9,53%.

Если мы будем считать изменение элементов первого столбца на ±0,01 малым изменением, а изменение решения на ±5% - существенным изменением, то в этом случае решение задачи вычисления определителя (13) будет плохо обусловленным. Если же будем считать существенным изменение решения не менее, чем на 10%, то в этом случае решение задачи вычисления того же определителя уже не будет плохо обусловленным.

Непосредственно видно, что некорректное решение является частным, предельным случаем решения плохо обусловленного – когда место «малого» изменения коэффициентов и параметров занимает «сколь угодно малое» изменение, а место «существенного» изменения решения задачи занимает «конечное» изменение, изменение на любую конечную, а не сколь угодно малую величину.

Определение некорректного решения уже само по себе является полным, вполне замкнутым, никаких уточнений не требует. Поэтому выявление некорректных решений значительно проще, чем плохо обусловленных и именно с проверки возможной некорректности решения нужно начинать решение всех практических задач.

§3. Традиционные методы проверки корректности. Ошибки и заблуждения

Поскольку сколь угодно малые отклонения действительных значений коэффициентов и параметров математической модели от их расчетных значений в технических задачах неизбежны, то расчет объектов, математические модели которых имеют некорректные решения, чаще всего не имеет смысла и может привести к серьезным ошибкам. Существуют особые методы подхода к задачам с некорректными решениями (регуляризация и т. п.), о которых мы далее расскажем, но если не заметить некорректности решения и решать задачу с некорректными решениями обычными методами, как задачу корректную, то ошибки почти всегда неизбежны.

Поэтому перед практическим использованием решения любой технической или экономической задачи следует обязательно проверить – будет ли это решение корректным.

Существуют два основных метода проверки корректности:

1. Индивидуальная проверка.

2. Использование результатов исследования корректности для различных классов математических моделей.

Индивидуальная проверка заключается в том, что вычисление решения повторяется несколько раз, причем каждый раз – при немного измененных значениях коэффициентов и параметров (иногда этот подход называют «методом «покачивания» коэффициентов»).

Пример индивидуальной проверки уже приводился в первой главе, и там же было показано, что в задачах с большим количеством коэффициентов и параметров для проверки корректности может потребоваться огромное количество повторных вычислений – порядка 2^n, где n – число коэффициентов и (или) параметров, влияние вариаций которых на корректность решения мы хотим исследовать.

Поэтому наиболее удобным и выгодным является использование второго метода проверки – использование ранее проведенного исследования корректности решений сразу для целых классов математических моделей.

Пример №1.

Задан полином

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad (15)$$

и требуется вычислить его корни, которые могут быть и комплексными.

Известно и давно доказано, что положение корней полинома любой степени на комплексной плоскости зависит от коэффициентов полинома непрерывно. При сколь угодно малых вариациях коэффициентов полинома положение его корней на комплексной плоскости изменится мало. Поэтому задача вычисления любого полинома (15) имеет корректное решение. Индивидуальная проверка не нужна.

Пример №2.

Задан тот же полином (15), но на этот раз рассматриваются задачи, в которых физический смысл имеют только вещественные корни; примером может служить уже рассмотренная задача о длине сторон изгороди, огораживающей прямоугольный участок заданной площади. Длины сторон могут быть только вещественными, но не комплексными числами, и ранее, в §2, было показано, что уже для полинома второй степени задача вычисления вещественных корней может иметь некорректное решение. Более полный ответ на вопрос о корректности решений выглядит так: если в числе корней полинома (15) оказались кратные, то решение задачи вычисления его вещественных корней – некорректно. При сколь угодно малых изменениях коэффициентов полинома решение может измениться коренным образом, пара вещественных кратных корней может исчезнуть.

Мы убеждаемся, что проверка корректности решения на основе общих теорем гораздо проще, чем индивидуальная проверка каждой корректной задачи. Однако при использовании общих теорем можно натолкнуться на ошибки и заблуждения.

Пример №3.

Решение задачи об устойчивости решений системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами для случая, когда корни характеристического полинома системы лежат в левой половине комплексной плоскости, но не на мнимой оси, традиционно считалось корректным. Действительно, казалось очевидным, что при сколь угодно малом изменении коэффициентов характеристического полинома его корни (зависящие от коэффициентов непрерывно) не могут «перепрыгнуть» из левой полуплоскости в правую.

При этом – как ни странно – в течение многих десятилетий никем не замечалось, что при сколь угодно малых вариациях коэффициентов системы дифференциальных уравнений может измениться степень характеристического полинома (как это было показано в главе первой на примере рассмотренной там системы (28), а это означает, что у него могут появиться новые корни, в том числе и лежащие в правой полуплоскости комплексного переменного. Таким образом, решение задачи об устойчивости системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в общем случае некорректно.

Этот результат (впервые опубликованный в [2]) очень важен. Он раскрывает причину многих происходивших в последнее время аварий и катастроф и позволяет избежать таких аварий в будущем.

Мы еще раз убеждаемся, что математика не является застывшей и завершенной наукой. Даже в сравнительно элементарных ее разделах – таких, как линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, и даже в свойствах простейших эквивалентных преобразований были в конце XX века сделаны неожиданные открытия, заставившие во многом по-новому взглянуть на проблему обеспечения надежности и достоверности математических вычислений и расчетов.

Так, например, при проверке корректности решений можно, разумеется, пользоваться результатами исследования корректности решений целых классов математических задач, но нужно помнить, что некоторые теоремы о корректности и некорректности, которые ранее считались доказанными, на самом деле неверны и требуют уточнения.

Без такого уточнения – которое мы приведем в последующих главах – надежность и достоверность результатов расчета обеспечена не будет. Связано все это с тем, что в конце XX века неожиданно обнаружили новые свойства у эквивалентных (равносильных) преобразований. А поскольку эти преобразования используются самым широчайшим образом и пронизывают собой все математику сверху донизу, то и оказалось, что многие математические теоремы потребовали уточнения.

К рассмотрению недавно открытых новых свойств эквивалентных преобразований мы перейдем в следующей главе.

Глава 3. Эквивалентные (равносильные) преобразования и их недавно обнаруженные новые свойства

§1. Преобразования, эквивалентные в классическом смысле

Эквивалентные преобразования, которые называют еще равносильными преобразованиями (оба названия равноправны), применяются в математике очень давно, а в настоящее время изучаются в средней школе. Давно было замечено, что такие преобразования как:

1. перенос членов уравнения из левой части в правую с изменением знака;

2. умножение всех членов на число не равное нулю;

3. подстановка – т. е. замена какого-либо члена уравнения на равный ему (а также и многие другие преобразования)

способны упростить уравнения и в то же время не изменяют их решений.

Общее определение: эквивалентными (равносильными) преобразованиями называют те, при которых исходная и преобразованная системы уравнений эквивалентны (равносильны) одна другой – т. е. имеют одно и то же множество решений. Определение эквивалентных друг другу систем уравнений приведены в известных справочных изданиях [6, 7].

При этом, разумеется, надо оговаривать – какой именно смысл вкладывается в понятие «решение». Так, например, уравнение

$$x^2 - 1 = 0 \tag{1}$$

и уравнение

$$(x^2 - 1)(x^2 + 1) = x^4 - 1 = 0 \tag{2}$$

эквивалентны между собой, если решениями могут быть только действительные числа и будут неэквивалентны, если в качестве решений допускаются и комплексные числа.

Отметим, что в определение эквивалентного преобразования входит только тождество решений исходной и преобразованной системы. Никакие другие условия (однозначность преобразования, взаимная обратимость и т. п.) обязательными не являются и в определение эквивалентного (равносильного) преобразования не входят.

Простота и прозрачность простых эквивалентных преобразований привела к тому, что многие математики, а за ними инженеры и пользователи компьютеров стали верить, что эквивалентные преобразования «ничего не меняют» и стали пользоваться ими не только широко, но и безоглядно. Мы убедимся далее, что такое безоглядное использование эквивалентных преобразований неверно и опасно, оно может привести к серьезным ошибкам. Эквивалентные преобразования, согласно классическому определению, не меняют самих решений как таковых. Но они совсем не обязаны сохранять неизменными некоторые важные свойства решений – такие, например, как параметрическая устойчивость, непрерывная зависимость решений от коэффициентов и параметров и т. п. Многочисленные примеры таких изменений мы далее приведем. Любопытно отметить, что это простое обстоятельство было открыто и истолковано совсем недавно и повлекло за собой много интересных и важных следствий.

Полезно ввести и использовать некоторые уточнения в понятие эквивалентного преобразования. Рассмотрим, например, простую систему:

$$2x - 3y = 1; \tag{3}$$

$$2x + 3y = 9, \tag{4}$$

имеющую решения: $x = 2$; $y = 1$. Если мы сложим уравнения (3) и (4), то получим уравнение

$$5x = 10 \tag{5}$$

с решением $x = 2$.

Будет ли уравнение (5) эквивалентно системе (3) – (4)? Формального соответствия приведенному нами определению эквивалентных систем здесь нет: множество решений уравнения (5) уже множества решений системы (3) – (4), поскольку решение $y = 1$ исчезло (при этом уравнение (5) можно, разумеется, рассматривать как систему, состоящую из одного уравнения). Однако по отношению к переменной x система (3) – (4) и уравнение (5) эквивалентны и подобные преобразования полезны. Они используются, например, в известном классическом методе Гаусса решения систем линейных уравнений.

Поэтому полезно ввести для подобных преобразований название и определение.

Назовем эквивалентными по отношению к интересующим нас решениям преобразования, которые сохраняют неизменными эти решения (но не обязательно сохраняют решения, не интересующие нас). Примером может служить преобразование системы (3) – (4) в уравнение (5). Это преобразование эквивалентно в отношении переменной x, но не в отношении переменной y.

Используют также преобразования, не изменяющие решений исходного уравнения, но вводящие новые решения, которые исходному уравнению не удовлетворяют. Пример: в уравнении

$$\sqrt{6-x}=x \tag{6}$$

можно левую и правую часть умножить на равные величины – левую на $\sqrt{6-x}$, правую – на x (поскольку x = 0 решением не является). Придем к уравнению

$$6-x=x^2, \tag{7},$$

имеющему два решения: x_1 = 2; x_2 = –3. Проверка показывает, что x = 2 является решением исходного уравнения (6), а x = –3 решением не является.

Подобные преобразования, добавляющие новые решения, не удовлетворяют определению эквивалентного преобразования, но они полезны и широко используются. Действительно, какие бы преобразования мы не использовали, полученные решения все равно надо проверять подстановкой в исходное уравнение; при этом лишние решения будут отсеяны.

Преобразованные уравнения, содержащие лишние решения, лишние корни, было предложено называть «следствиями» исходных уравнений. Термин «следствие» используется, например, в известном пробном учебнике по алгебре для 10 – 11 классов средней школы [8]. Однако термин «следствие» еще не общепринят. Мы будем пользоваться термином «не полностью эквивалентное преобразование», определив его как преобразование, которое становится эквивалентным после исключения лишних решений (т. е. решений, не удовлетворяющих исходному уравнению или системе уравнений). Такие преобразования широко используются при вычислениях и являются вполне законным средством исследования.

§2. Преобразования, связанные с дифференцированием

Еще одним примером того, насколько важны в математике точные определения, является дискуссия, возникшая после выхода в свет в 1999 году первого издания книги [4]. В ней указывалось, что при преобразованиях, связанных с дифференцированием, необходимо учитывать дополнительные начальные условия (заметим, кстати, что преобразованиями, связанными с дифференцированием, пользовался еще Л. Эйлер (*L. Euler*, 1707 – 1783).

Действительно, если мы рассматриваем, например, уравнение первого порядка:

$$\dot{x} + x = 0 \tag{8}$$

с начальным условием $x(0) = 0$, то это уравнение имеет, как легко проверить, единственное решение $x(t) = 0$. Если мы продифференцируем все члены уравнения (8), то оно преобразуется в уравнение второго порядка:

$$\ddot{x} + \dot{x} = 0. \tag{9}$$

Для того, чтобы решение уравнения второго порядка стало вполне определенной функцией, уравнение надо дополнить вторым начальным условием, условием для первой производной в точке $t = 0$. Однако это второе начальное условие не произвольно, оно полностью следует из решения $x(t)$ исходного уравнения первого порядка. Действительно, из решения $x(t) = 0$ уравнения (8) следует, что при $t = 0$ будет $\dot{x}(0) = 0$. Именно это второе (и единственно правильное) начальное условие следует добавить к преобразованному уравнению (9). С учетом условий $x(0) = 0$ и $\dot{x}(0) = 0$ решением уравнения (9) будет функция $x(t) = 0$ и почленное дифференцирование станет, как и должно быть, эквивалентным преобразованием.

Некоторые математики возражали против признания почленного дифференцирования эквивалентным преобразованием, ссылаясь на то, что уравнение (8) имеет «общее решение»

$$x = C_1 e^{-t}, \tag{10}$$

а уравнение (9) имеет «общее решение»

$$x = C_1 e^{-t} + C_2. \tag{11}$$

Из несовпадений «общих решений» (10) и (11) некоторыми математиками делался ошибочный вывод о том, что почленное дифференцирование не является эквивалентным преобразованием. Источником ошибок явилась неточность в названиях и определениях: сложившийся еще в XVIII веке и с тех пор традиционно использующийся термин «общее решение дифференциального уравнения» неточен: «общие решения», включающие в себя постоянные интегрирования C_1; C_2; …; C_n более правильно следует называть «семействами решений», поскольку еще начиная с О. Коши (*Cauchy*, 1789 – 1857) под решением дифференциального уравнения понимают конкретную функцию $x(t)$, определяемую как самим дифференциальным уравнением, так и начальными (или граничными) условиями.

Лучший путь к избежанию ошибок и недоразумений – это использование точных и однозначных определений.

Заметим, что линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами удобно записывать в виде произведения искомой функции на операторный полином (полином, в котором роль переменной играет оператор дифференцирования $D = \frac{d}{dt}$). Так, например уравнение

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = \sin t \tag{12}$$

удобно записать в виде

$$(D^2 + 2D + 5)x = \sin t\,. \tag{13}$$

Комбинируя почленное дифференцирование всех членов уравнения с такими эквивалентными преобразованиями, как умножение всех членов на число не равное нулю и прибавление к левым и правым частям равных величин, нетрудно доказать, что не только почленное дифференцирование, но и умножение левой и правой части уравнения на любой операторный полином вида

$$a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0 \tag{14}$$

при правильном назначении дополнительных начальных условий, является эквивалентным преобразованием.

Так, например, если уравнение (8), которое удобно записать в виде

$$(D+1)x = 0 \tag{15}$$

почленно дифференцировать и привести его к виду (9), а затем сложить (9) с исходным уравнением (8) (сложить, разумеется, отдельно левые и правые части), то мы придем к уравнению

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0\,, \tag{16}$$

которое удобно записать в виде

$$(D+1)(D+1)x = 0 \tag{17}$$

- т. е. как результат умножения исходного уравнения (8) на операторный полином (D + 1). При единственно правильном дополнительном втором начальном условии $\dot{x}(0) = 0$ уравнение (17) будет эквивалентно исходному уравнению (8) с начальным условием $x(0) = 0$ и будет иметь одинаковое с исходным уравнением (8) единственное решение $x(t) = 0$.

§3. Неожиданно обнаруженные изменения корректности решений при эквивалентных преобразованиях

Несмотря на то, что в классическом определении эквивалентных (равносильных) преобразований, приведенном в предыдущем разделе, говорится лишь о неизменности самих решений как таковых, но ничего не говорится о сохранении неизменными всех свойств решений при эквивалентных преобразованиях, в математике очень долго сохранялось необоснованное убеждение в том, что «эквивалентные преобразования ничего не меняют». Это убеждение (а по сути дела - предрассудок) неизбежно приводило к ошибкам.

Особенно трагический характер эти ошибки приобрели в 60-х годах XX века при внедрении регуляторов, спроектированных на основе методики «аналитического конструирования», предложенной Александром Михайловичем Лётовым в 1960 году [9]. Эта методика позволяла создавать очень удобные и эффективные регуляторы, и поэтому сразу начала широко использоваться при проектировании систем управления. Первоначальный вариант методики А. М. Лётова требовал использования в регуляторе всех переменных состояния объекта управления, и было доказано и подтверждено на практике, что такие регуляторы обеспечивают устойчивость и достаточные запасы устойчивости, гарантируют хорошую и надежную работу управляемого объекта. На практике очень часто часть переменных не измерима и их заменяли – пользуясь, разумеется, только эквивалентными преобразованиями – на комбинации измеряемых переменных и их производных. Преобразованные регуляторы и системы управления были полностью эквивалентны (в классическом смысле) исходным, не преобразованным системам, но практика их использования показала, что преобразованные системы обладали совсем другими запасами устойчивости, часто теряли устойчивость и приводили к авариям объектов управления. Прокатившаяся волна аварий судов, самолетов и других объектов управления, снабженных регуляторами, построенными на основе методики «аналитического конструирования» подорвала доверие к ней, но даже эта волна аварий не смогла тогда изменить не основанную на фактах, но привычную убежденность математиков в том, что «эквивалентные преобразования ничего не меняют». А способствовало этой необоснованной убежденности то, что в СССР до 1990 года все сведения об авариях и катастрофах были строго засекречены и не подлежали публичному обсуждению.

Поэтому глубинные причины целой серии аварий, происходивших при использовании первоначального варианта методики «аналитического конструирования» так и не были проанализированы. Ограничились тем, что методику «аналитического конструирования» видоизменили, что сразу прекратило массовые аварии, но отдельные аварии, происходившие из-за недоучета изменений запасов устойчивости при эквивалентных преобразованиях, происходили все время.

Перелом в подходе к исследованию эквивалентных преобразований произошел в 1987 году, когда в публикации [10] был поставлен простой вопрос: а что собственно, означает утверждение: «решение какого-либо уравнения – например, уравнения

$$2\dot{x} + 3x = 0 \tag{18}$$

сохраняет устойчивость при малых вариациях его коэффициентов»? Ведь по сути дела в этом утверждении речь идет не о свойствах самого уравнения (18), а о свойствах его окрестности в пространстве коэффициентов. Утверждение о сохранении устойчивости решений уравнения (18) равносильно утверждению об устойчивости решений семейства уравнений:

$$2(1 \pm \varepsilon_1)\dot{x} + 3(1 \pm \varepsilon_2)x = 0 \tag{19}$$

при ε_1 и ε_2 - малых в сравнении с единицей. Данное утверждение справедливо, все решения семейства уравнений (19) – устойчивы.

Но эквивалентные преобразования, сохраняющие неизменными решения, совсем не обязаны сохранять неизменными свойства окрестности того или иного уравнения. Поэтому из факта параметрической устойчивости уравнения (18) совсем не следует автоматически, что этим свойством будет обладать и уравнение

$$2\dot{x} = -3x\,, \tag{20}$$

полученное из (18) эквивалентным преобразованием (напоминаем, что параметрической устойчивостью решения уравнения или системы уравнений называется сохранение устойчивости при вариациях коэффициентов и параметров). Да, при преобразовании конкретного уравнения (18) в конкретное уравнение (20) параметрическая устойчивость сохраняется, но это совсем не означает, что параметрическая устойчивость будет сохраняться всегда, при любых эквивалентных преобразованиях и для всех математических моделей.

В учебном пособии [10] были приведены примеры систем управления, параметрическая устойчивость которых изменялась при эквивалентных преобразованиях, и были описаны усовершенствованные методы расчета, позволяющие обеспечивать хорошие запасы устойчивости и надежную работу систем управления.

Так, например, в [10] на стр. 222 – 230 рассматривался объект управления

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + 0{,}75u + \eta; \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 - x_3 + \eta; \\ \dot{x}_3 &= -x_1 + x_2 + 0{,}5u \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

(где x_1; x_2; x_3 – регулируемые величины, u – управление, η – возмущающее воздействие типа «белого шума») и регулятор

$$u = -0{,}16x_1 + 0{,}36x_2 + 0{,}88x_3\,, \tag{22}$$

обеспечивающий минимум критерия качества

$$J = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T (4x_3^2 + u^2)\,dt\,. \tag{23}$$

Регулятор (22) обеспечивал параметрическую устойчивость и надежную работу системы управления. Однако если переменные x_1и x_2 непосредственно не измеримы, то их необходимо – с помощью эквивалентных преобразований - исключить из уравнений (21) и (22) и тогда регулятор (22) примет вид:

$$u = \frac{0{,}2D^2 + 0{,}56D + 1{,}08}{0{,}1D - 0{,}87}x_3\,. \tag{24}$$

Система уравнений (21) – (24) эквивалентна системе (21) – (22), поэтому обе системы имеют один и тот же характеристический полином, и регулятор (24) будет обеспечивать те же самые переходные процессы и то же самое значение критерия качества (23), что и регулятор (22). Однако запаса устойчивости регулятор (24) обеспечивать не будет. Уже при сколь угодно малых, неизбежных на практике, отклонениях параметров регулятора или объекта управления от расчетных значений может потеряться устойчивость и произойти авария. В учебном пособии [10] было подробно рассказано о методах обеспечения запасов устойчивости оптимальных систем управления за счет малых изменений аналитической аппроксимации спектральной плотности мощности возмущающих воздействий.

Дальнейшие исследования показали, что при эквивалентных преобразованиях помимо параметрической устойчивости может изменяться корректность решений преобразуемой системы. Частными случаями изменения корректности являются: 1. изменение параметрической устойчивости, 2. изменение непрерывной зависимости решений от коэффициентов и параметров.

В 1999 году (в первом издании книги [4]), было предложено разделить эквивалентные преобразования на два класса:

1. преобразования, эквивалентные в классическом смысле;

2. преобразования, эквивалентные в расширенном смысле.

Преобразования, эквивалентные в классическом смысле – это те, которые (согласно классическому определению) сохраняют неизменными решения преобразуемой системы. Преобразования, эквивалентные в расширенном смысле – это те, которые:

- во-первых – эквивалентны в классическом смысле;

- во-вторых – не изменяют корректности решений преобразуемой системы.

Пример преобразования системы (24) – (25) из первой главы в систему (31) и пример преобразования регулятора (22) в регулятор (24) в настоящей главе являются примерами преобразований, эквивалентных в классическом смысле, но не в расширенном.

Заметим сразу, что большинство преобразований, эквивалентных в классическом смысле, эквивалентны и в расширенном. Примеры преобразований, эквивалентных в классическом смысле, но не в расширенном, встречаются редко, поэтому и были открыты так поздно, но они важны, поскольку каждая неожиданная встреча с с преобразованием, не эквивалентным в расширенном смысле, может стать причиной аварии и даже катастрофы.

Первоначально казалось, что исследование свойств преобразований, не эквивалентных в расширенном смысле, позволит выделять их и тем самым обеспечить надежность вычислений. Дальнейшее исследование показало, что все сложней, и решение проблемы надежности и достоверности компьютерных вычислений пришлось искать на пути исследования так называемых «триад», о которых будет рассказано в последующих главах (а ранее необходимость использования «триад» была обоснована в публикациях [4, 11].

Отметим еще, что при эквивалентных преобразованиях часто изменяется обусловленность решения. Простой пример: система уравнений

$$101x + y = 102; \tag{25}$$

$$100x + y = 101 \tag{26}$$

имеет решение $x = 1$, $y = 1$, но это решение очень плохо обусловлено: достаточно коэффициенту при x в уравнении (26) измениться всего на 0,5% и решение изменится коренным образом. Действительно, как легко проверить, система

$$101x + y = 102; \tag{27}$$

$$100(1 + 0{,}005)x + y = 101 \tag{28}$$

имеет решение $x = 2$, $y = –100$, совершенно не похожее на решение системы (25) – (26). Систему (25) – (26) легко решить, используя эквивалентные преобразования: достаточно из левой части уравнения (25) вычесть уравнение (26) и получившееся уравнение $x = 1$ дополнить уравнением (26) – одним из исходных. Получим систему:

$$x = 1; \tag{29}$$

$$100x + y = 101 \tag{30}$$

эквивалентную исходной, имеющую то же решение $x = 1$, $y = 1$, которое находится безо всякого труда. Но зависимость решений от вариаций коэффициентов в системе (29)-(30) уже совсем другая, чем в исходной системе. Плохую обусловленность решения $x = 1$, $y = 1$ исходной системы (25) – (26) можно теперь не увидеть.

Вывод: помимо изменения корректности решений, их параметрической устойчивости, эквивалентные преобразования могут изменять обусловленность решений, могут превращать задачи плохо обусловленные в хорошо обусловленные и наоборот.

§4. Изменения обусловленности решений систем линейных алгебраических уравнений при эквивалентных преобразованиях

Показанное на простейшем примере системы (25)-(26) изменение обусловленности решения системы линейных алгебраических уравнений при простейших эквивалентных преобразованиях не случайно и носит систематический характер. Оно серьезно влияет на надежность вычислений.

Рассмотрим систему:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y = b_1; \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Каждое из уравнений системы (31) является уравнением прямой линии на плоскости с координатными осями $0x$ и $0y$, а решение системы (31) дает координаты точки их пересечения. Как известно из аналитической геометрии, угол φ между прямыми системы (31) выражается формулой:

$$tg\varphi = \frac{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}{a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22}}. \tag{32}$$

Чем меньше угол φ, тем хуже обусловленность решения, тем больше оно изменяется при малых изменениях коэффициентов уравнений.

Рассмотрим частный случай системы (31) при $a_{11} = 1 + \varepsilon$, $a_{12} = a_{21} = a_{22} = 1$, то есть рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} (1+\varepsilon)x + y = b_1; \\ x + y = b_2, \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

имеющую решение:

$$x = \frac{b_1 - b_2}{\varepsilon};\ y = b_2 - \frac{b_1 - b_2}{\varepsilon}. \tag{34}$$

Каждое из уравнений системы (33) представляет прямую линию и тангенс угла φ между ними равен:

$$tg\varphi = \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}. \qquad (35)$$

При малых ε угол между прямыми является малым.

Если над первым из уравнений (33) произвести простейшее, безусловно, эквивалентное преобразование – вычесть из его левой и правой части равные величины $(x + y)$ и b_2, то система (33) примет вид:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon x + 0\cdot y = b_1 - b_2;\\ x + y = b_2, \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

которая решается проще, чем исходная система и имеет те же решения (34). Уравнения системы (36) также являются уравнениями прямых, но тангенс угла φ_1 между ними совсем другой:

$$tg\varphi_1 = 1 \qquad (37)$$

и не зависит от ε.

Система (33) при малых ε плохо обусловлена, имеет плохо обусловленные решения. Формулы (34) сразу показывают, что если, например, ε = 0,01, то изменение коэффициента 1 + ε при x в первом из уравнений (33) всего на 0,5% сразу приводит к изменению решения x вдвое.

Но ничего этого нельзя увидеть из преобразованной (и эквивалентной системе (33)) системы (36). Решения системы (36) не являются плохо обусловленными, они мало изменяются при малых (относительных) изменениях коэффициентов своей системы.

Таким образом, изменение обусловленности решений при эквивалентных преобразованиях систем линейных алгебраических уравнений является не исключением, а правилом. В предельном случае, когда, например, в системе (33) величина ε является сколь-угодно малой, при эквивалентных преобразованиях может измениться корректность решения, но чаще изменяется именно обусловленность решения, т. е. степень влияния на него малых конечных изменений коэффициентов системы уравнений.

Рассмотрим теперь, в какой мере влияет описанное явление на надежность вычисления больших систем линейных алгебраических уравнений вида

$$
\left.\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1;\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2;\\
&...\\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n.
\end{aligned}\right\} \qquad (38)
$$

С необходимостью отыскания решений подобных систем (т. е. значений x_1, x_2, …, x_n, обращающих уравнения в тождества) приходится встречаться в очень многих областях приложений.

Наиболее рекомендуемым и широко используемым методом решения систем вида (38) является метод Гаусса, заключающийся в последовательном исключении переменных путем эквивалентных преобразований. Конкретно, все члены первого из уравнений (38) умножают на на a_{21}, а все члены второго уравнения – на a_{11}. Получают два новых уравнения с равными коэффициентами при x_1:

$$
a_{11}a_{21}x_1 + a_{12}a_{21}x_2 + ... + a_{1n}a_{21}x_n = b_1a_{21}; \qquad (39)
$$

$$
a_{21}a_{11}x_1 + a_{22}a_{11}x_2 + ... + a_{2n}a_{11}x_n = b_2a_{11}. \qquad (40)
$$

Теперь достаточно вычесть из уравнения (39) уравнение (40) – что также является эквивалентным преобразованием – и будет получено уравнение, содержащее n – 1 переменных – от x_2 до x_n. Повторив те же операции исключения x_1 из второго и третьего уравнений системы (38), затем – из третьего и четвертого придем, в конечном счете, к системе из n – 1 уравнений с n – 1 переменными.

Повторяя процесс исключения далее, придем на предпоследнем шаге процесса к системе

$$
\left.\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n &= b_1;\\
\alpha_{11}x_2 + \alpha_{12}x_3 + ... + \alpha_{1n}x_n &= \beta_1;\\
....&\\
\alpha_{n-1;n}x_{n-1} + \alpha_{n-1;2}x_n &= \beta_{n-1};\\
\alpha_{n;1}x_{n-1} + \alpha_{n;2}x_n &= \beta_n.
\end{aligned}\right\} \qquad (41)
$$

Теперь остается последний, самый простой шаг: из двух последних уравнений системы (41) достаточно исключить переменную x_{n-1} и получится «треугольная» система

$$\left.\begin{array}{r}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1;\\ \alpha_{11}x_2 + \alpha_{12}x_3 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_{n-1;n}x_{n-1} + \alpha_{n-1;2}x_n = \beta_{n-1};\\ \gamma_1 x_n = \gamma_2,\end{array}\right\} \qquad (42)$$

с помощью которой легко вычисляются все решения: из последнего уравнения находим $x_n = \gamma_2 / \gamma_1$; подставляя это значение в предпоследнее уравнение находим $x_{n\text{-}1}$ и далее, по порядку, легко находим все решения, плоть до x_1. На первый взгляд все хорошо. Но уже пример системы (33), преобразованной в эквивалентную ей систему (36), показывает, что даже простейший последний шаг в методе Гаусса вычисления решений системы (38) может коренным образом изменить степень обусловленности решений. Понятно, что могут изменить обусловленность и любые предыдущие шаги метода Гаусса.

Вывод: метод Гаусса вычисления решений линейной системы алгебраических уравнений ничего не говорит об обусловленности решений, не позволяет оценить – в какой мере малые погрешности в задании коэффициентов системы (38) повлияют на погрешность ее решений.

Поэтому для решения прикладных технических, экономических и других задач, в которых малые погрешности в задании коэффициентов неизбежны, метод Гаусса не пригоден и не может быть рекомендован.

Для обеспечения надежности вычислений следует использовать формулы Крамера:

$$x_k = \frac{D_k}{D}, \qquad (43)$$

где D – определитель системы (38):

$$D = \det\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{vmatrix}, \qquad (44)$$

а D_k – это определитель, получающийся из D заменой k-го столбца на столбец свободных членов $b_1, b_2, \ldots, b_n$ из системы (38).

Достоинство формул Крамера состоит в том, что они позволяют оценить погрешность решений x_1, x_2, …, x_n через погрешность коэффициентов системы (38). Для этого достаточно предварительно оценить погрешности определителей, входящих в формулы (43).

§5. Оценка погрешностей вычисления определителей и решений систем алгебраических уравнений

Рассмотрим определитель второго порядка, в котором все члены известны лишь с точностью до ±ε. Такой определитель имеет вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11} \pm \varepsilon a_{11} & a_{12} \pm \varepsilon a_{12} \\ a_{21} \pm \varepsilon a_{21} & a_{22} \pm \varepsilon a_{22} \end{vmatrix}. \tag{45}$$

В определителе (45) величины a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} – это номинальные значения его членов, принятые в расчете, ε – числа, малые в сравнении с единицей; знак этих чисел неизвестен, он может быть и положительным и отрицательным. Про истинные, не известные нам, величины членов определителя можно лишь указать интервал, в котором они находятся.

Так, например,

$$a_{11} - \varepsilon a_{11} \le \bar{a}_{11} \le a_{11} + \varepsilon a_{11}, \tag{46}$$

где $\bar{a}_{11}$ - не известное нам истинное значение данного члена определителя, а a_{11} – его номинальное значение, принятое для расчета.

Номинальное значение всего определителя будет, как известно равно:

$$\det_{\text{ном}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{47}$$

Теперь установим интервал, внутри которого будет находиться истинное значение определителя (45) при учете неравенств (46). Развертывая определитель (45) и пренебрегая квадратами малых чисел ε, получим с точностью до линейных по ε членов:

$$\begin{vmatrix} a_{11} \pm \varepsilon a_{11} & a_{12} \pm \varepsilon a_{12} \\ a_{21} \pm \varepsilon a_{21} & a_{22} \pm \varepsilon a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \pm \varepsilon a_{11}a_{22} \pm \varepsilon a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \mp \varepsilon a_{12}a_{21} \mp \varepsilon a_{12}a_{21}. \tag{46}$$

Теперь надо учесть, что неизвестные нам знаки погрешностей $\pm\varepsilon$ могут комбинироваться так, что все члены, содержащие ε, могут оказаться либо все положительными, либо все отрицательными.

С учетом этого, имеем:

$$\det_{\text{ном}} - 2\varepsilon\det_{\text{мод}} \le \overline{\det} \le \det_{\text{ном}} + 2\varepsilon\det_{\text{мод}}, \tag{49}$$

где $\overline{\det}$ - это истинное, не известное нам, значение определителя (45), а

$$\det_{\text{мод}} = |a_{11}|\cdot|a_{22}| + |a_{12}|\cdot|a_{21}| = |a_{11}a_{22}| + |a_{12}a_{21}|. \tag{50}$$

Величину $\det_{\text{мод}}$ мы будем называть «модульным определителем». Из соотношения (50) видно, что «модульный определитель» (50) вычисляется по формуле для вычисления номинального значения определителя, по формуле (47), но каждый член формулы (47) заменяется на его модуль (абсолютное значение) и между произведениями всегда стоит знак плюс, а не минус.

Формула (49) дает величину интервала, внутри которого заключено истинное (не известное нам) значение $\overline{\det}$ определителя (45).

Относительная погрешность вычисления определителя второго порядка не будет превышать величины:

$$\varepsilon_{\det 2} = \pm 2\varepsilon\frac{\det_{\text{мод}}}{\det_{\text{ном}}}. \tag{51}$$

Поскольку, как легко видеть, $\det_{\text{мод}}$ при тех же членах a_{ij} может быть много больше, чем $\det_{\text{ном}}$, то даже при малых ε, при малых погрешностях членов, погрешность определителя может быть велика.

Формула (51) может быть обобщена на определители более высоких порядков. Так, определитель третьего порядка, состоит, как известно, из шести произведений его членов, взятых по три:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{32}. \tag{52}$$

Отсюда следует, что если истинное значение каждого из членов заключено в пределах, очерченных неравенством (46), то истинное значение ($\overline{\det}$)

определителя (52) будет (с точностью до членов первого порядка малости) заключено в пределах:

$$\det_{\text{ном}} - 3\varepsilon\det_{\text{мод}} \le \overline{\det} \le \det_{\text{ном}} + 3\varepsilon\det_{\text{мод}}, \tag{53}$$

где $\det_{\text{ном}}$ - номинальное значение определителя, вычисляемое по формуле (52), а

$$\det_{\text{мод}} = |a_{11}a_{22}a_{33}| + |a_{12}a_{23}a_{31}| + |a_{13}a_{21}a_{32}| + |a_{13}a_{22}a_{31}| + |a_{11}a_{23}a_{32}| + |a_{12}a_{21}a_{33}|. \tag{54}$$

Формула (54) показывает, что $\det_{\text{мод}}$ (читается как «определитель модульный») вычисляется аналогично обычному определителю, $\det_{\text{ном}}$, то только вместо каждого из тройных произведений берется его абсолютное значение (модуль) и все модули только складываются! (знаков «минус» в формуле (54) нет).

Формула (53) может быть обобщена и на определители произвольного n-го порядка. Истинное значение $\overline{\det}$ определителя n-го порядка с точностью до членов первого порядка малости по переменной ε будет заключено в пределах:

$$\det_{\text{ном}} - n\varepsilon\det_{\text{мод}} \le \overline{\det}_n \le \det_{\text{ном}} + n\varepsilon\det_{\text{мод}} \tag{55}$$

и при вычислении $\det_{\text{мод}}$ следует (как и в формуле (54)) все произведения членов определителя (а в определителе n-го порядка каждое произведение состоит из n членов) заменить на их абсолютные величины, на их модули, и перед каждым произведением ставить только знак «плюс».

Относительная погрешность вычисления определителя n-го порядка, для каждого из членов которого справедливо соотношение (46), не будет превышать величины

$$\varepsilon_{\det n} = \pm n\varepsilon\frac{\det_{\text{мод}}}{\det_{\text{ном}}}. \tag{56}$$

Располагая формулой (56) уже нетрудно оценить погрешности решения систем линейных алгебраических уравнений (38).

Для этого нужно воспользоваться формулами Крамера (43) и по формуле (56) оценить погрешность общего определителя системы D (вычисляемого по формуле (44)), и определителя D_k конкретного решения x_k, стоящего в числителе формулы Крамера: $x_k = \dfrac{D_k}{D}$.

Формулы (55) и (56) позволяют перейти от общих рассуждений о хорошо и плохо обусловленных системах к конкретной оценке погрешности системы и оценке интервала, внутри которого находятся истинные значения определителей и решений системы (38).

Относительно формул (55) и (56) нужно сделать следующее важное замечание: при выводе оценки (56) и вычислении определителя $\det_{\text{мод}}$ в расчет закладывалось наиболее неблагоприятное сочетание знаков элементов определителя a_{ji} и погрешностей $\pm\varepsilon$ – закладывалось такое сочетание знаков, при котором все произведения, входящие в $\det_{\text{мод}}$ оказывались положительными. Поскольку знак погрешностей в неравенствах вида (46) не определен, то такое сочетание знаков возможно, но мало вероятно. Поэтому оценка (56) является «оценкой сверху». Чаще всего реальная относительная погрешность определителя (56), а значит и реальные погрешности вычисления решений x_1, x_2, …, x_n системы линейных алгебраических уравнений (38) будут много меньше оценок, вытекающих из формулы (56).

Заметим, что для ряда конкретных систем уравнений можно указать такие комбинации знаков коэффициентов системы и их погрешностей, которые заведомо встретиться не могут. В этом случае оценка (56) может быть заменена на более точную. Но более точная оценка требует исследования свойств коэффициентов конкретной системы. Если такого исследования не проводить, то можно довольствоваться простой оценкой погрешности (56), но следует помнить, что она является «оценкой сверху» и поэтому может быть оценкой чрезмерно пессимистической. Зато если величина $\varepsilon_{\det\, n}$, вычисленная по формуле (56) оказалась малой, то это означает, что для данного определителя погрешности элементов мало влияют на его величину и результат вычисления надежен.

Отметим теперь, что в ходе эксплуатации того или иного технического объекта его параметры, а значит и коэффициенты системы(38) – если эта система является математической моделью либо самого объекта, либо его свойств – могут «плавать» внутри интервала (46) , и поэтому погрешности ε каждого коэффициента системы (38) часто могут изменяться и по величине, и по знаку.

Но это означает – к сожалению – что даже длительная безупречная работа любого исследуемого объекта не гарантирует того, что в самый неожиданный момент времени с ним не произойдет описанная авария.

Дело в том, что длительная безупречная работа объекта означает всего лишь, что долгое время сочетание знаков отклонения реальных параметров от номинальных оказывались таким, что оценка (56) выполнялась с большим запасом, и только поэтому все было хорошо. Однако, как уже говорилось, величина погрешности, близкая к оценке (56) все же возможна и в самый неожиданный момент может реализоваться и привести к аварии. Поэтому для гарантии отсутствия аварий нужно, прежде всего, ориентироваться на хороший, правильный расчет. Если при погрешности, близкой к оценке (56), аварийных явлений не возникает, то только тогда можно быть уверенным, что в ходе эксплуатации аварий не будет. А длительная безупречная работа объекта – по причинам, только что изложенным – к сожалению, ничего не гарантирует.

Данное обстоятельство лишний раз подчеркивает важность хорошего расчета. Да, эксперимент в практических делах важен, очень важен. И все же бывают обстоятельства, когда даже длительный эксперимент, или длительное наблюдение над исправно работающим объектом ничего не гарантируют, и необходимым условием предотвращения аварий является хороший расчет, надежный расчет.

При этом надо отметить, что до последнего времени уделялось слишком мало внимания проблеме обеспечения надежности расчетов при неизбежных на практике погрешностях в задании исходных данных для расчета, при неизбежных малых изменениях исходных данных расчета в ходе эксплуатации проектируемого объекта.

Такое важное явление как возможность очень больших изменений чувствительности результатов расчета к малым погрешностям исходных данных при эквивалентных преобразованиях вообще было открыто лишь в самом конце XX века (публикации [2, 3, 4]). А поскольку эквивалентные преобразования применяются очень широко, повсеместно (вряд ли можно найти серьезный расчет, в котором бы они не применялись), то открытие новых свойств эквивалентных преобразований не могло не потребовать пересмотра и совершенствования многих методов расчета.

Так, например, в строительной механике для расчета статически неопределимых систем, рекомендуют составить систему уравнений, коэффициенты которых известны лишь с неизбежными погрешностями и могут немного изменяться в ходе эксплуатации объекта. При решении этой системы обычным методом Гаусса нельзя учесть – как уже было показано – влияние погрешностей исходных данных на точность вычисления усилий и напряжений. Даже расчет «с запасом» может не помочь делу, поскольку погрешность решения – как было продемонстрировано в ходе предыдущего изложения – может оказаться в некоторых случаях больше любого коэффициента запаса.

Для предотвращения аварий нужно использовать изложенные на предыдущих страницах усовершенствованные методы расчета, учитывающие недавно открытые новые свойства эквивалентных преобразований.

Пример.

Рассмотрим простую систему:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1; \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3. \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Система легко решается и решениями являются $x_1 = -1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$. Если – как это очень часто бывает – все коэффициенты известны с точностью до одной сотой (т. е. $\varepsilon = 0{,}01$), то какова точность решений?

Для ответа на этот вопрос воспользуемся формулами Крамера (43) и оценкой погрешности (56).

Для системы (57) ее определитель D равен:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 1 + 2 - 1 - 4 - 1 = -1, \tag{58}$$

а модульный определитель, $\det_{\text{мод}}$, равен:

$$\det_{\text{мод}} = 2 + 1 + 2 + 1 + 4 + 1 = 11. \tag{59}$$

Таким образом, погрешность вычисления определителя D равна:

$$3 \cdot 0{,}01 \cdot \frac{11}{-1} == -0{,}33. \tag{60}$$

Определитель D_1 равен:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 + 4 - 3 - 2 - 2 = 1. \tag{61}$$

Модульный определитель, соответствующий определителю D_1, равен:

$$\det_{\text{мод}} = 1 + 3 + 4 + 3 + 2 + 2 = 15, \qquad (62)$$

а погрешность его вычисления равна:

$$\varepsilon_{D_1} = 3 \cdot 0{,}01 \cdot \frac{15}{1} = 0{,}45. \qquad (63)$$

Таким образом, решение x_1 равно:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{1}{-1} = -1, \qquad (64)$$

а его погрешность (как погрешность частного) равна сумме абсолютных величин погрешностей D_1 и D, т. е. равна

$$\varepsilon_{x_1} = 0{,}33 + 0{,}45 = 0{,}78. \qquad (65)$$

Аналогично для решений x_2 и x_3 находим:

$$\varepsilon_{x_2} = 0{,}33 + 0{,}51 = 0{,}844; \varepsilon_{x_3} = 0{,}33 + 0{,}66 = 0{,}99. \qquad (66)$$

Таким образом, хотя система (57) совсем простая и ее даже трудно отнести к плохо обусловленным (поскольку определитель системы $D = -1$ имеет тот же порядок, что и коэффициенты системы), но погрешность ее решений (при неблагоприятном, редком, но возможном сочетании погрешностей различных коэффициентов уравнений) может быть велика. Напомним, что вероятность неблагоприятного сочетания знаков погрешностей различных коэффициентов системы уравнений мала, но все же в общем случае отлична от нуля и при расчете возможности аварий должна учитываться. Разумеется, возможны и такие случаи, когда наиболее неблагоприятное сочетание знаков погрешностей реализоваться не может – но невозможность такого сочетания нужно доказать.

Заметим, что погрешности решений систем алгебраических уравнений часто оценивались через «числа обусловленности» ([19], стр. 128), но оценка через модульные определители выполняется много проще.

Пример оценки погрешности решений через модульные определители приведен в главе шестой (пример 11).

Глава 4. Выявленные недостатки в традиционных методах вычислений и пути их исправления

§1. Недостатки традиционных методов расчета параметрической устойчивости линейных систем

После обнаружения преобразований, эквивалентных в классическом смысле, но не в расширенном, были быстро выявлены недостатки во многих традиционных методах вычислений. В данной главе будет рассказано об этих недостатках, о разработанных к настоящему времени методах устранения этих недостатков и обеспечения тем самым надежности результатов вычислений и, особенно, компьютерных вычислений.

Первыми были обнаружены недостатки в традиционных методах расчета устойчивости и параметрической устойчивости (т. е. сохранения устойчивости при вариациях коэффициентов и параметров), а также в методах расчета запасов устойчивости для линейных систем с постоянными коэффициентами.

Традиционно устойчивость таких систем, математическими моделями которых являются системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, определялась на основе исследования корней характеристического полинома системы. Если у этого полинома все корни имели отрицательные вещественные части и тем самым лежали на комплексной плоскости левее мнимой оси, то система считалась устойчивой и параметрически устойчивой – т. е. сохраняющей устойчивость, по крайней мере, при сколь угодно малых вариациях коэффициентов и параметров. Для доказательства использовали известную теорему о непрерывной зависимости положения корней на комплексной плоскости от коэффициентов полинома; казалось очевидным, что сколь угодно малые вариации коэффициентов не могут «перебросить» корни характеристического полинома из левой полуплоскости в правую.

Пример: пусть объект управления описывается уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -3x_1 - x_3 + 2u; \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 + u; \\ \dot{x}_3 &= -x_1 - 2x_2 - x_3 + u \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

(где x_1, x_2, x_3 – регулируемые переменные, u – управление) и замкнут регулятором вида

$$u = -x_1 - x_2 - x_3 . \qquad (2)$$

Процессы в замкнутой системе описываются системой из четырех уравнений с четырьмя переменными – x_1, x_2, x_3 и переменной u, которую можно рассматривать как x_4; характеристический полином системы (1) – (2) будет равен определителю:

$$\det = \begin{vmatrix} \lambda+3 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & \lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2 & \lambda+1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 8\lambda^2 + 2\lambda + 8\,, \qquad (3)$$

имеющему корни: $\lambda_1 = -7{,}87$; $\lambda_{2,\,3} = -0{,}055 \pm j$.

Поскольку все корни имеют отрицательные вещественные части, то на этом основании делался вывод об устойчивости и параметрической устойчивости системы (1) – (2).

Определитель составляется по простому правилу: в уравнениях исследуемой системы оператор дифференцирования заменяется традиционно на букву λ (но можно заменить ее и любой другой буквой) в первый столбец определителя вписываются все коэффициенты при первой переменной, при x_1, во второй столбец – коэффициенты при x_2 и т. д., причем в первую строку вписываются коэффициенты из первого уравнения системы, во вторую – из второго и так далее. Определитель вычисляется по обычным правилам.

Поскольку в те времена, когда не было быстродействующих вычислительных машин, вычисление корней полиномов высоких степеней было трудоемким делом, то еще 1899 году немецкий математик А. Гурвиц (*Hurwitz*, 1859 – 1919) предложил метод суждения о знаках вещественных частей корней по коэффициентам полинома, не вычисляя самих корней.

Если характеристический полином записан в виде:

$$X.\Pi. = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad (4)$$

(для определенности старший член полинома a_n всегда делают положительным, умножая, если это необходимо, все члены полинома на –1), то А. Гурвиц предложил составить из коэффициентов полинома матрицу размера n x n

$$\begin{matrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_0 \end{matrix}, \qquad (5)$$

составленную по простому правилу: на главной диагонали сверху вниз проставляются коэффициенты от a_{n-1} до a_0, а каждый столбец потом дополняется так, чтобы индексы коэффициентов убывали на единицу снизу вверх; если индекс коэффициента оказывается больше n или меньше нуля, то вместо коэффициента проставляется нуль.

А. Гурвиц доказал, что для отрицательности вещественных частей полинома (4) необходимо и достаточно, чтобы были положительны все диагональные определители матрицы (5). В честь А. Гурвица полиномы, у которых вещественные части корней отрицательны, называют гурвицевыми полиномами.

Широко используется и более простое необходимое условие, доказанное Стодолой (*Stodola,* 1859 – 1929): для того, чтобы корни полинома (4) имели отрицательные вещественные части необходимо (но не достаточно!), чтобы все коэффициенты полинома были положительны. Наличие среди коэффициентов хотя бы одного отрицательного или нулевого сразу говорит о неустойчивости системы.

Без вычислительной техники вычисление всех диагональных определителей матрицы (5) трудоемко, поэтому еще в тридцатые годы XX века были разработаны вошедшие затем в учебники графические методы проверки гурвицевости характеристических полиномов (метод Найквиста, метод А. В. Михайлова и др.).

Таким образом, методам проверки устойчивости и параметрической устойчивости и в конце XIX века, и в XX веке уделялось очень большое внимание. Но, тем не менее, до 1991 года никто не сомневался в том, что решения любых систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, характеристический полином которых является гурвицевым, обладают параметрической устойчивостью.

В 1991 году, в статье [2] было показано, что это не так – и было показано как раз на примере системы (1) – (2). Если у объекта (1) переменные x_1 и x_2 неизмеримы, то их исключают из уравнений, пользуясь, разумеется, только эквивалентными преобразованиями, и приходят к уравнениям для переменных x_3 и u:

$$(D^3 + 4D^2 + 2D + 4)x_3 = (D^2 - D + 2)u\,; \tag{6}$$

$$(D^2 - 6D + 6)x_3 = (D - 25)u\,. \tag{7}$$

Характеристический полином системы (6) – (7):

$$\det = \begin{vmatrix} \lambda^3 + 4\lambda^2 + 2\lambda + 4 & -(\lambda^2 - \lambda + 2) \\ \lambda^2 - 6\lambda + 6 & -(\lambda - 25) \end{vmatrix} = 14(\lambda^3 + 8\lambda^2 + 2\lambda + 8) \tag{8}$$

имеет те же корни, что и полином (3). Это еще раз подтверждает то, что система уравнений (6) – (7) эквивалентна (в классическом смысле) системе (1) – (2). Решения $x_3(t)$ и $u(t)$ у этих систем одни и те же, но свойства решений – разные. Несмотря на то, что характеристический полином системы (6) – (7) – гурвицев, имеет те же корни с отрицательными вещественными частями $\lambda_1 = -7{,}87$; $\lambda_{2,\,3} = -0{,}055 \pm j$, что и полином (3), но параметрической устойчивостью решений система (6) – (7) не обладает.

Если коэффициент при члене Du в уравнении (7) отклонится от расчетного на сколь угодно малую величину ε, и уравнение (7) примет вид

$$(D^2 - 6D + 6)x_3 = [(1-\varepsilon)D - 25]u\,, \tag{9}$$

то характеристический полином системы (6) – (7) примет вид:

$$\begin{aligned} \det &= \begin{vmatrix} \lambda^3 + 4\lambda^2 + 2\lambda + 4 & -(\lambda^2 - \lambda + 2) \\ \lambda^2 - 6\lambda + 6 & -[(1-\varepsilon)\lambda - 25] \end{vmatrix} = \\ &= -\varepsilon\lambda^4 + (14 - 4\varepsilon)\lambda^3 + (112 - 2\varepsilon)\lambda^2 + (28 - 4\varepsilon)\lambda + 112) \end{aligned} \,. \tag{10}$$

Уже при сколь угодно малых $\varepsilon > 0$ будет нарушено необходимое условие Стодолы и устойчивость исчезнет. Параметрической устойчивостью система (6) – (7) не обладает – несмотря на то, что ее характеристический полином является гурвицевым. Запас устойчивости системы (6) – (7) нулевой. Это означает, что при изготовлении системы управления, математической моделью которой являются уравнения (6) – (7), она может оказаться и неустойчивой и устойчивой, но с очень малыми запасами устойчивости, получившимися только за счет неизбежно малого отклонения параметров изготовленной системы от расчетных значений. А это означает, что при неизбежном малом «дрейфе» параметров в ходе эксплуатации, система может в любой момент времени потерять устойчивость и стать причиной аварии и даже катастрофы. Заметим, что испытания изготовленной системы малых запасов устойчивости выявить не могут. Испытания показывают – устойчива система или нет, но величину запасов устойчивости может установить только расчет.

Таким образом, уже в 1991 году была доказана неполнота традиционных методов расчета параметрической устойчивости и величин запасов устойчивости. Было доказано, что они не всегда, не для всех систем управления дают правильные ответы, а ответы неправильные могут стать – и неизбежно становятся – причинами аварий и катастроф.

Заметим, что регулятор (2) для объекта управления (1) получается при использовании методики «аналитического конструирования» регуляторов, предложенной А. М. Лётовым в 1960 году в публикации [9]. Произведенные расчеты показывают, что при неизмеримости величин x_1 и x_2 методика «аналитического конструирования» неизбежно и систематически приводит к параметрической неустойчивости и авариям объекта управления. Таким образом, в 1991 году была окончательно раскрыта истинная причина аварий, происходивших в 60-х годах XX века при использовании методики, предложенной в 1960 году А. М. Лётовым. В 1991 году в журнал «Автоматика и телемеханика» была послана вторая статья (публикация [3]), где было доказано, что любая методика исследования параметрической устойчивости, использующая информацию только о коэффициентах и корнях характеристического полинома системы, или ее коэффициентах при записи системы в нормальной форме Коши, (или, как говорят, в «пространстве состояний») заведомо не могут гарантировать правильного результата исследования и могут стать причиной аварий и катастроф. Тем самым была доказана серьезная неполнота всех известных к 1991 году методов расчета устойчивости линейных систем.

Ввиду важности и принципиальности результата, содержащегося в статье, она рассматривалась редакционной коллегией журнала более трех лет и лишь после всесторонней проверки была опубликована в 1994 году (публикация [3]). И это неудивительно – ведь речь шла о недостатках методов расчета, используемых в тысячах и тысячах проектно – конструкторских организаций всего мира, и недостатки эти были не мелкими, а очень важными, неизбежно приводящими к авариям и катастрофам. Поэтому редколлегия «Автоматики и телемеханики» рецензировала и обсуждала статью очень долго, и только после всесторонней проверки опубликовала ее.

В 1993 году основные положения статьи докладывались и обсуждались на научном семинаре Института проблем управления Российской Академии наук и были признаны «научным открытием, имеющим большое практическое значение».

Об этом следует упомянуть потому, что с момента публикации [3] прошло более 10 лет, и тем не менее усовершенствованные методы расчета устойчивости, страхующие от аварий и катастроф, применяются пока еще сравнительно редко. Большинство проектно–конструкторских организаций еще не осознали, какие опасности несет с собой некритическое, безоглядное следование традиционным методам расчета, нежелание использовать дополнительные проверки, описанные в публикациях [4; 10; 11], нежелание учесть предупреждения ученых Санкт – Петербургского государственного университета.

Для очень замедленной реакции большинства проектно – конструкторских организаций на предупреждения СПбГУ существуют, конечно, и объективные причины – они будут рассмотрены в главе 5. Но надо отметить, что очень квалифицированные сотрудники Института проблем управления Российской Академии наук еще в 1993 году все поняли, приветствовали эти разработки и признали их «научным открытием, имеющим большое практическое значение».

§2. Причины потери параметрической устойчивости и связанных с нею аварий

Анализ уравнений (6) – (7) и определителя (8) сразу указывает на причину отсутствия параметрической устойчивости. Причиной является взаимное сокращение старших членов определителя (8). Действительно, хорошо известно, что степень характеристического полинома в общем (невырожденном) случае равна сумме порядков дифференциальных уравнений исследуемой линейной системы, и потому характеристический полином системы уравнений (6) – (7) должен быть полиномом четвертой степени, но члены с λ^4 в определителе (8) равны по абсолютной величине и противоположны по знаку. Они взаимно сокращаются, и полином (8) оказывается полиномом третьей степени, что говорит о том, что система (6) – (7) является вырожденной. Но вырождение системы в данном происходит при точном равенстве коэффициентов при λ^4 в определителе (8). Уже при малых вариациях параметров объекта управления или регулятора, взаимного сокращения членов с λ^4 не происходит, а это означает, что реальная, воплощенная в металле, система управления оказывается либо неустойчивой, либо (что гораздо хуже и опаснее) она оказывается устойчивой, но с очень малыми запасами устойчивости. Такая система, как уже говорилось, может в любой момент потерять устойчивость и стать причиной аварий и катастроф.

Рассмотрим теперь причины вырождения системы (6) – (7) и других систем управления. Эти причины могут быть либо случайными (когда коэффициенты случайно оказались такими, что в характеристическом полиноме старший член стал равен нулю), либо закономерными и неизбежными. Отметим, что методика «аналитического конструирования» очень часто, закономерно и неизбежно, приводила к параметрической неустойчивости. Покажем это на примере объектов управления третьего порядка.

Наиболее общей формой записи линейного объекта управления третьего порядка с постоянными коэффициентами является следующая система трех дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1u; \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2u; \\ \dot{x}_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3u, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где x_1, x_2, x_3 – регулируемые переменные, u – управляющее воздействие. Методика «аналитического конструирования» регуляторов (в ее первоначальном виде, предложенном А. М. Лётовым в публикации [9] и последующих статьях) рекомендовала формировать управляющее воздействие в виде линейной комбинации всех регулируемых величин – т. е.

$$u = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3\,, \tag{12}$$

где k_1, k_2, k_3 – коэффициенты усиления, которые выбираются на основе методики, изложенной в [9]. Покажем теперь, что если переменные x_2 и x_3 неизмеримы и их исключают из уравнений (11) – (12) пользуясь, разумеется, только эквивалентными преобразованиями, то в результате обязательно получается система управления, не обладающая параметрической устойчивостью. Действительно, для оставшихся после исключения x_2 и x_3 (методом умножения на операторные двучлены – смотри [4], стр. 108) двух переменных x_1 и u получаем систему из двух уравнений вида:

$$(m_1D^3 + m_2D^2 + m_3D + m_4)x_1 = (m_5D^2 + m_6D + m_7)u\,; \tag{13}$$

$$(m_8D + m_9)u = (m_{10}D^2 + m_{11}D + m_{12})x_1\,, \tag{14}$$

в которой каждый из коэффициентов m_1, m_2, …, m_{12} зависит от коэффициентов a_{11}, a_{12}, …, a_{33}; b_1, b_2, b_3; k_1, k_2, k_3 исходной системы (11) – (12). Так, например, коэффициент m_8 равен

$$m_8 = \frac{b_3(a_{31}k_2 - a_{32}k_1)}{a_{31}(a_{12}a_{31} + a_{22}a_{32}) - a_{32}(a_{11}a_{31} + a_{22}a_{32})}\,, \tag{15}$$

а коэффициент m_{10} равен величине m_8 / b_3.

Характеристический полином системы (13) – (14) будет в общем случае полиномом четвертой степени:

$$n_4\lambda^4 + n_3\lambda^3 + n_2\lambda^2 + n_1\lambda + n_0, \tag{16}$$

но коэффициент n_4 при члене λ^4 будет для всех $b_3 \neq 0$ обращаться в нуль, а это говорит о том (как уже было показано на примере системы (6) – (7)), что для почти любых коэффициентов исходной системы (11) – (12) параметрической устойчивости после исключения двух переменных не будет. (Забегая вперед, заметим, что параметрическая устойчивость или неустойчивость может зависеть еще и от метода исключения переменных; этот более тонкий вопрос рассмотрен в публикации [4], стр. 104-111).

Это объясняет, почему так часто возникали аварии при использовании первоначального варианта методики «аналитического конструирования»: если в объекте управления были доступны для измерения все переменные, то все было хорошо. Но при неизмеримости части переменных происходило «вырождение» преобразованной системы, параметрическая устойчивость исчезала, запасы устойчивости становились очень малыми (и оставались они только за счет малых отклонений реальных параметров от расчетных значений), поэтому аварии, связанные с потерей устойчивости, происходили часто. Потом, когда методику «аналитического конструирования» видоизменили, аварии стали происходить много реже, но не исчезли совсем.

Они происходили, например, при «вырождении» системы, когда ее параметры случайно оказывались такими, что степень характеристического полинома понижалась. Если, например, математической моделью системы управления оказывались уравнения (13) – (14), т. е. система из двух уравнений – одно третьего порядка и одно первого, то характеристический полином должен быть в этом случае полиномом четвертой степени – полиномом вида (16), где коэффициент n_4 при члене λ^4 равен:

$$n_4 = m_8 m_5 - m_1 m_{10}. \tag{17}$$

Если коэффициенты m_1, m_5, m_8, m_{10} оказались таковы, что между ними выполняется соотношение

$$m_8 m_5 = m_1 m_{10}, \tag{18}$$

то характеристический полином делается полиномом третьей степени, полиномом вида

$$n_3\lambda^3 + n_2\lambda^2 + n_1\lambda + n_0, \tag{19}$$

но при любых корнях полинома (19) параметрической устойчивости не будет. Если все корни полинома (19) лежат в левой полуплоскости комплексного переменного, то традиционные методы расчета будут говорить о наличии параметрической устойчивости, а на самом деле ее не будет. При использовании первоначального варианта методики «аналитического конструирования» и исключении части переменных вырождение характеристического полинома происходило систематически (так, для объекта управления (11) оно происходило при всех a_{11}, a_{12}, …, a_{33}; b_1, b_2 и $b_3 \neq 0$), поэтому ошибки в оценке устойчивости (и связанные с ними аварии) происходили очень часто. Во всех других случаях вырождение происходит много реже (поскольку для вырождения системы необходимо выполнение равенства $m_8 m_5 = m_1 m_{10}$).

При оптимизации систем управления в 60-х – 70-х годах XX века также происходило немало аварий, связанных с тем, что многие алгоритмы синтеза оптимальных систем управления обеспечивали устойчивость как таковую, но ее сохранения при неизбежных в ходе эксплуатации малых вариациях параметров они не обеспечивали (подробнее об этом будет рассказано в §7). Возникающие аварии задержали широкое практическое применение оптимального управления, потребовали его серьезной модификации, которая обеспечила бы не только устойчивость, но и ее сохранение при вариациях параметров.

Такая модификация была проведена (смотри публикацию [17]) и только после этого систематические аварии прекратились, и началось широкое применение оптимального управления.

После проведенных модификаций «аналитического конструирования» и других методик оптимального управления, можно сказать, что систематических массовых аварий сейчас пока не происходит, но случайное, относительно редкое, сочетание значений коэффициентов математической модели, приводящее к сокращению старших членов, время от времени встречается и приводит к авариям – не очень частым, но опасным. Для предотвращения аварий необходимо – не полагаясь целиком на традиционные методы расчета – дополнительно следить, прежде всего, за вырождением системы и за другими признаками опасности, которые более подробно излагаются в следующем разделе.

§3. Методы обеспечения надежности расчетов устойчивости линейных систем управления

Приведенные в предыдущих разделах примеры показывают, что в расчетах устойчивости решений линейных систем нельзя ограничиваться исследованием только характеристического полинома или матрицы коэффициентов системы, записанной в нормальной форме, то есть в форме n уравнений первого порядка. При эквивалентных преобразованиях, использованных при вычислении характеристического полинома, или эквивалентных преобразованиях, использованных при приведении исходных уравнений системы к нормальной форме, вполне может измениться параметрическая устойчивость системы.

Для предотвращения ошибок надо следить:

1. Не произошло ли вырождения характеристического полинома, не оказалась ли его степень ниже, чем сумма порядков дифференциальных уравнений исследуемой системы. Если такое вырождение произошло, то устойчивость системы может нарушиться уже при сколь угодно малых вариациях параметров системы. Такая система очень опасна, и производящий расчеты ни в коем случае не должен допускать проектируемый объект к «воплощению в металле». Надо рекомендовать изменить параметры проектируемого объекта – изменить так, чтобы вырождения в математической модели объекта не происходило.

2. Надо следить, чтобы в ходе преобразований, использованных при вычислении характеристического полинома, ни один из его коэффициентов не мог изменить своего знака при возможных вариациях коэффициентов и параметров проектируемого объекта. Если такое изменение знака возможно, то это означает, что при вариациях коэффициентов и параметров будет нарушено необходимое условие устойчивости – условие Стодолы – и устойчивость может исчезнуть.

Пример: математической моделью исследуемого объекта является система уравнений:

$$\left.\begin{aligned}(a_1 D + a_2)x_1 + (b_1 D + b_2)x_2 = 0;\\ (a_3 D + a_4)x_1 + (b_3 D + b_4)x_2 = 0,\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

характеристический полином системы

$$(a_1b_3 - a_3b_1)\lambda^2 + (a_2b_3 + a_1b_4 - a_4b_1 - a_3b_2)\lambda + a_2b_4 - b_2a_4 \qquad (21)$$

будет гурвицевым, если все его коэффициенты положительны. Для проверки сохранения устойчивости при вариациях коэффициентов необходимо проверить не только выполнение неравенства

$$a_1b_3 > a_3b_1 \qquad (22)$$

(необходимого условия положительности коэффициента при λ^2), но и выполнение неравенства

$$(a_1 \pm \varepsilon a_1)(b_3 \pm \varepsilon b_3) > (a_3 \pm \varepsilon a_3)(b_1 \pm \varepsilon b_1). \qquad (23)$$

Аналогичные неравенства нужно проверить и в отношении остальных коэффициентов характеристического полинома.

Существенную помощь в проверке параметрической устойчивости оказывают структурные схемы. Так, например, системе управления, математической моделью которой являются уравнения (1) – (2), соответствует структурная схема, показанная на рис. 2, а системе управления, описываемой уравнениями (6) – (7), соответствует структурная схема, показанная на рис. 3.

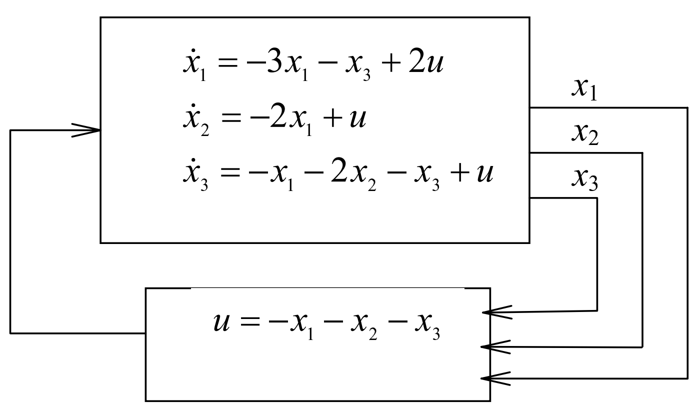


Рисунок 2

‘

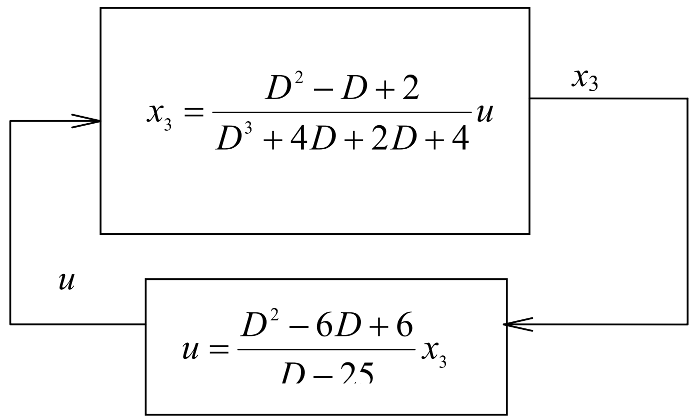


Рисунок 3

Хотя системы уравнений (1) – (2) и (6) – (7) эквивалентны друг другу и получаются одна из другой путем эквивалентных преобразований, различие структурных схем, показанных на рис. 2 и рис. 3, лишний раз напоминает, что «эквивалентность» систем еще не означает, что системы тождественны друг другу. Решения $x_3(t)$ и $u(t)$ у них одинаковы, но параметрическая устойчивость у этих решений совершенно различна.

Заметим, что математики предыдущих веков, дававшие название математическим понятиям, различали понятия «эквивалентность» и «тождественность». Потом эти понятия стали путать, постепенно распространилась необоснованная вера в то, что «эквивалентные преобразования ничего не меняют», и эта вера стала причиной ряда ошибок в расчетах и порожденных этими ошибками аварий.

Для избежания ошибок нужно помнить, что эквивалентные преобразования могут изменять параметрическую устойчивость, а иногда – и простую устойчивость по Ляпунову. Так, например, решения уравнения

$$(D+1)x = 0 \tag{24}$$

имеют вид

$$x(t) = C_1 e^{-t}, \tag{25}$$

где C_1 – постоянная интегрирования, определяемая из начальных условий. Различие между решениями, соответствующими разным начальным условиям, разным постоянным интегрирования, асимптотически убывает с течением времени, что говорит о том, что решения устойчивы и асимптотически устойчивы.

Постоянной интегрирования $C_1 = 0$ соответствует решение $x = 0$. Для этого решения начальными условиями будут $x(0) = 0$ и $\dot{x}(0) = 0$. Если умножить уравнение (24) на операторный полином ($D - 1$), то получится уравнение

$$(D^2 - 1)x = 0, \tag{26}$$

для которого общее решение (а точнее – семейство решений) будет иметь вид:

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{t}. \tag{27}$$

Определяя постоянные интегрирования из прежних начальных условий: $x(0) = 0$ и $\dot{x}(0) = 0$, получим прежнее решение $x(t) = 0$, что еще раз подтверждает, умножение на операторный полином при правильном, соответствующем решению исходной системы, выборе начальных условий является эквивалентным преобразованием, то есть преобразованием, которое не изменяет решений исходного уравнения или исходной системы. Однако решения уравнения (26) неустойчивы. Если начальное условие $\dot{x}(0)$ уравнения (26) изменится по сравнению с исходным $\dot{x}(0) = 0$ даже на сколь угодно малую величину ε, то для новых начальных условий: $x(0) = 0$ и $\dot{x}(0) = \varepsilon$, новое решение уравнения (26) примет вид

$$x(t) = -\frac{\varepsilon}{2} e^{-t} + \frac{\varepsilon}{2} e^{+t} \tag{28}$$

и с течением времени будет все дальше удаляться от решения $x(t) = 0$, соответствующего прежним начальным условиям. Если даже $\varepsilon = 10^{-6}$, то уже при $t = 24$, произведение εe^t превысит 10^4.

Поскольку умножение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами на операторные полиномы довольно широко применяется при решении различных задач, то для избежания ошибок нужно проверять – не изменилась ли при этом устойчивость решений.

В данном случае проверка несложна: если решения преобразованной системы неустойчивы, то это не означает, что решения исходной системы обязательно неустойчивы. Неустойчивость могла появиться от умножения на негурвицев операторный полином. Если преобразованная система устойчива, то это означает, что устойчива и исходная система. Умножение на гурвицев полином устойчивость не меняет. Поэтому при необходимости использования эквивалентных преобразований, связанных с почленным дифференцированием, желательно использовать умножение только на гурвицев полином от оператора дифференцирования $D = \frac{d}{dt}$.

§4. Недостатки традиционных методов расчета устойчивости нелинейных систем. Существование функции Ляпунова не гарантирует устойчивости

Одним из наиболее надежных способов проверки устойчивости систем нелинейных дифференциальных уравнений традиционно считается второй метод Ляпунова, использующий построение так называемой функции Ляпунова. Традиционно считалось, что если для какой - либо системы уравнений функция Ляпунова построена, то нулевое решение системы устойчиво.

К сожалению, это не так. Как будет доказано далее, существование функции Ляпунова не гарантирует реальной устойчивости. Точнее: нулевое решение системы, для которой существует функция Ляпунова, формально всегда устойчиво, но эта устойчивость может исчезнуть при сколь угодно малых – а значит и неизбежных на практике – вариациях параметров. Такая «исчезающая устойчивость» равнозначна неустойчивости. Для обеспечения надежности расчета устойчивости нелинейных систем необходимы дополнительные исследования и проверки.

Изложим очень коротко основные свойства функций Ляпунова, названных так в честь великого русского математика Александра Михайловича Ляпунова (1856 – 1918), который в 1892 году опубликовал новые методы проверки устойчивости (смотри публикации [12], [13]).

Математическими моделями различных исследуемых объектов часто служат системы нелинейных дифференциальных уравнений вида:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, ..., x_n);\\
&\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, ..., x_n);\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, ..., x_n),
\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

где $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – функции аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, в общем случае – нелинейные. Хорошо известно, что соответствующей заменой переменных можно вопрос об устойчивости любого решения системы (29) свести к исследованию нулевого решения: $x_1(t) = x_2(t) = \ldots = x_n(t) = 0$. Устойчивость нулевого решения и будем в дальнейшем исследовать.

Введем в рассмотрение функцию V переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которая равна нулю только тогда, когда все переменные равны нулю и положительна при всех других комбинациях значений переменных. Примером такой функции может служить

$$V = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 . \tag{30}$$

Вычислим теперь полную производную функции V по времени на решениях системы (29). Такую производную, следуя терминологии, принятой в теории устойчивости, называют производной функции V «в силу системы» (29). Для ее вычисления используем известную формулу для полной производной:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2}\cdot\frac{dx_2}{dt} + ... + \frac{\partial V}{\partial x_n}\cdot\frac{dx_n}{dt} \tag{31}$$

и подставим вместо каждой из производных $\frac{dx_i}{dt}$ их значения из системы уравнений (29). Получим для «производной в силу системы» формулу:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\cdot f_1(x_1, x_2, ..., x_n) + \frac{\partial V}{\partial x_2}\cdot f_2(x_1, x_2, ..., x_n) + ... + \frac{\partial V}{\partial x_n}\cdot f_n(x_1, x_2, ..., x_n) . \tag{32}$$

Пусть теперь функция V такова, что производная (32) для всех $x_i \neq 0$ отрицательна. Такую функцию принято называть функцией Ляпунова. В 1892 году А. М. Ляпунов доказал, что если такая функция существует, то нулевое решение системы (29) устойчиво.

Доказательство А. М. Ляпунова допускает наглядную интерпретацию: если на решениях системы производная функции V отрицательна, то функция V с течением времени будет только убывать, стремясь к своему наименьшему значению, равному нулю и достигающемуся при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. А это означает, что все переменные $x_i(t)$ будут при $t \to \infty$ стремиться к нулю, а тем самым и разность между любым решением системы (29) и ее нулевым решением будет при $t \to \infty$ стремиться к нулю, что и доказывает устойчивость нулевого решения.

Простой пример:

Для системы

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1; \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

в качестве функции Ляпунова можно выбрать функцию

$$V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \tag{34}$$

(частный случай квадратичной формы переменных x_1 и x_2). Ее полная производная

$$\frac{dV}{dt} = x_1 \frac{dx_1}{dt} + x_2 \frac{dx_2}{dt} \tag{35}$$

в силу системы (33) приобретает вид:

$$\frac{dV}{dt} = -(x_1^2 + x_2^2) \tag{36}$$

и для любых значений переменных, кроме $x_1 = x_2 = 0$ является отрицательной. Тем самым доказано, что функция (34) действительно является функцией Ляпунова и нулевое решение системы (33) устойчиво.

Для системы (33) устойчивость проверяется непосредственно, поскольку система (33) распадается на два независимых уравнения и легко интегрируется. Ее решения имеет вид: $x_1 = C_1e^{-t}$; $x_2 = C_2e^{-t}$ и сразу видно, что решение $x_1 = x_2 = 0$ безусловно устойчиво, что совпадает с заключением, полученным на основе построения функции Ляпунова.

Изложенный материал составляет наиболее простую часть теории А. М. Ляпунова. Разработаны и более тонкие методы, использующие, например, функции Ляпунова, производные которых «в силу системы» не обязательно отрицательны, а только не положительны. Все эти вопросы рассмотрены во многих работах, посвященных теории устойчивости ([12], [13] и многие другие). Подчеркнем главное – если найдена функция Ляпунова, то тем самым решен вопрос об устойчивости нулевого решения нелинейной системы, а устойчивость любого решения системы можно свести к устойчивости нулевого решения.

Поэтому поиску функций Ляпунова для различных систем уравнений, разработке теории устойчивости, основанной на исследовании этих функций, посвящены сотни книг и статей многочисленных исследователей. Обилие работ связано с тем, что отыскать функцию Ляпунова для той или иной системы очень трудно, поскольку общих методов ее построения не существует. Один из немногих результатов общего характера относится как раз к линейным системам с постоянными коэффициентами: если такая система имеет гурвицев характеристический полином, то она имеет и функцию Ляпунова в виде квадратичной формы.

Теперь поставим важнейший вопрос, который почему–то долгое время не ставили: гарантирует ли построенная с такими трудами функция Ляпунова, что устойчивость исследуемой системы сохранится хотя бы при сколь угодно малых (и, значит, совершенно неизбежных на практике) вариациях параметров? К сожалению, ответ на этот вопрос (как было впервые показано в [4]), отрицательный: наличие у исследуемой системы функции Ляпунова не гарантирует параметрической устойчивости ее решений. Докажем это на примере системы уравнений (6) – (7). Как уже было показано, эта система эквивалентна системе (1) – (2), которую можно – подставив функцию *u* из(2) в (1) – привести к эквивалентной ей системе

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -5x_1 - 2x_2 - 3x_3; \\ \dot{x}_2 &= -3x_1 - x_2 - x_3; \\ \dot{x}_3 &= -2x_1 - 3x_2 - 2x_3. \end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

Система (37) имеет тот же гурвицев характеристический полином (3) с корнями λ_1 = –7,87; $\lambda_{2,\ 3}$ = –0,055 ± j, что и эквивалентная ей система (6) – (7), и, следовательно, имеет функцию Ляпунова в виде квадратичной формы переменных x_1, x_2, x_3. В то же время, исходная система (6) – (7), как уже было доказано ранее, параметрической устойчивостью не обладает.

Таким образом, построив для какой-либо системы уравнений функцию Ляпунова, мы не можем гарантировать, что устойчивость не потеряется при сколь угодно малых вариациях параметров. Но устойчивость, которая теряется при неизбежных на практике сколь угодно малых вариациях, ничуть не лучше неустойчивости и даже опаснее ее. А связано это с тем, что эквивалентные преобразования, использованные при исследовании системы по второму методу Ляпунова, могут изменить параметрическую устойчивость (примером является преобразование системы (6) – (7) в систему (37)).

Все изложенное ни в коей мере не опровергает классических результатов А. М. Ляпунова, который совершенно правильно доказал устойчивость тех систем, для которых может быть построена функция, названная впоследствии его именем. Что же касается сохранения устойчивости при вариациях параметров, то во времена Ляпунова этот вопрос еще не ставился.

Изложенные результаты не ставят под сомнение практическую значимость второго метода Ляпунова. Системы уравнений, для которых построена функция Ляпунова, не обладают параметрической устойчивостью только в тех случаях, когда использованные эквивалентные преобразования оказались эквивалентными в классическом смысле, но не в расширенном. Для восстановления надежности расчетов устойчивости достаточно дополнить их проверкой использованных преобразований на эквивалентность в расширенном смысле.

Общий вывод: традиционные методы расчета устойчивости как линейных, так и нелинейных систем, сами по себе не надежны, и их использование может стать причиной аварий и катастроф. Вместе с тем, надежность результатов расчета может быть легко восстановлена дополнительной проверкой использованных преобразований на эквивалентность в расширенном смысле.

Изложенный материал еще раз подтверждает, что существуют «особые» объекты, математическими моделями которых являются «особые» системы уравнений. Определение: «особыми» являются объекты, для которых традиционные методы расчета, без дополнительных проверок, изложенных, например, в [4, 11], дают неверные результаты, которые могут стать причиной аварий и катастроф.

§5. Неточности в расчетах устойчивости по части переменных

Завершая анализ ошибок и неточностей, содержащихся в традиционных методах расчета устойчивости, рассмотрим проблему устойчивости по части переменных, которой были посвящены работы многих исследователей (публикации [14], [15] и многие другие). Важность этой проблемы связана с тем, что не всегда требуется устойчивость по всем переменным, и в этих случаях представляется возможность спроектировать более простую систему, устойчивую не по всем переменным, а только по части их. Примером может служить движение ракеты, симметричной относительно продольной оси. Пространственное движение ракеты, как и любого другого твердого тела, описывается шестью переменными – тремя координатами центра масс и тремя углами поворота ракеты относительно трех взаимно перпендикулярных осей, проходящих через центр масс. Одну из этих осей можно совместить с продольной осью симметрии, и тогда устойчивость одной из переменных – угла поворота относительно этой оси – несущественна для попадания ракеты в цель.

Методику проверки устойчивости по части переменных покажем на примере системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 - 2x_3; \\ \dot{x}_2 &= 4x_1 + x_2; \\ \dot{x}_3 &= 2x_1 + x_2 - x_3, \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

рассмотренной ранее в работе [14].

Характеристический полином системы (38) равен

$$\det = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & 2 \\ -4 & \lambda-2 & 0 \\ -2 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = (\lambda+1)^2(\lambda-1) \tag{39}$$

и имеет как положительные, так и отрицательные корни. Поэтому все решения системы (38) устойчивыми быть не могут. Для суждения об устойчивости, например, переменной x_1 можно использовать известный метод «μ-преобразований». Этот метод заключается в том, что часть старых переменных системы заменяется, пользуясь эквивалентными преобразованиями на новые (которые, по традиции, обозначают буквами μ_i – отсюда и название метода). Замену эту стараются провести так, чтобы новая система, состоящая из части старых переменных x_i и новых переменных μ_i, была бы устойчива по всем переменным. Это будет означать, что переменные x_i были устойчивы и в исходной системе.

Для системы (38) в известной монографии [14] было предложено ввести новую переменную $\mu = x_2 - 2\,x_3$, и тогда, поскольку $\dot{\mu} = \dot{x}_2 - 2\dot{x}_3$, то из второго и третьего уравнений системы (38) следует, что $\dot{\mu} = -\mu$. Окончательно, для переменных x_1 и μ получаем уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 + x_1 &= \mu; \\ \dot{\mu} + \mu &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Система (40) имеет характеристический полином

$$\begin{vmatrix} \lambda + 1 & 1 \\ 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2 \tag{41}$$

с корнями $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Поэтому решения $x_1(t)$ и $\mu(t)$ являются устойчивыми для любых начальных условий, а поскольку преобразования, переведшие систему (38) в систему (40) являются эквивалентными (в классическом смысле) относительно переменной x_1, то это означает, что переменная x_1 устойчива и в исходной системе (38).

В данном случае это заключение можно проверить непосредственным интегрированием системы (38) с начальными условиями $x_1(0) = x_{10}$; $x_2(0) = x_{20}$; $x_3(0) = x_{30}$. Получим:

$$x_1(t) = x_{10}e^{-t} + (x_{20} - 2x_{30})te^{-t}; \tag{42}$$

$$x_2(t) = 2(x_{10} + x_{20} - 2x_{30})e^{t} + (4x_{30} - 2x_{20})te^{-t} + (2x_{30} - x_{20} - 2x_{10})e^{-t}; \tag{43}$$

$$x_3(t) = (x_{10} + x_{20} - x_{30})e^{t} + (2x_{30} - x_{20})te^{-t} + (2x_{30} - x_{10} - x_{20})e^{-t}; \tag{44}$$

$$\mu(t) = x_2 - 2x_3 = (x_{20} - 2x_{30})e^{-t}. \tag{45}$$

Формулы (42) и (45) подтверждают, что решения $x_1(t)$ и $\mu(t)$ устойчивы, а $x_2(t)$ и $x_3(t)$ – не устойчивы.

Если прямое интегрирование какой-либо системы затруднительно, то заключение об устойчивости той или иной переменной можно сделать на основании методики «μ-преобразований».

Однако это заключение – как и его частный случай: заключение об устойчивости переменной x_1 в системе (38) на основании исследования устойчивости системы (40) – будет неполным. На самом деле устойчивость переменной x_1 в системе (38) может теряться при сколь угодно малых – а значит неизбежных на практике – вариациях параметров системы (38). Параметрической устойчивостью переменная x_1 в системе (38) не обладает – хотя в эквивалентной ей относительно переменной x_1 системе (40), решение x_1 обладает параметрической устойчивостью. Отметим, что в монографии [14] – откуда и взят пример с системой (38) – потеря устойчивости x_1 при сколь угодно малых вариациях параметров была замечена, но причина явления объяснялась неправильно. Автор монографии [14] объяснял его тем, что «свойство асимптотической устойчивости по отношению к части переменных обладает повышенной чувствительностью по отношению к вариациям коэффициентов». На самом деле, «повышенная чувствительность» здесь не при чем. Просто «μ-преобразование», как и любое другое эквивалентное в классическом (но не в расширенном) смысле преобразование может изменять свойство параметрической устойчивости решений – как у всех переменных, так и у части их.

Поскольку система устойчивая, но теряющая устойчивость даже при сколь угодно малых, – а значит неизбежных на практике – вариациях параметров ничуть не лучше неустойчивой системы, практический смысл имеют лишь те «μ-преобразования», которые эквивалентны не только в классическом смысле, но и в расширенном. Если эквивалентности в расширенном смысле нет, то суждение об устойчивости той или иной системы уравнений «по части переменных» на основе «μ-преобразования» может ввести в заблуждение.

§6. Неточности в теории дифференциальных уравнений

Наиболее важной из числа недавно обнаруженных неточностей в традиционных методах вычисления является обнаруженная неверность одной из основных теорем теории дифференциальных уравнений – теоремы о непрерывной зависимости решений системы дифференциальных уравнений от коэффициентов и параметров. Поскольку реальные значения коэффициентов и параметров, как уже говорилось, почти всегда немного отличаются от принятых при расчете, то именно на этой теореме основывалась уверенность в надежности расчетов, использующих дифференциальные уравнения, а используются эти уравнения очень широко, повсеместно.

Уже в первой главе было показано, что эта важнейшая теореме неверна, поскольку существуют системы уравнений, удовлетворяющие условию теоремы, но не имеющие непрерывной зависимости решений от параметров.

Теперь, основываясь на материале главы третьей, можно дать объяснение, как существованию подобных систем, так и до сих пор существующему и почти всеобщему убеждению в том, что таких систем быть не может.

Теорема о непрерывной зависимости решений от параметров верна и доказана в многочисленных учебниках для двух частных случаев – для систем уравнений в нормальной форме, т. е. состоящих из *n* уравнений первого порядка, и еще для второго частного случая - для одного уравнения n–го порядка. Что касается огромного многообразия других систем, не относящихся к этим двум частным случаям, а состоящим из различного числа уравнений различных порядков, то для этих систем в учебниках никаких доказательств не приводилось. Вместо этого говорилось, что любую систему можно путем эквивалентных преобразований привести к нормальной форме. А поскольку почти до самого конца XX века господствовало убеждение в том, что «эквивалентные преобразования ничего не меняют», то отсюда возникало и второе убеждение (а по сути – просто предрассудок) – убеждение в том, что у всех систем дифференциальных уравнений, правые части которых удовлетворяют условиям Липшица, решения зависят от параметров непрерывно.

Поскольку на самом деле эквивалентные преобразования могут изменять некоторые свойства решений, в том числе и свойство непрерывной зависимости от параметров, то нет ничего удивительного в существовании систем уравнений, подобных рассмотренным в главе первой. Система (6) – (7) также не имеет непрерывной зависимости решений от своих коэффициентов: при их номинальных значениях общее решение системы (точнее – семейство решений) имеет вид:

$$x_3(t) = C_1 e^{-7,87t} + C_2 e^{-0,055t} \sin t + C_3 e^{-0,055t} \cos t\,, \tag{46}$$

но если коэффициенты при члене Du в уравнении (7) отклонятся от номинального даже на сколь угодно малую величину $\varepsilon > 0$, то в общем решении появится чрезвычайно быстро растущий четвертый член (приближенно равный экспоненте $C_4 e^{+\frac{t}{\varepsilon}}$), и вся зависимость решений от времени для любых t станет совсем другой. В то же время, у системы (37), которая эквивалентна (в классическом смысле) системе (6) – (7) решения зависят от коэффициентов непрерывно. Следовательно, все дело в том, что преобразование системы (6) – (7) в систему (37) было эквивалентным в классическом смысле, но не в расширенном; некоторые свойства решений (параметрическая устойчивость, непрерывная зависимость от параметров) это преобразование изменило.

Теперь рассмотрим, что будет происходить с реальными объектами техники, экономики, финансов и т. п., математическими моделями которых являются системы дифференциальных уравнений (а таких объектов очень и очень много). Если эти объекты с самого начала описываются системой n уравнений первого порядка, то с непрерывной зависимостью решений от параметров все в порядке. Однако, гораздо чаще первичными, исходными математическими моделями реальных объектов являются системы, состоящие из уравнений различных порядков (так, например, все механические объекты описываются, как известно, системами уравнений

Лагранжа второго рода – т. е. системами, состоящими из уравнений второго порядка). Подобные системы можно привести (и их приводят) к системе n уравнений первого порядка с помощью преобразований, эквивалентных в классическом смысле. Но будут ли эти преобразования эквивалентны и в расширенном смысле? Рассмотренные примеры доказывают, что это происходит не всегда.

А между тем каждый объект, для которого преобразование его математической модели к системе n уравнений первого порядка является преобразованием, эквивалентным в классическом смысле, но не в расширенном, является очень опасным «особым» объектом, то есть объектом, для которого традиционные методы расчета, не учитывающие недавно открытых в СПбГУ свойств эквивалентных преобразований, не дают верного результата, не позволяют предсказать его истинного, иногда очень опасного поведения. Поведение «особых» объектов даже при очень малых, неизбежных в ходе эксплуатации вариациях параметров может коренным образом отличаться от предсказанного расчетом. Поэтому аварии и катастрофы могут у «особого» объекта произойти в любой, самый непредвиденный момент времени. Для предсказания и предупреждения таких аварий необходимы дополнительные расчеты, о которых будет далее рассказано. Без них не обойтись.

Таким образом, преобразование системы дифференциальных уравнений к нормальной форме, к форме n уравнений первого порядка, далеко не всегда так безобидно, как кажется. Между тем, например, даже в таком авторитетном учебнике, как [16], с самого начала и до конца рассматриваются лишь системы в нормальной форме. Подобное рассмотрение недостаточно. Для того, чтобы судить об истинном поведении объектов, описываемых системами дифференциальных уравнений, нужно исследовать и те изменения свойств решений, которые происходят в ходе приведения систем к нормальной форме. Только после такого исследования можно быть уверенным в достоверности и надежности результата проведенных вычислений.

Теперь необходимо ответить на вопрос, который, наверное, не мог не возникнуть у внимательного читателя: дифференциальные уравнения были предметом самого внимательного изучения многих выдающихся ученых и в XVIII, и в XIX, и в XX веках. Почему же убеждение о непрерывной зависимости решений любых систем уравнений от коэффициентов и параметров оставалось непоколебимым и переходило из одного учебника в другой?

Перечитаем еще раз разделы о непрерывной зависимости решений от параметров в различных учебниках. Ни в одном из них (по крайней мере, ни в одном из тех, которые известны автору этих строк) не сказано: «для систем в нормальной форме, т. е. состоящих из n дифференциальных уравнений первого порядка и для одного уравнения n-го порядка теорема о непрерывной зависимости доказана. Что же касается бесчисленного множества других систем, то здесь пока ясности нет и надо ждать результатов дальнейших исследований». Но – обратите внимание! – нет в учебниках и обратного четкого утверждения: «приведено доказательство теоремы о непрерывной зависимости для систем в нормальной форме; но поскольку любую систему можно привести к нормальной форме путем эквивалентных преобразований, которые «ничего не меняют», то данная теорема верна для любых систем». Такого утверждения в учебниках нет. Вместо этого приводятся два отдельных утверждения:

1. для систем в нормальной форме непрерывная зависимость решений от параметров доказана;

2. любую систему можно привести к нормальной форме путем эквивалентных (равносильных) преобразований.

Эти два утверждения подталкивают читателя учебника к тому, чтобы он сам «домыслил» вывод: теорема о непрерывной зависимости решений от параметров верна для любых систем. На самом деле из утверждений 1. и 2. этот вывод не следует. Надо доказать еще одно, третье утверждение: эквивалентные преобразования не могут изменить свойство непрерывной зависимости решений от параметров. Но это утверждение не доказывалось и не могло быть доказано, потому что оно не верно.

Почему используется такая не прямая форма изложения с необходимостью «домысливания» читателем учебника за его автора? Здесь, разумеется, можно лишь высказать предположения. Можно предположить, что авторы учебников – люди очень опытные и квалифицированные – понимали необходимость дать доказательство теоремы о непрерывной зависимости для всех систем, а не только для систем в нормальной форме, и пытались найти такое доказательство, но оно не получалось. Возможно, авторы учебников верили, что доказательство для всех систем все же будет найдено позже, и поэтому они ограничивались тем, что в своих учебниках привели только безусловно верные утверждения 1 и 2, оставив остальное на «домысливание» читателей и лекторов, читающих курсы по этим учебникам. Если теорема о непрерывной зависимости решений от параметров для всех систем была бы доказана, то «домысливание» оказалось бы правильным. На самом деле теорема о непрерывной зависимости для любых систем не могла быть доказана, поскольку она не верна, поскольку существуют контрпримеры, опубликованные в [4]. Однако, неверным оказалось только «домысливание» читателей, а сами по себе утверждения 1 и 2, приводимые в учебниках, безусловно верны.

Таким образом, контрпримеры, опубликованные в [4], не опровергают какой-либо ранее доказанной теоремы. Они опровергают лишь не основанное на доказательствах «домысливание», опровергают предрассудок, что будто бы «эквивалентные преобразования ничего не меняют», и, в частности, опровергают предрассудок, что эквивалентные (в классическом смысле) преобразования системы дифференциальных уравнений в нормальную форму не могут изменить такого свойства решений системы, как их непрерывная зависимость от коэффициентов и параметров.

Хотя контрпримеры, опубликованные в [4], не опровергают никаких доказанных теорем, их практическая значимость велика. Они заставляют по-новому и более тщательно отнестись к проверке достоверности технических расчетов, позволяют установить причины ошибок в расчетах и порожденных этими ошибками аварий и катастроф в прошлом, и позволяют в будущем предотвращать аварии и катастрофы – во всяком случае те, которые порождаются ошибками в расчетах, причины которых выявлены.

Пример. В 2004 году в Москве обрушился аквапарк «Трансвааль», что привело к гибели 27 человек. Тщательное расследование не подтвердило версий о террористическом акте или отступлений от проекта при строительстве. Единственной причиной катастрофы были признаны ошибки проекта. Автор проекта и эксперт, его проверявший были отданы под суд. Но ведь и тот, и другой – очень опытные строители. Крайне маловероятно, что оба они допустили одни и те же ошибки, тем более, что последующие заключения судебных экспертов о якобы допущенных ими «ошибках» противоречат друг другу. Все становится на свои места, если вспомнить, что конструкция аквапарка была новой, ранее не опробованной (что, впрочем, естественно для всех уникальных, не типовых зданий). Поэтому вполне возможно, что аквапарк оказался «особым» объектом, для которого традиционные методы расчета, даже проведенные грамотно и добросовестно, не обеспечили достоверного результата. Колонны, поддерживающие крышу аквапарка, работали на сжатие, поведение их под нагрузкой описывалось системой дифференциальных уравнений, которую исследовали, разумеется, после приведения к нормальной форме. Напомним, что расчет системы колонн аквапарка проводился в 2000 году, когда предостережения о возможном изменении расчетных запасов устойчивости при преобразовании к нормальной форме еще только что были опубликованы и не могли быть использованы теми, кто производил расчет. В результате получилось, что по расчету система колонн обладала хорошим запасом устойчивости и должна была надежно поддерживать крышу многие десятки лет, а на самом деле запасы устойчивости могли оказаться во много раз меньше. Небольшие изменения параметров, неизбежные за два года эксплуатации, исчерпали эти запасы, и 14 февраля

2004 года крыша аквапарка рухнула, погубив 27 человек. Еще 113 получили ранения.

К сожалению, даже эта ужасная катастрофа в столице страны (не говоря уже о многих других авариях и катастрофах) не стала поводом для серьезного обсуждения необходимости совершенствования методов расчета в связи с открытием в конце XX века новых свойств эквивалентных преобразований в Санкт-Петербургском государственном университете (СПбГУ). Необходимость совершенствования методов расчета, обеспечения надежности компьютерных вычислений назрела давно. Поскольку эквивалентные преобразования применяются в математике и практике вычислений очень широко, повсеместно, то обнаружение в конце XX века их новых, неожиданных свойств, должно будет привести к пересмотру, к уточнению очень многих вычислительных алгоритмов и методов расчета – помимо тех, о которых рассказано в предыдущих разделах. Но для уточнения вычислительных алгоритмов, для обеспечения надежности компьютерных вычислений необходима большая исследовательская работа, которая сейчас еще только началась. О некоторых результатах этой работы будет рассказано в следующем разделе.

§7. Другие вычислительные алгоритмы

Поскольку эквивалентные преобразования, как уже говорилось, очень широко применяются в самых различных разделах математики, то после открытия в СПбГУ новых свойств эквивалентных преобразований стали выявляться связанные с этими новыми свойствами недостатки самых различных вычислительных алгоритмов. Приведем примеры.

А. Синтез оптимальных систем управления

Одним из самых первых примеров стал алгоритм синтеза оптимальных систем управления при стационарных возмущающих воздействиях. Алгоритм синтеза был описан в [10] и предполагал, что известна математическая модель объекта управления в виде скалярного уравнения

$$A(D)x = u + \varphi(t)\,, \qquad (47)$$

в котором $A(D) = a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1D + a_0$ – полином от оператора дифференцирования $D = \dfrac{d}{dt}$, x – регулируемая переменная, скаляр, u – управляющее воздействие, скаляр, $\varphi(t)$ – возмущающее воздействие, стационарная случайная функция времени, относительно которой известны экспериментальные данные об ее спектральной плотности мощности, т. е. о четной функции $S_\varphi(\omega)$ переменной ω, имеющей физический смысл частоты. Эти экспериментальные данные затем аппроксимируют рациональной дробью:

$$S_\varphi(\omega) = \frac{a_p\omega^{2p} + a_{p-1}\omega^{2p-2} + \ldots + a_1\omega^2 + a_0}{b_q\omega^{2q} + b_{q-1}\omega^{2q-2} + \ldots + b_1\omega^2 + b_0}. \tag{48}$$

Степени p и q и коэффициенты a_i и b_i полиномов, входящих в дробь (48) подбирают, стремясь к тому, чтобы при умеренных p и q расхождение между экспериментальными данными и аналитической аппроксимацией (48) было не слишком большим. Регулятор, который, прежде всего, должен обеспечить устойчивость замкнутой системы, предполагаем линейным. Его математической моделью является уравнение:

$$W_1(D)x = W_2(D)u, \tag{49}$$

где $W_1(D)$ и $W_2(D)$ – полиномы от оператора дифференцирования $D = \frac{d}{dt}$. Желательно найти такие степени и коэффициенты полиномов $W_1(D)$ и $W_2(D)$ в формуле (49), чтобы помимо устойчивости замкнутой системы, регулятор обеспечивал наилучшее из возможных качество управления, которое оценивается по величине интеграла

$$J = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T (m^2x^2 + u^2)dt. \tag{50}$$

Если полиномы $W_1(D)$ и $W_2(D)$ вычислены, то задача технической реализации регулятора по его математической модели (49) затруднений не представляет.

Для вычисления полиномов $W_1(D)$ и $W_2(D)$ был разработан сравнительно простой алгоритм, подробно описанный в [10], [17]. Основные этапы алгоритма:

1. В аналитической аппроксимации (48) производится замена: $j\omega = s$, после чего спектральная плотность факторизуется:

$$S_\varphi(s) = S_1(s)\cdot S_1(-s), \tag{51}$$

т.е. разлагается на произведение двух симметричных множителей $S_1(s)$ и $S_1(-s)$, один из которых является функцией от s, а второй – от $-s$. Поскольку и числитель, и знаменатель дроби (48) являются четными функциями, то они имеют соответственно $2p$ и $2q$ симметричных корней: λ_1 и $-\lambda_1$; λ_2 и $-\lambda_2$, и т.д.

В множитель $S_1(s)$ войдут все корни с отрицательными вещественными частями, а в множитель $S_1(-s)$ войдут все корни с положительными вещественными частями. Таким образом, $S_1(s)$ вычисляется по формуле:

$$S_1(s) = \frac{\sqrt{a_p}(s-\lambda_{p_1})(s-\lambda_{p_2})\cdot\ldots\cdot(s-\lambda_{p_p})}{\sqrt{b_q}(s-\lambda_{q_1})(s-\lambda_{q_2})\cdot\ldots\cdot(s-\lambda_{q_q})} \qquad (52)$$

при этом и числитель, и знаменатель дроби (52) оказываются гурвицевыми полиномами.

2. На втором этапе алгоритма в уравнении (47) оператор дифференцирования D заменяется на переменную s и производится факторизация полинома $A(s)\mathrm{A}(-s) + m^2$:

$$A(s)A(-s) + m^2 = G(s)G(-s), \qquad (53)$$

при этом $G($будет гурвицевым полиномом, а $G(-s)$ – не гурвицевым.

3. На третьем этапе выполняется разложение (сепарация):

$$\frac{A(-s)}{G(-s)} S_1(s) = M_0 + M_+ + M_-, \qquad (54)$$

где M_0 – целый полином, M_+ –правильная дробь с полюсами в левой полуплоскости комплексного переменного s, а M_- - правильная дробь с полюсами в правой полуплоскости.

4. На четвертом этапе строится функция

$$\frac{\Phi_1(s)}{\Phi_2(s)} = \frac{M_0 + M_+}{G(s)S_1(s)}, \qquad (55)$$

с помощью которой уже непосредственно находятся полиномы $W_1(D)$ и $W_2(D)$ в оптимальном регуляторе (49):

$$\frac{W_1(D)}{W_2(D)} = A(D) - \frac{\Phi_2(D)}{\Phi_1(D)}. \qquad (56)$$

Аналогичный, но немного более сложный алгоритм был разработан для объектов управления вида

$$A(D)x = B(D)u + \varphi(t), \qquad (57)$$

где $B(D) = b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + \ldots + b_1 D + b_0$.

Разработанные алгоритмы обеспечивали устойчивость замкнутой системы, но быстро обнаружилось, что эта устойчивость довольно часто нарушалась даже при сколь угодно малых вариациях параметров, что привело к ряду аварий на первых этапах применения оптимальных систем в технике в 60-х годах XX века. Доверие к методам оптимизации было тогда подорвано, их применение застопорилось. Для успешного использования оптимальных регуляторов необходимо было решить две задачи:

1. Найти критерий, позволяющий выявить – для каких объектов управления и возмущающих воздействий происходит потеря устойчивости при вариациях параметров (фактически – как это выяснилось уже позже – нужно было разработать метод выявления «особых» объектов в данной области расчетов).

2. Найти – какие изменения необходимо внести в алгоритм синтеза оптимальных регуляторов для того, чтобы при вариациях параметров потери устойчивости не происходило.

Обе задачи были успешно решены и их решение опубликовано в [10] и [17]. Оказалось, что решающую роль играет неравенство

$$p \geq m + q - 1, \qquad (58)$$

где p и q берутся из формулы (48) для аналитической аппроксимации спектральной плотности мощности возмущающего воздействия $\varphi(t)$, а m – это степень полинома $B(D)$ в математической модели объекта управления (57). Если неравенство (58) выполнено, то система управления параметрически устойчива, если оно не выполнено, то система управления может потерять устойчивость при сколь угодно малых вариациях параметров объекта управления или регулятора. За неравенством (58) постепенно закрепилось название «неравенство Ю. П. Петрова» или «критерий Ю. П. Петрова». Оно широко используется для проверки параметрической устойчивости оптимальных систем управления.

Приведем простой пример, ранее рассмотренный в [10].

Математическая модель объекта управления имеет вид:

$$4Dx = (D+1)u + \varphi(t), \qquad (59)$$

коэффициент m^2 в критерии качества (50) равен $m^2 = 9$, спектральная плотность мощности возмущающего воздействия аппроксимирована формулой:

$$S_\varphi(\omega) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+\omega^2}. \qquad (60)$$

Выполнив вычисления, необходимые для синтеза оптимального регулятора, убедимся, что его математическая модель имеет вид:

$$12(D+4)x = (3D-5)u. \qquad (61)$$

Замкнув регулятором (61) объект управления (59), найдем уравнение замкнутой системы:

$$4(20D+12)x = (3D-5)\varphi(t), \qquad (62)$$

подтверждающее, что замкнутая система устойчива. Регулятор (61) обеспечивает критерию качества (50) значение $J_{min} = 0{,}4336$ – наименьшее из всех возможных. Однако критерий Ю. П. Петрова (58) для объекта управления (59) и спектральной плотности мощности возмущающего воздействия (60) – не выполняется. В данном случае, степень полинома $B(D)$ равна единице, поэтому $m = 1$, а из формулы (60) следует, что $p = 0$; $q = 1$ и неравенство (58) не выполнено. Это означает, что устойчивость может исчезнуть при сколь угодно малых вариациях параметров.

Действительно, если изменится даже всего один их коэффициентов объекта управления, и его математическая модель примет вид

$$4D(1+\varepsilon)x = (D+1)u + \varphi(t), \qquad (63)$$

то, замкнув объект (63) регулятором (61), убедимся, что характеристический полином замкнутой системы принял вид

$$-3\varepsilon\lambda^2 + (20+5\varepsilon)\lambda + 12. \qquad (64)$$

Уже при сколь угодно малых $\varepsilon > 0$ он перестает быть гурвицевым, и устойчивость теряется.

Для обеспечения параметрической устойчивости в монографии [17] было предложено изменять аналитическую аппроксимацию спектра плотности мощности возмущающего воздействия, используемую при расчете оптимального регулятора, причем изменять так, чтобы неравенство Ю. П. Петрова (58) оказалось выполненным. В рассматриваемом примере для выполнения неравенства (58) достаточно перейти от $p = 0$ к $p = 1$ – т. е. заменить аппроксимацию (60) на

$$S_{\varphi}(\omega) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 + k^2\omega^2}{1 + \omega^2}. \tag{65}$$

Синтезируя оптимальный регулятор теперь уже для объекта управления (63) и спектральной плотности (65), получаем регулятор

$$12[(1 + 3k)D + 4]x = [(3 - 11k)D - (5 + 3k)]u \tag{66}$$

(сравните с регулятором (61)!)), а характеристический полином замкнутой системы превращается в полином

$$(20k - 3\varepsilon + 11\varepsilon k)\lambda^2 + (20 + 12k + 5\varepsilon + 3\varepsilon k)\lambda + 12 \tag{67}$$

(сравните с полиномом (64)!). Анализируя полином (67), убеждаемся, что он остается гурвицевым не только при сколь угодно малых, но и при конечных значениях ε, тем больших, чем больше k. Так, уже при $k = 0{,}01$, устойчивость сохранится при всех $|\varepsilon| \le 0{,}69$, а при $k = 0{,}1$ – при $|\varepsilon| \le 1{,}05$.

Вместе с тем, удовлетворение дополнительного требования к системе – ее параметрической устойчивости – не обходится без некоторой «жертвы» в величине критерия качества (50). Так, при $k = 0$ имеем, как уже говорилось, $J = 0{,}4336$, а при $k = 0{,}1$ будет $J = 0{,}4374$ или на 0,88% больше. Конечно, такое небольшое увеличение критерия качества практически неощутимо.

Таким образом, проблема обеспечения надежности вычислений при синтезе оптимальных систем управления получила полное и исчерпывающее решение:

1. Найден простой и легко проверяемый критерий возможной некорректности задачи синтеза – критерий Ю. П. Петрова – виде неравенства (58).

2. Предложен и обоснован метод подхода к некорректным задачам синтеза – изменение аналитической аппроксимации экспериментальных данных о спектральной плотности мощности возмущающего воздействия – такое изменение, при котором неравенство (58) начинает выполняться. Как показывает рассмотренный пример, при таком подходе исходная некорректная

задача, не имеющая практического смысла, заменяется на последовательность корректных задач, которые в пределе, при $k \to 0$, перестают быть корректными и совпадают с исходной некорректной задачей.

Обеспечение надежности расчета и проектирования оптимальных систем управления позволило успешно решить ряд практических задач оптимизации, улучшения качества функционирования различных технических объектов. Об этом рассказано в публикациях [17], [18].

Отметим сразу, что пока еще не для всех вычислительных алгоритмов, ненадежность которых обнаруживалась при исследовании открытых в СПбГУ новых свойств эквивалентных преобразований, удалось исчерпывающе решить обе задачи:

1. выявление возможной некорректности решений;

2. обеспечение надежности результатов вычислений с учетом возможных вариаций коэффициентов и параметров.

Б. Интегральные уравнения

Возникновение некорректности решения при часто используемых эквивалентных преобразованиях интегральных уравнений Вольтерра в интегральные уравнения Фредгольма было подмечено проф. В. С. Сизиковым и опубликовано в [19], стр. 148 – 152. Там же опубликованы и предложенные В. С. Сизиковым методы восстановления надежности решения интегральных уравнений. Эти методы позволили успешно решить целый ряд практических задач по реконструкции смазанных при фотографировании или дефокусированных изображений, реконструкции рентгеновских изображений томографического исследования мозга, задач синтеза магнитных полей и т. д.

В. Алгоритмы, использующие цепочки эквивалентных преобразований

Многие вычислительные алгоритмы используют цепочки эквивалентных преобразований. Так, например, используя метод Гаусса решения системы алгебраических уравнений

$$
\left.\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\
.... \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n
\end{array}\right\} \qquad (68)
$$

путем эквивалентных преобразований, домножений и сложений, матрицу коэффициентов исходной системы

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\
... & ... & ... & ... \\
a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}
\end{bmatrix} \qquad (69)
$$

постепенно преобразуют в треугольную матрицу, после чего искомые решения легко находятся одно за другим.

Если в цепочке эквивалентных преобразований хотя бы одно из них окажется эквивалентным в классическом смысле, но не в расширенном, то уже малая погрешность округления в ходе расчетов, может существенно изменить решение.

Надо отметить, что проблема влияния погрешностей округления на точность решений многократно исследовалась, однако обнаружение преобразований, эквивалентных в классическом смысле, но не в расширенном, раскрыло новый источник возможных ошибок. От ранее исследованных он отличается тем, что:

1. Ошибка не нарастает медленно, она не пропорциональна (как обычно) количеству округлений и преобразований; уже одно преобразование, оказавшееся эквивалентным в классическом смысле, но не в расширенном, может сразу изменить решение.

2. Широко применяемый сильный способ уменьшения влияния погрешностей округления на точность вычислений и заключающийся в перепрограммировании компьютера на вычисления с удвоенным числом десятичных знаков, данном случае не работает.

Новый источник ошибок вычислительных алгоритмов был исследован К. Г. Чертковым на примере обобщенной задачи вычисления собственных значений матриц – т. е. решения матричного уравнения

$$(A - \lambda \overline{E})x = 0, \tag{70}$$

где $\overline{E}$ - не единичная матрица (как в обычной, не обобщенной задаче о собственных значениях), а квазиединичная – т. е. матрица, в которой все элементы, стоящие не на главной диагонали, равны нулю, а на главной диагонали часть элементов – единицы, и часть – нули. Обобщенные задачи о собственных значениях часто встречаются в приложениях.

К. Г. Чертков показал (и опубликовал в [20]), что погрешности округления в обобщенной задаче о собственных значениях приводят к появлению фальшивых собственных значений, а увеличение точности, перепрограммирование компьютера на удвоенное, учетверенное и т. д. число десятичных знаков не приводит к исчезновению фальшивых собственных значений, хотя и изменяет их величину.

§8. Ошибки, обнаружившиеся в популярных пакетах прикладных программ (*MATLAB, Mathcad* и др.) и методы предотвращения ошибок при расчетах

В последние десятилетия основная масса расчетов и вычислений в технике, экономике, финансовом деле выполняется с помощью различных пакетов прикладных программ – таких, как пакеты *MATLAB, Mathcad* и многие, многие другие.

Поэтому правильность, надежность, безупречность столь широко используемых пакетов имеют большое, очень большое практическое значение. Каждая ошибка в пакете может обойтись очень дорого. Поэтому пакеты программ тщательно разрабатывались и всесторонне проверялись.

И тем не менее, после открытия в Санкт-Петербургском гос. университете новых свойств эквивалентных преобразований и их публикации в работах [2, 3, 4], быстро обнаружились ошибки во многих популярных пакетах. Ошибки эти связаны с тем, что в период разработки программ, составивших пакеты, еще не были известны новые свойства эквивалентных преобразований, их способность изменять многие важные свойства решений.

Рассмотрим подробнее эти ошибки и методы их предотвращения.

А. Ошибки в программах численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Программы численного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, используемые в пакетах прикладных программ, используют предварительное приведение систем к нормальной форме, к форме *n* уравнений первого порядка. Такой подход совершенно оправдан, поскольку многообразие различных систем дифференциальных уравнений очень велико и было бы совершенно нерационально создавать для решения каждой системы отдельную программу. Преобразование (разумеется, эквивалентное преобразование) исследуемой системы в нормальную форму позволяет обойтись одной программой, что гораздо удобнее. Однако это преобразование может затушевать, скрыть отсутствие непрерывной зависимости решений от коэффициентов и параметров в исходной системе, а если непрерывной зависимости нет, то полученной решение может совершенно не отражать реального поведения исследуемого объекта или процесса. Примеры уже приводились в предыдущих разделах.

Поэтому отсутствие предупреждения о возможном несоответствии между результатом расчета и реальностью следует считать серьезным недостатком всех используемых в 2006 году пакетов прикладных программ. Этот недостаток ни в коей мере не следует ставить в вину разработчикам программ: в те годы, когда программы разрабатывались, новые свойства эквивалентных преобразований еще не были открыты.

Сейчас, когда эти новые свойства эквивалентных преобразований (в том числе и преобразования систем дифференциальных уравнений к нормальной форме) открыты и известны, можно ставить вопрос об исправлении недостатков популярных пакетов, о дополнении их небольшими вспомогательными программами, которые выделят «особые» системы и восстановят надежность компьютерных вычислений.

Начнем систем, состоящих из двух дифференциальных уравнений с двумя переменными x_1 и x_2 различных порядков – т. е. систем вида

$$\begin{aligned} &(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots) x_1 + (b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + \dots) x_2 = f_1(t); \\ &(c_k D^k + c_{k-1} D^{k-1} + \dots) x_1 + (d_p D^p + d_{p-1} D^{p-1} + \dots) x_2 = f_2(t), \end{aligned} \tag{71}$$

где точками обозначены члены с более низкими степенями оператора дифференцирования $D = \dfrac{d}{dt}$. Характеристический полином системы (71) равен следующему определителю:

$$\det = \begin{vmatrix} a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots & b_m \lambda^m + b_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots \\ c_k \lambda^k + c_{k-1} \lambda^{k-1} + \dots & d_p \lambda^p + d_{p-1} \lambda^{p-1} + \dots \end{vmatrix} = (a_n d_p \lambda^{n+p} - b_m c_k \lambda^{m+k}) + \dots, \tag{72}$$

где точками обозначены члены более низких степеней.

Теперь рассмотрим, что произойдет при выполнении равенств:

$$n + p = m + k\,; \tag{73}$$

$$a_n d_p - b_m c_k = 0\,. \tag{74}$$

В этом случае старший член определителя (72) обратится в нуль, но это произойдет лишь при точном равенстве коэффициентов a_n; b_m; c_k; d_p своим номинальным значениям. Уже при сколь угодно малых вариациях этих коэффициентов степень характеристического полинома может повыситься, у него может появиться новый корень, и решение системы (71) может измениться коренным образом уже при сколь угодно малых вариациях коэффициентов. Таким образом, при выполнении условий (73) и (74) решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ системы (71) будут некорректными, а сама система (71) будет «особой» системой – т. е. системой, для которой численное интегрирование с помощью пакетов прикладных программ *MATLAB, Mathcad* и других пакетов может дать неверный результат. Соответственно, объект, математической моделью которого является система (71), будет «особым» объектом – т. е. таким объектом, для которого расчет и проектирование на основе упомянутых пакетов прикладных программ почти неизбежно приведет к последующей аварии или катастрофе.

Рассмотрим теперь, что будет происходить, если вместо равенства (74) будет выполняться неравенство

$$\left| a_n d_p - b_m c_k \right| \le \delta\,, \tag{75}$$

где δ – число, малое по сравнению с произведениями $a_n d_p$ и $b_m c_k$. В этом случае сколь угодно малые вариации не приведут к обнулению или изменению знака старшего члена характеристического полинома, но малые конечные вариации коэффициентов могут обнулить старший член характеристического полинома, или изменить его знак.

В данном случае решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ системы (71) не являются некорректными, но они плохо обусловлены. Малые конечные вариации коэффициентов и параметров могут в этом случае привести к коренным изменениям решений и столь же коренному расхождению между результатом расчета и действительным поведением исследуемого объекта или процесса.

Для обеспечения надежности компьютерных вычислений надо пакеты *MATLAB, Mathcad* и все другие дополнить небольшими программами, которые проверяли бы выполнение (или невыполнение) соотношений (73), (74) (75) и, в случае необходимости, выводили бы на экран компьютера короткие предупреждения типа: «Вы столкнулись с системой уравнений, имеющих некорректные (или плохо обусловленные) решения. При вариациях параметров возможны большие расхождения между результатами расчета и реальным поведением исследуемого объекта или процесса. Советуем изменить параметры проектируемого объекта и повторить расчет».

Рассмотрим теперь системы, состоящие из трех дифференциальных уравнений различных порядков с постоянными коэффициентами и тремя переменными $x_1(t)$; $x_2(t)$; $x_3(t)$. Такие системы можно записать в виде:

$$\left.\begin{aligned} A_{11}(D)x_1 + A_{12}(D)x_2 + A_{13}(D)x_3 &= f_1(t); \\ A_{21}(D)x_1 + A_{22}(D)x_2 + A_{23}(D)x_3 &= f_2(t); \\ A_{31}(D)x_1 + A_{32}(D)x_2 + A_{33}(D)x_3 &= f_3(t), \end{aligned}\right\} \qquad (76)$$

где $A_{11}(D)$; $A_{12}(D)$; … ; $A_{33}(D)$ – полиномы от оператора дифференцирования $D = \dfrac{d}{dt}$ различных степеней.

Характеристический полином системы (76) равен определителю третьего порядка

$$\det = \begin{vmatrix} A_{11}(\lambda) & A_{12}(\lambda) & A_{13}(\lambda) \\ A_{21}(\lambda) & A_{22}(\lambda) & A_{23}(\lambda) \\ A_{31}(\lambda) & A_{32}(\lambda) & A_{33}(\lambda) \end{vmatrix} =$$

$$A_{11}A_{22}A_{33} + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32} - A_{31}A_{22}A_{13} - A_{11}A_{32}A_{23} - A_{12}A_{21}A_{33}, \qquad (77)$$

который будет состоять из шести тройных произведений своих членов (аргументы λ опускаем). Каждое из шести тройных произведений имеет свою степень. Изменение степени характеристического полинома возможно, если два или более из шести произведений имеют одинаковые степени, которые больше, чем степени остальных произведений, и могут оказаться равными при вариациях коэффициентов. В этом случае возможно сокращение этих произведений, изменение порядка характеристического полинома и решений $x_1(t)$; $x_2(t)$; $x_3(t)$. Дополнительная программа в пакете должна следить за этими возможностями; если они реализовались, то на экране компьютера дополнительная программа высвечивает предостерегающую надпись.

Дополнительные программы для систем уравнений, состоящих из четырех и более уравнений различных порядков, составляются аналогично.

Б. Ошибки в программах расчета устойчивости

Анализ устойчивости в рассматриваемых пакетах программ производится на основе первого метода Ляпунова – т. е. исследуемая система линеаризуется, приводится к нормальной форме (к n уравнениям первого порядка), после чего вычисляется характеристический полином и исследуются его корни, или исследуется знак диагональных определителей матрицы Гурвица.

При этом не производится проверка характеристического полинома исходной системы, еще не приведенной эквивалентными преобразованиями к нормальной форме. Если при вариациях параметров исходной системы возможно изменение знака хотя бы одного из членов характеристического полинома, то при вариациях параметров устойчивость системы не сохранится, поскольку будет нарушено необходимое условие устойчивости Стодолы. В то же время, изменение знака коэффициента при члене любой степени характеристического полинома при вариациях параметров возможно в том случае, если этот коэффициент оказался малой разностью больших чисел.

Поэтому для обеспечения надежности расчета устойчивости пакеты прикладных программ следует дополнить небольшими вспомогательными программами, которые отмечали бы все случаи, когда коэффициент характеристического полинома исходной (а не преобразованной) системы оказался малой разностью больших чисел, и выводили бы предостережения об этом на монитор компьютера.

Отметим еще, что обращение в нуль или изменение знака какого-либо из членов характеристического полинома при вариациях параметров является хотя и наиболее распространенной, но не единственной причиной потери устойчивости и расхождения между результатами расчета и реальным поведением исследуемого объекта или процесса. Пример с системой (38), рассмотренный в разделе, посвященном устойчивости по части переменных, доказывает, что возможны более сложные, еще до конца не исследованные причины потери устойчивости и расхождения между расчетом и реальным поведением.

Поэтому исследование надежности и достоверности компьютерных расчетов нельзя считать завершенным. Здесь открыто поле для интересной и плодотворной исследовательской работы. Вместе с тем, использование небольших вспомогательных программ, пути построения которых изложены в настоящем разделе, поможет избежать ряда ошибок и повысить надежность результатов расчета.

Часть вторая

Глава 5. Более сложные примеры обеспечения надежности вычислений

§1. Связь между вариациями параметров объекта и вариациями коэффициентов его математической модели

Во второй части учебного пособия приведены примеры и задачи, а также рассматриваются некоторые более сложные вопросы обеспечения надежности компьютерных вычислений, долгое время не получавшие исчерпывающе ясного решения.

Один из таких вопросов – это связь между вариациями коэффициентов математической модели и вариациями параметров самого исследуемого объекта. В предыдущих главах мы исследовали изменения решений при вариациях коэффициентов уравнений, но, разумеется, эти вариации являются следствием изменения параметров самого исследуемого объекта – вариаций, причинами которых являются изменения внешних условий (прежде всего – температуры), а также постепенный износ всех элементов и узлов объекта.

Связь между вариациями коэффициентов и параметров покажем на примере электропривода – т. е. электродвигателя постоянного или переменного тока, приводящего во вращение тот или иной механизм. Многие миллионы электроприводов работают сейчас в самых различных областях – и в технике, и в быту. Это подчеркивает важность исследования всех тонкостей в их поведении.

Основное уравнение электропривода – это уравнение равновесия моментов на его валу, которое удобно записать в виде:

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = M_{\partial в} - M_{c}, \qquad (1)$$

где υ - частота вращения, $M_{\partial в}$ - момент, развиваемый двигателем, M_c - момент сопротивления исполнительного механизма, m – механическая постоянная времени, численно равная времени разгона электропривода от нулевой частоты вращения до номинальной при условии, что $M_{\partial в}$ равен номинальному моменту, а M_c равен нулю.

Уравнения электропривода – как и уравнения других технических объектов – удобно записывать «в отклонениях» - т. е. в отклонениях частоты вращения и моментов на валу от их значений в номинальном режиме. Обозначим через x_1 отклонение частоты вращения от номинальной, через x_2- отклонение момента двигателя от номинального, через x_3- отклонение момента сопротивления.

Для определенности будем рассматривать в дальнейшем электроприводы, у которых колебания момента привода на валу являются стационарным случайным процессом со спектром

$$S_M = \frac{1}{(\omega^2 + \alpha)^2} \qquad (2)$$

и ограничимся случаем α = 1. Тогда уравнения электропривода «в отклонениях» могут быть, как показано, например, в [10], записаны в виде:

$$m\frac{dx_1}{dt} = -k_0 x_1 + x_2 + x_3; \qquad (3)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_4; \qquad (4)$$

$$\frac{dx_4}{dt} = -x_3 - 2x_4. \qquad (5)$$

В уравнении (3) k_0 – это коэффициент пропорциональности между частотой вращения и той составляющей момента сопротивления, которая непосредственно от нее зависит и ей пропорциональна. Удобно время t в уравнениях (3), (4), (5) выразить в долях от механической постоянной времени электропривода и тогда в уравнении (3) коэффициент m в номинальном режиме будет равен единице ($m = 1$), но различные внешние влияния, а также износ двигателя в ходе его эксплуатации, приводят к тому, что реально $m = 1 + \varepsilon$, где ε – число, малое в сравнении с единицей; оно может быть и положительным и отрицательным. Примеры: при изменениях температуры меняются (для разных материалов по-разному, но, примерно, на $10^{-5} \div 10^{-6}$ на каждый градус) размеры всех деталей, а значит и момент инерции ротора, от которого зависит механическая постоянная времени; износ подшипников изменяет воздушный зазор между статором и ротором, а значит – изменяет вращающий момент, а вместе с ним – и коэффициент m в уравнении (3) – и т. п.

Вариации момента сопротивления влияют на частоту вращения и для уменьшения этого влияния электропривод снабжают регулятором. Теория «аналитического конструирования оптимальных регуляторов» рекомендует формировать управляющее воздействие как линейную функцию от всех переменных, присутствующих в уравнениях объекта управления. В рассматриваемом нами случае математической моделью регулятора будет уравнение:

$$x_2 = -k_1 x_1 - k_2 x_3 - k_3 x_4\,, \tag{6}$$

где k_1, k_2, k_3 – коэффициенты усиления. Они выбираются из условия оптимальности переходных процессов по методике, описанной, например, в [9], [10], а также в других учебных пособиях. Уравнения (3), (4), (5), (6), рассматриваемые совместно, образуют математическую модель электропривода, снабженную системой управления.

Характеристический полином этой математической модели (модели в виде систем уравнений (3); (4); (5); (6)) равен следующему определителю:

$$\begin{vmatrix} m\lambda + k_0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda + 2 \\ k_1 & 1 & k_2 & k_3 \end{vmatrix} = (m\lambda + k_0 + k_1)(\lambda + 1)^2\,. \tag{7}$$

Из формулы (7) сразу видно, что при любых положительных коэффициентах m, k_0, k_1 все корни характеристического полинома вещественны и отрицательны. Это означает, что система устойчива и сохраняет эту устойчивость при вариациях параметров – механической постоянной времени m, коэффициентов k_0, k_1. Тем самым система обладает параметрической устойчивостью (напомним, что параметрически устойчивыми называют системы дифференциальных уравнений – и описываемые этими системами объекты – которые сохраняют устойчивость при вариациях параметров). Заметим, что коэффициенты k_2 и k_3 в уравнении (6) на устойчивость системы (3); (4); (5); (6) не влияют.

Совсем другая картина получается после эквивалентных преобразований, когда – при неизмеримости переменных x_3 и x_4 - их заменяют на переменные x_1, x_2 и их производные. Замена переменных производится так: из уравнения (3) следует (где $D = \dfrac{d}{dt}$ - оператор дифференцирования):

$$x_3 = (mD + k_0)x_1 - x_2\,. \tag{8}$$

С учетом уравнения (4) имеем:

$$x_4 = (mD^2 + k_0 D)x_1 - Dx_2 . \qquad (9)$$

Подставив (8) и (9) в уравнения (5) и (6), получим эквивалентную системе (3), (4), (5), (6) систему уравнений

$$\left[mD^3 + (2m + k_0)D^2 + (m + 2k_0)D + k_0\right]x_1 = (D^2 + 2D + 1)x_2 ; \qquad (10)$$

$$\left[k_3 mD^2 + (k_2 m + k_3 k_0)D + k_2 k_0 + k_1\right]x_1 = (k_3 D + k_2 - 1)x_2 . \qquad (11)$$

В системе (10) – (11) уравнение (10) – это уравнение объекта управления, уравнение электропривода, а уравнение (11) – это уравнение регулятора.

Важно отметить, что параметры электропривода в ходе его эксплуатации могут изменяться независимо от параметров регулятора – поскольку это два различных технических устройства.

Полезно начать с рассмотрения простейшего случая – предположим, что параметры регулятора остались неизменными и равными своим номинальным значениям (за номинальные значения параметров примем m = 1; k_0 = 2; k_1 = 1; k_2 = 2; k_3 = 1), а параметры электропривода изменились и стали равными: $m = 1 + \varepsilon$; $k_0 = 2 + \delta$, где ε и δ – числа, малые по сравнению с единицей. Если для этого простейшего, но вполне возможного сочетания вариаций параметров объекта управления и регулятора устойчивость исчезнет, то это означает, что система (10) – (11) заведомо не обладает параметрической устойчивостью. Напомним, что параметрически устойчивой называется система, в которой любое возможное сочетание вариаций коэффициентов и параметров не приводит к потери устойчивости.

Параметрическую устойчивость для рассматриваемого частного случая удобно проверить вычислением характеристического полинома системы (10) – (11) при условии, что параметры m, k_0, k_1, k_2, k_3 в уравнении (11) остались равными своим номинальным значениям. В этом случае характеристический полином будет равен определителю:

$$\begin{vmatrix} m\lambda^3 + (2m + k_0)\lambda^2 + (m + k_0)\lambda + k_0 & \lambda^2 + 2\lambda + 1 \\ \lambda^2 + 4\lambda + 5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \qquad . (12)$$
$$= (1 - m)\lambda^4 + (6 - 3m - k_0)\lambda^3 + (14 - 3m - 3k_0)\lambda^2 + (9 - m - 3k_0)\lambda + 5 - k_0$$

Если $m = 1 + \varepsilon$, а $k_0 = 2 + \delta$, то характеристический полином (12) принимает вид:

$$-\varepsilon\lambda^4 + (1 - 3\varepsilon - \delta)\lambda^3 + (5 - 3\varepsilon - 3\delta)\lambda^2 + (7 - \varepsilon - 3\delta)\lambda + 3 - \delta \qquad (13)$$

и подтверждает, что уже при сколь угодно малых вариациях параметра m устойчивость системы может исчезнуть, поскольку при $\varepsilon > 0$ нарушается необходимое условие устойчивости – положительность всех коэффициентов характеристического полинома (условие Стодолы).

При $\varepsilon > 0$ (т. е. при $m > 1$) в решениях уравнений (10) – (11) появляются стремительно растущие экспоненциальные члены вида $C_4 e^{t/\varepsilon}$. Отклонения частоты вращения и момента двигателя от номинальных значений (переменные x_1 и x_2) очень быстро нарастают.

В то же время при $\varepsilon = \delta = 0$ полином (13) является гурвицевым и совпадает с полиномом (7). Это еще раз подтверждает, что системы уравнений (3); (4); (5); (6) и (10) – (11) эквивалентны между собой (в классическом смысле) и получаются одна из другой эквивалентными преобразованиями.

В то же время задача проверки устойчивости для системы (3); (4); (5); (6) корректна, а для эквивалентной ей системы (10) – (11) – не корректна. Действительно, если в системе (10) – (11) $m = 1 + \varepsilon$, при $\varepsilon = 0$ система устойчива, но уже при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ система неустойчива. Таким образом эквивалентные преобразования изменили корректность решаемой задачи.

Этот пример (а в публикации [21] приведены и другие подобные примеры) сразу показывает, что существовавшее до 1998 года разделение всех задач математики, физики и техники на два класса – на класс корректных и класс некорректных задач – недостаточно. Существует еще один, причем очень коварный, третий класс - класс задач, меняющих свою корректность в ходе эквивалентных преобразований, используемых при их решении.

Коварство (и практическая значимость) третьего класса задач заключается в том, что для них традиционные методы решения, не учитывающие недавно открытых в СПбГУ новых свойств эквивалентных преобразований почти всегда приводят к неверному, ошибочному результату, а следствием ошибок в расчетах могут стать – и становятся – аварии и даже катастрофы.

Действительно, рассмотрим систему управления электроприводом, математической моделью которой служат уравнения (10) – (11). Для исследования устойчивости (и параметрической устойчивости) этой системы рекомендуется (и реализуется в пакетах прикладных программ *MATLAB, Mathcad,* и других) следующий подход: привести систему к нормальной форме и исследовать ее параметрическую устойчивость проверкой знаков вещественных частей корней характеристического полинома (7) при «покачивании» параметров исследуемого объекта или при покачивании коэффициентов характеристического полинома. При таком (рекомендуемом!) методе проверки при любом исследовании полинома (7) неизбежно будет сделано заключение о хорошей параметрической устойчивости рассчитываемой системы и она будет рекомендована к «воплощению в металле». На самом же деле запас устойчивости данной системы (запас по вариациям параметров) будет очень малым. Он будет определяться только малыми отклонениями реальных значений параметров от расчетных (если отклонений нет, то запас устойчивости обращается в нуль). В ходе эксплуатации, при неизбежном малом износе всех деталей, электропривод может в совершенно непредвиденный момент времени потерять устойчивость, «пойти вразнос» и привести к аварии, а то и к катастрофе, тот объект, на который он установлен. А ведь электроприводы устанавливаются на самых разных, в том числе и на очень ответственных объектах – на самолетах, кораблях, на атомных электростанциях и т. п. – и поэтому обеспечение надежности компьютерных вычислений и надежности технических расчетов в целом с учетом недавно открытых в СПбГУ новых свойств эквивалентных преобразований является важной практической задачей, поскольку помогает предотвратить опасные аварии и катастрофы.

Отметим сразу, что технические объекты, при расчете которых традиционные методы расчета (не учитывающие недавно открытых новых свойств эквивалентных преобразований) приводят к ошибкам, - встречаются редко – недаром их было предложено называть «особыми» объектами. Для большинства объектов традиционные расчеты дают верные результаты, что подтверждается и многолетней практикой. Точно также эквивалентные (равносильные) преобразования, повсеместно используемые при расчетах, только в редких случаях изменяют корректность решаемой задачи. Именно поэтому «особые» объекты и новые свойства эквивалентных преобразований были открыты так поздно – лишь в конце XX века (первая публикация – это книга [10], стр. 220 -230, опубликованная в 1987 году).

Редкость «особых» объектов создает трудности при внедрении усовершенствованных методов расчета, которые учитывают недавно открытые свойства эквивалентных преобразований и не приводят к ошибкам при встрече с «особыми» объектами.

Дело в том, что многие инженеры и исследователи за всю свою предыдущую жизнь ни разу не встречались с «особыми» объектами и они искренно не понимают, зачем нужно изучать усовершенствованные методы расчета, учитывающие возможность подобной встречи. Однако в последние десятилетия все шире используются методы оптимизации технических объектов, при использовании которых «особые» объекты встречаются много чаще. В главе 4 уже упоминалось о многочисленных авариях, происходивших при использовании одного из первых методов оптимизации – «аналитического конструирования оптимальных регуляторов», предложенного А. М. Летовым в 1960 г. (статьи [9]).

Несколько позже прекрасные оптимальные регуляторы, позволяющие существенно улучшить качество работы многих объектов, были предложены в работах В. Б. Ларина, К. И. Науменко, В. Н. Сунцева (публикация [22]), но непосредственная реализация этих регуляторов оказалась невозможной из-за того, что они часто приводили к появлению «особых» систем с неожиданными потерями устойчивости и прочими неприятностями, приводившими к авариям, и тем самым надолго подорвали репутацию оптимального управления в глазах инженеров.

Отказываться от оптимизации технических объектов, разумеется, не следует. Оптимизация позволяет создавать технические объекты с наилучшим возможным качеством их работы. А трудности, связанные с тем, что среди оптимальных систем более часто встречаются «особые» объекты следует преодолевать на основе методов, предложенных в настоящей книге, а ранее – публикациях [2; 3; 4; 10; 11; 19]. Отметим, что если ранее «особые» объекты помогала выявлять интуиция опытных инженеров, то после передачи расчетов на компьютеры встречи с «особыми» объектами стали наиболее опасными. «Особые» объекты встречаются редко, но почти каждая неожиданная встреча с подобным объектом приводит к аварии, а то и к катастрофе. Аварии и катастрофы тоже встречаются не очень часто, далеко не каждый день. Но мириться с ними нельзя. И уж тем более нельзя мириться с теми авариями, причина которых установлена и легко устранима. Именно так обстоит дело с авариями, происходящими из-за погрешностей в проектировании и расчете. Для их устранения достаточно использовать усовершенствованные методы расчета, что не требует сколько-нибудь существенных финансовых затрат. И, тем не менее, усовершенствованные методы применяются в настоящее время гораздо реже, чем это нужно. Некоторые причины этого будут рассмотрены в последующих разделах.

§2. Возможность проверки корректности по коэффициентам математической модели

Материал предыдущего раздела показывает, что наиболее надежным методом проверки корректности является анализ воздействия на решение параметров исследуемого объекта (для рассмотренного примера с системой управления электроприводом параметрами являются механическая постоянная времени m, коэффициенты усиления регулятора k_1, k_2, k_3). Однако коэффициенты окончательно выбранной математической модели, рассчитываемой на компьютере, могут довольно сложным образом зависеть от этих параметров (пример – зависимость коэффициентов уравнений (10) – (11) математической модели от параметров m, k_0, k_1, k_2, k_3).

Поэтому возникает вопрос – нельзя ли проверку корректности произвести просто, проверив влияние на решение уже не вариаций параметров объекта, а вариаций коэффициентов математической модели. Пусть поведение исследуемого объекта зависит от l параметров (m_1; m_2; …; m_l), а уравнения математической модели приведены к виду, зависящему от k коэффициентов (n_1; n_2; …; n_k). Пример: поведение рассмотренной в предыдущем разделе системы управления электроприводом зависит от пяти параметров: m, k_0, k_1, k_2, k_3, а в уравнения его математической модели – уравнения (10) – (11) – входят 13 коэффициентов. Каждый из коэффициентов n_1; n_2; …; n_k может оказаться функцией f_k от всех параметров объекта – т. е.

$$n_i = f_i(m_1; m_2; ...; m_l). \qquad (14)$$

Продифференцировав любое из равенств (14), получим равенства для первых дифференциалов:

$$dn_i = \sum_{j=1}^{l} \frac{df_i}{dm_j} dm_j . \qquad (15)$$

Если все функции (14) непрерывны по всем переменным, то из равенств (15) следует, что сколь угодно малым вариациям параметров соответствуют сколь угодно малые вариации коэффициентов n_i (то же справедливо и для частного случая, когда $\frac{df_i}{dm_j} = 0$ и коэффициент n_i не зависит от параметров, в этом случае его вариация и дифференциал dn_i равен нулю). В этом случае если при сколь угодно малом изменении хотя бы одного из коэффициентов решение изменяется на конечную (или, тем более, на сколь угодно большую) величину, то решение почти наверное некорректно. Для обеспечения большей надежности полезно, разумеется, проверить поведение решения при вариациях параметров объекта. Если же хотя бы одна из функций f_i не является непрерывной и при сколь угодно малых изменениях аргумента изменяется на конечную или на сколь угодно большую величину, то это означает, что сколь угодно малым изменениям параметров объекта соответствуют конечные (или сколь угодно большие) изменения коэффициентов математической модели, и это снова говорит о некорректности решения.

Таким образом, корректность решения может быть проверена по коэффициентам математической модели. Плохую или хорошую обусловленность решения проверить уже трудней, поскольку относительные изменения коэффициентов могут быть существенно больше (или меньше) изменений параметров объекта. Пример: при изменении коэффициента m в системе управления электроприводом от значения $m = 1$ до $m = 1{,}01$ – т. е. на 1% - первый коэффициент в уравнении (11) изменится от величины k_3 до $k_3 + 0{,}01k_3$ – т. е. на k_3%, или в k_3 раз больше, чем изменение параметра m.

§3. Аварии и катастрофы, связанные с несовершенством методов компьютерных вычислений. Их особенности

Причин аварий много. Одна из причин (как уже говорилось) – погрешности и неточности при проектировании и расчете. Какую долю составляют аварии, происходящие по этой причине, в общем количестве всех происходящих аварий? К сожалению, этот важнейший вопрос пока еще плохо исследован. Только недавно авторитетные специалисты из ЦНИИ ПСК имени Н. П. Мельникова и московского «Городского центра экспертиз» провели подобное исследование в области строительства. Они установили, что 9,3% всех обрушившихся зданий обрушились из-за ошибок при проектировании и расчете (опубликовано в «Приложении» к №192 газеты «Известия» от 17.10.06).

9,3% от общего числа аварий – это совсем не мало. Заметим, что это происходит в области гражданского строительства, где все конструкции сравнительно простые, методы расчета давно отработаны. В области автоматики, а также в авиации, доля аварий, происходящих из-за погрешностей и неточностей методов расчета гораздо выше. Поскольку сейчас большинство расчетов выполняется на компьютерах, то в настоящей книге говорится, прежде всего, о погрешностях и ошибках компьютерных вычислений и об обеспечении их надежности.

Одним из источников ошибок в компьютерных вычислениях является недооценка возможности существенного изменения запасов устойчивости решений при эквивалентных преобразованиях. До сегодняшних дней широко распространен не основанный ни на каких доказательствах предрассудок: якобы «эквивалентные преобразования ничего не меняют». Поэтому математическую модель проектируемого объекта с помощью эквивалентных преобразований спокойно приводят к наиболее удобной для исследования форме и уже по ней рассчитывают запасы устойчивости и надежной работы объекта при неизбежных в ходе эксплуатации объекта малых отклонениях его параметров от расчетных значений. При таком подходе нередко возникали ошибочные оценки допустимых отклонений параметров – об этом уже говорилось в предыдущих разделах – а ошибочные оценки приводили потом к авариям и катастрофам.

Проанализируем характерные черты таких аварий. Рассмотрим, для наглядности, частный случай – влияние на работу исследуемого объекта двух параметров – a_1 и a_2 (для электропривода это могут быть, например, механическая постоянная времени m и коэффициент усиления регулятора k_1 в уравнениях (10) и (11)). Рассмотрим координатную плоскость, где по осям $0x$ и $0y$ отложены отклонения этих параметров εa_1 и εa_2 от их номинальных значений (рисунок 4). Поскольку отклонения реальных параметров объекта от номинальных неизбежны и в ходе эксплуатации они с течением времени обычно постепенно возрастают, то поведение объекта на рис. 4 будет изображаться траекторией, выходящей изначала координат, из точки $\varepsilon a_1 = 0$; $\varepsilon a_2 = 0$, но которая с течением времени будет постепенно «раскручиваться» и все больше удаляться от начала координат. Поэтому при проектировании и расчете любого ответственного объекта рассчитывают область допустимых отклонений параметров a_1 и a_2 – таких отклонений, которые еще не приводят к нарушению нормальной работы объекта за нормативное время его эксплуатации. На рис. 4 эта область очерчена штрихпунктирной кривой. Величину этой области рассчитывают так, чтобы за нормативное время работы объекта (например, за 30лет) отклонения $a_1 - a_{1ном}$ и $a_2 - a_{2ном}$ заведомо не вышли за пределы этой области. Однако при неучете недавно открытых новых свойств эквивалентных преобразований расчет может оказаться ошибочным (в предыдущих разделах приводились примеры) и реальная область надежной работы проектируемого объекта может оказаться много меньше расчетной. На рис. 4 реальная область очерчена пунктиром. Как только траектория, изображающая на рис. 4 поведение объекта во времени, выйдет за пределы реальной области нормальной работы, очерченной пунктиром, произойдет авария. Если эта авария не перерастет в катастрофу (например, будет отключена защитой) и объект продолжит работу, то к моменту проверки объекта после аварии может оказаться, что траектория за это время снова войдет в безопасную область, очерченную на рис. 4 пунктиром, и тогда проверка покажет, что объект исправен и работает нормально!

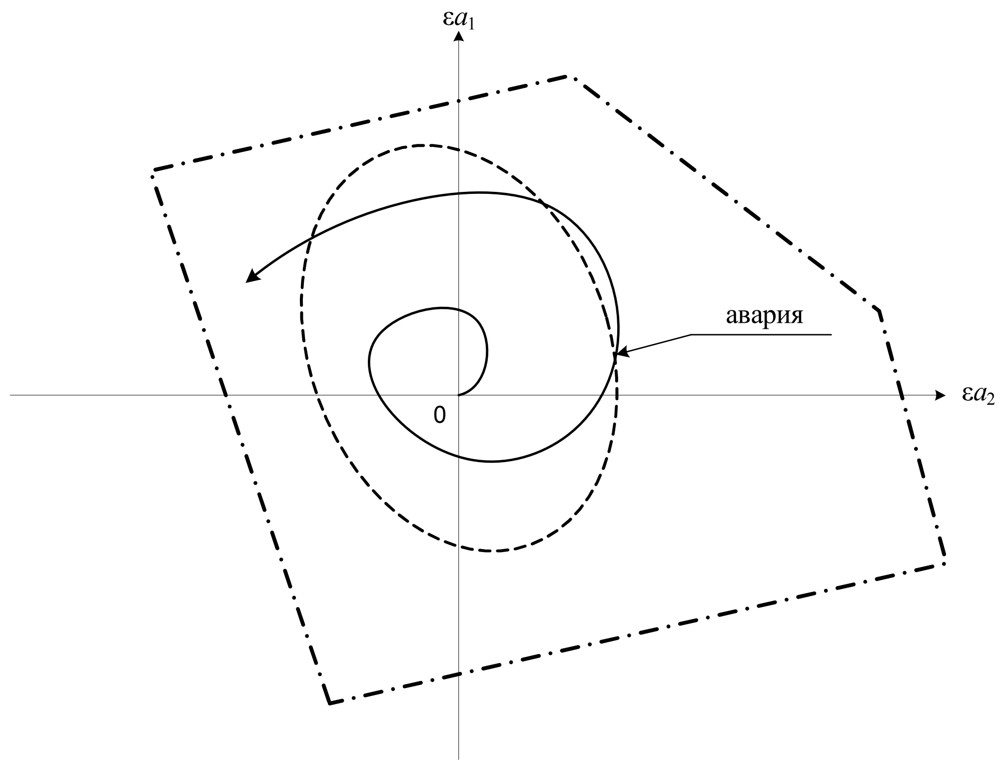


Рисунок 4

Таким образом, существует очень характерная особенность, выделяющая аварии, происходящие по причине неучета недавно открытых новых свойств эквивалентных преобразований от аварий, происходящих по другим причинам.

Другая характерная особенность: потеря устойчивости у «особых» объектов сопровождается очень быстрым, стремительным отклонением регулируемых величин от их нормальных значений. При анализе уравнений (10) – (11), (которые являются математической моделью одного из «особых» объектов) уже отмечалось, что после потери устойчивости в решениях x_1 и x_2 появляются стремительно растущие члены вида $C_4 e^{\frac{t}{\varepsilon}}$.

С учетом этих особенностей рассмотрим известные аварии аэробусов типа A-310. Это большие пассажирские самолеты, изготовленные на заводах объединенной франко-германской авиастроительной компании, головной офис которой расположен в г. Тулуза.

Одна из наиболее известных аварий самолетов этого типа произошла 22 марта 1994 года над городом Междуреченском (Россия), когда погибли все пассажиры и экипаж. Так называемые «черные ящики» (их правильнее называть бортовыми самописцами), в которых записываются параметры полета и переговоры экипажа, были найдены и расшифрованы. Это позволило установить, что до аварии и во время нее самолет шел в автоматическом режиме под управлением автопилота. Внезапно у самолета стали очень быстро нарастать отклонения крена и тангажа от нормальных значений. Пока экипаж пытался перейти с автоматического режима на ручное управление, отклонения возросли настолько, что ввести их в нормальные рамки уже не было возможности. Аэробус упал и разбился.

Несколько месяцев спустя другой аэробус *А*-310 летел вблизи Бухареста тоже в автоматическом режиме, под управлением автопилота. Так же внезапно стали нарастать отклонения крена и тангажа самолета от их нормальных значений. Однако на этот раз летчик сумел правильно отреагировать, быстро отключил автопилот и в режиме ручного управления успел выровнять самолет. Когда после благополучной посадки стали проверять автопилот и систему управления, то оказалось, что они в полном порядке и работают исправно.

Сопоставление этих фактов позволяет сделать вывод: система автоматического управления полетом (автопилот) аэробуса *А*-310 оказалась «особой» системой, имеющей малые запасы устойчивости по вариациям параметра автопилота и эти вариации стали причиной двух потерь устойчивости, одна из которых (над Междуреченском) закончилась гибелью пассажиров и экипажа. Как можно догадываться, расчет автопилота и системы управления производился на компьютерах с преобразованием уравнений его математической модели к нормальной форме Коши, что не позволило выявить опасные свойства проектируемой системы.

Расследование причин катастрофы над Междуреченском проводила комиссия Межгосударственного авиационного комитета (МАК), поскольку самолет был построен франко-германской компанией, но в том роковом полете его вел российский экипаж. От заключения МАК зависело, кто будет платить большие денежные компенсации родственникам погибших (примерно 70 миллионов долларов). Если МАК признает причиной аварии недостатки самолетных систем, то платить будет франко-германская фирма, если причиной катастрофы объявят ошибки экипажа, то платить будет Россия, ее бюджет. Поэтому расследование этой катастрофы (как, впрочем, и расследование почти всех других аварий и катастроф – смотри об этом книгу [26]) осложняется корыстной заинтересованностью влиятельных организаций и лиц, оказывающих серьезное влияние на расследующих – вплоть до дачи крупных взяток. Поэтому в ходе расследования часто не ищут истину, а ищут - кого удобнее обвинить. Чаще всего стараются возлагать вину на пилотов, особенно если они погибли и возразить не могут.

Так произошло при расследовании катастрофы *А*-310 над Междуреченском. Расследующие сумели найти зацепку: по записям бортовых самописцев было установлено, что экипаж пустил в кабину пилотов детей и, якобы, их «игры со штурвалом» стали причиной катастрофы. Но ведь те же бортовые самописцы неопровержимо показали, что самолет до аварии и во время ее шел под управлением автопилота и только поэтому экипаж пустил в пилотскую кабину детей и разрешил им «поиграть» с бездействующим в тот момент штурвалом. Хотя это было, разумеется, грубым нарушением летных правил и инструкций, но причиной катастрофы это стать не могло. Тем не менее, МАК объявил виновным российский экипаж, более 70 миллионов долларов пришлось заплатить России. Но главное, разумеется, не в деньгах. Главное в том, что, списав всю вину на погибших пилотов, разработчики самолета ушли от необходимости усовершенствовать методы расчета самолетных систем (с использованием уже открытых тогда новых свойств эквивалентных преобразований). А это привело к целой серии аварий самолетов *А*-310 и *А*-320. Эти аварии и катастрофы подробно описаны в [4], стр. 28-29. Это были катастрофы, которые вполне можно было предотвратить, жизни людей, которые можно было спасти.

А дальше идет самое интересное: после того, как в 1999 году вышло в свет первое издание книги [4], где была подробно, с доказательствами, раскрыта истинная причина катастрофы 1994 года над Междуреченском, МАК изменил свое заключение. Не имея возможности оспорить приведенную в [4] аргументацию и не желая остаться уж слишком явно пристрастной организацией, МАК снял вину с пилотов, признал, что причиной катастрофы были дефекты самолетных систем, малые запасы устойчивости в них. Но это признание МАК ото всех скрыл и держал в тайне до 2006 года. Тайну раскрыли журналисты (не знаю, как сумели они это сделать) и рассказ об изменившемся решении МАК был опубликован в газете «Известия» №139 от 03 августа 2006 года. Но поскольку новое «заключение» МАК было в свое время тщательно скрыто, то на методику расчета и проектирования оно не оказало влияния и катастрофы самолетов продолжались.

Автор остановился столь подробно на расследовании катастроф потому, что читателю этой книги не один раз придется читать или смотреть и слушать по телевизору различные «заключения» и нужно помнить об их частой пристрастности, односторонности. Нужно помнить, какие могущественные силы давят на специалистов, расследующих аварии, как трудно даже очень грамотным и опытным специалистам сохранять беспристрастность. Поэтому обычно истинные причины аварий и катастроф выявляются лишь через годы, иногда – через много лет.

Характерный пример – гибель 3 июня 1973 года сверхзвукового пассажирского самолета ТУ-144. Этот самолет был гордостью тогдашнего руководства Советского Союза, должен был превзойти англо-французский «Конкорд», был послан для показа и демонстрации своих возможностей на крупнейший авиасалон под Парижем – и при первом же демонстрационном полете с аэродрома в Ле-Бурже потерял устойчивость и разбился. Каких только причин этой катастрофы не выдвигали в те годы! И лишь через 34 года Н. Упоров и А. Бурцев, много лет проработавшие в КБ Туполева, рассказали об истинной причине – о сбое в работе автоматики самолета, из-за чего самолет – подобно А-310 над Междуреченском – вошел в резкое пике, а при выходе из него получил критические перегрузки и разрушился в воздухе (их рассказ опубликован в газете «Известия» от 06. 07. 2002 года); еще раз причиной стал сбой в системах управления. Вполне возможно, что для ТУ-144 эти системы проектировались на основе методики «аналитического конструирования» А. М. Летова, очень популярной в те годы. При ее использовании – как уже рассказывалось в §3 третьей главы – особенно часто возникали «особые» системы с малыми запасами устойчивости, не выявляемые при расчете, поскольку новые свойства эквивалентных преобразований и, в частности, их способность изменять запасы устойчивости решений и запасы устойчивости самолетных систем, в те годы еще не были открыты.

§4. Объяснение трудностей выявления новых свойств эквивалентных преобразований и существования «особых» систем

Читателю может показаться странным – почему новые свойства эквивалентных преобразований, возможность изменения важных свойств решений при этих преобразованиях, были открыты так поздно – лишь в конце двадцатого века. Главная причина заключалась в том, что хотя эквивалентными преобразованиями уравнений математики пользовались еще с девятого века (да, именно с девятого века, еще со времен аль-Хорезми (787-850)), очень долго обращалось внимание только на то, что эквивалентные преобразования не изменяют решений уравнений. Постепенно сложилось даже распространенное до сих пор убеждение, что «эквивалентные преобразования ничего не меняют» и поэтому ими можно пользоваться безо всяких оговорок. Очень долго – до последнего десятилетия двадцатого века – не замечалось, что, не изменяя самих решений как таковых, эквивалентные преобразования могут изменить многие важные свойства решений – такие, как корректность, параметрическая устойчивость, запасы устойчивости и т. д.

А не замечалось все это так долго просто потому, что чаще всего эквивалентные преобразования действительно «ничего не меняют» (поэтому и сложилось убеждение в этом), а преобразования, изменяющие корректность, параметрическую устойчивость и т. п. встречаются редко. Именно поэтому их долго не замечали.

Затем опасные аварии, происходившие в 60-х годах двадцатого века с объектами, на которых устанавливались «аналитически сконструированные» регуляторы, заставили особенно внимательно изучить явления, происходящие при таких эквивалентных преобразованиях, как замены неизмеряемых переменных систем управления на комбинации измеряемых переменных. Возникавшие при этих преобразованиях сложности поясним на примере систем управления третьего порядка вида:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1 u; \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2 u; \\ \dot{x}_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3 u; \\ u &= -k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_3 x_3. \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

В системе (15) первые три уравнения – это уравнения объекта управления, четвертое уравнение – это уравнение регулятора, выбранного согласно методике «аналитического конструирования» как линейная функция всех трех переменных x_1; x_2; x_3, описывающих состояние объекта управления. Конкретные величины коэффициентов k_1; k_2; k_3 выбираются по методике, предложенной А. М. Летовым в работе [9].

Если не все переменные x_1; x_2; x_3 были доступны для измерения и использования в регуляторе, то их – как уже говорилось – исключали из уравнений (15) путем эквивалентных преобразований и приходили к регуляторам, использующим только доступные переменные.

При этом неожиданно оказалось, что разные эквивалентные преобразования, разные пути исключения переменных ведут системам управления, различающимся по запасам устойчивости при вариациях параметров. В этом нет противоречия – различные эквивалентные преобразования приводят к эквивалентным системам управления, приводят к системам с одним и тем же характеристическим полиномом, с одними и теми же решениями $x_1(t)$; $x_2(t)$; $x_3(t)$; $u(t)$. Это бесспорно. Но эти эквивалентные системы, полученные различными эквивалентными преобразованиями, могут различаться между собой по свойствам решений – и, в частности, - по параметрической устойчивости, по запасам устойчивости при вариациях параметров.

Это обстоятельство очень затрудняло исследование свойств эквивалентных преобразований и признание результатов этих исследований.

Часто возникала такая ситуация, когда один исследователь применял какой-либо из методов исключения неизмеряемых переменных и приходил к системе управления, не обладающей параметрической устойчивостью. Второй исследователь, изучая тот же технический объект, использовал другой метод исключения неизмеряемых переменных, получал систему управления, обладающую прекрасной параметрической устойчивостью, и объявлял, что первый исследователь ошибся (а первый отвечал, что ошибся не он, а второй исследователь). Возникала путаница, и распутать в те годы ее было не легко. Кроме того, обнаружилось существование таких систем управления вида (15), в которых самые различные методы исключения переменных не влияли на конечный результат и всегда приводили к замкнутым системам, одинаково не обладающим параметрической устойчивостью (все зависело от величины коэффициентов a_{ij} и b_i в уравнениях (15)). Более подробно эти тонкие вопросы, долго затруднявшие получение ясных и понятных результатов исследования, изложены в книге [4], стр. 88-111.

Еще одна существенная трудность возникла при анализе влияния изменения параметров различных математических моделей на их устойчивость. В §1 настоящей главы, при исследовании влияния параметров электропривода с простой математической моделью в виде уравнений (3) – (6) на его параметрическую устойчивость, было ясно установлено, что формальное математическое исследование эквивалентного преобразования (исключения переменных x_3 и x_4) и его влияния на параметрическую устойчивость приводит к совершенно неверному заключению. Для получения правильного результата было необходимо правильно учитывать взаимные отношения возможных вариаций коэффициентов математических моделей различных частей и элементов рассматриваемого технического объекта (в частном случае, рассмотренном в §1, следовало учитывать возможную независимость вариаций таких элементов, как исполнительный электропривод и его регулятор).

Таким образом, хотя исследование свойств эквивалентных преобразований является вопросом прикладной математики, и решение его требует, прежде всего, математических знаний, но правильное решение вопроса требует также и технических знаний. Математики чаще всего техническими знаниями не обладают – возможно, что этим и объясняется столь позднее обнаружение новых свойств эквивалентных преобразований.

Еще одним затрудняющим фактором стала путаница с так называемыми «сингулярно-возмущенными» уравнениями. Вернемся еще раз к уравнениям (10) – (11) настоящей главы, и напомним, что уравнение (10) описывает электродвигатель, а уравнение (11) – его регулятор. Рассмотрим, как и ранее, тот вполне возможный случай, когда параметры регулятора остались равными своим расчетным значениям (т. е. $k_1 = 1$; $m = 1$; $k_2 = 2$; $k_3 = 1$), а в уравнении электродвигателя (10) коэффициент k_0 остался прежним ($k_0 = 2$), а параметр m (механическая постоянная времени) изменился на малую величину ε и стал равным 1 + ε. Исключив переменную x_2 из системы (10) – (11), получим следующее дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$\left[-\varepsilon D^4 + (1-3\varepsilon)D^3 + (5-3\varepsilon)D^2 + (7+\varepsilon)D + 3\right]x_1 = 0\,, \tag{16}$$

т. е. получим уравнение с малым коэффициентом при старшей производной. К подобным уравнениям часто приходим и для многих других «особых» объектов. Но уравнения с малыми коэффициентами (малыми параметрами) при старших производных изучаются давно и получили специальное название: «сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения».

Это обстоятельство направило многих исследователей по ложному пути. Дело в том, что решения сингулярно возмущенных уравнений, соответствующие ε = 0 и ε ≠ 0 (каким бы малым не было ε) часто различаются очень сильно, и это понятно, поскольку переход от нулевого значения коэффициента при старшей производной к значению ε ≠ 0 изменит порядок уравнения, а решения уравнений разных порядков чаще всего отличаются друг от друга коренным образом – и это совершенно понятно, и сомнений не вызывает. Простейший пример: уравнение

$$\varepsilon\dot{x} - x = 0 \tag{17}$$

является уравнением первого порядка и имеет решение:

$$x = C_0 e^{\frac{t}{\varepsilon}}\,. \tag{18}$$

При малых ε это решение является очень быстро растущей функцией. В то же время при ε = 0 уравнение (17) переходит в дифференциальное уравнение нулевого порядка (уравнение, не содержащее производных можно считать и называть уравнением нулевого порядка), переходит в уравнение

$$-x = 0 \tag{19}$$

и решение $x = 0$ уравнения (19) не имеет, естественно ничего общего с решением (18) уравнения (17) даже при самых малых значениях параметра ε. Точно также решения уравнения второго порядка

$$\varepsilon\ddot{x} + \dot{x} + x = 0 \tag{20}$$

при $\varepsilon \neq 0$ имеют очень мало общего с решениями уравнения первого порядка

$$\dot{x} + x = 0, \tag{21}$$

какой бы малой не была величина ε.

В то же время решения уравнения

$$(1+\varepsilon)\dot{x} + x = 0, \tag{22}$$

не являющегося сингулярно возмущенным, имеют вид

$$x = C_0 e^{\frac{t}{1+\varepsilon}} \tag{23}$$

и при малых ε они очень мало (для любых t) отличаются от решений, соответствующих $\varepsilon = 0$.

Во избежание недоразумений нужно очень четко различать малые абсолютные вариации и малые относительные вариации – т. е. вариации, малые по отношению к начальному значению коэффициента или параметра. Так, например, вариация $\varepsilon = -9\cdot10^{-8}$ мала в сравнении с единицей, но если начальное значение коэффициента $a_0 = 10^{-7}$, то вариация $\varepsilon = -9\cdot10^{-8}$ изменит этот коэффициент в 10 раз – по отношению к a_0 это будет не малое, а большое изменение.

Если же начальное значение коэффициента было равно нулю, то прибавление к нему малой по абсолютной величине вариации ε изменит коэффициент (условно говоря) в «бесконечно большое число раз».

Отсутствие четкого различения относительных и абсолютных вариаций ведет к путанице – (которая и проявилась наглядно при первых обсуждениях публикации [3]) – именно поэтому в §1 второй главы было строго оговорено, что в дальнейшем изложении не будут рассматриваться «вариации нуля», не будут рассматриваться те объекты, в которых какой-либо коэффициент исходной математической модели равен нулю, а после вариации принял хоть малое, но не равное нулю значение. Такие объекты существуют, но в настоящей книге они не рассматриваются.

Рассматриваются только относительные вариации, рассматриваются только такие объекты, в математической модели которых если исходное значение какого-либо коэффициента или параметра равно, например, a_i, то его значение после вариации равно $a_i(1 + \varepsilon_i)$, где ε_i – число, малое в сравнении с единицей. Такое ограничение в предмете исследования связано с тем, что когда какой-либо нулевой коэффициент математической модели объекта станет ненулевым (пусть даже малым), то свойства и поведение объекта, как уже говорилось, могут измениться очень существенно – в этом нет ничего удивительного; это давно известно и исследовалось, в частности и на основе теории «сингулярно возмущенных» уравнений. В то же время при относительной вариации при переходе от значений коэффициентов a_i к значениям $a_i(1 + \varepsilon_i)$ естественно ожидать, что при малых ε_i свойства объекта изменятся мало. И чаще всего это действительно так. Собственно, на этом и держится вся современная техника, поскольку переход от значений коэффициентов и параметров a_i к значениям $a_i(1 + \varepsilon_i)$ в ходе эксплуатации объекта почти всегда неизбежен. Если бы при таких переходах свойства многих объектов менялись коренным образом, вся сегодняшняя техника развалилась бы. Однако опасные объекты, которые при малых относительных вариациях параметров (именно относительных, а не абсолютных!) при переходах от значения a_i к значению $a_i(1 + \varepsilon_i)$ существенно меняют свои свойства, все же существуют, хотя и встречаются не часто. Их поведение, действительно, похоже на поведение «сингулярно возмущенных» систем, хотя «сингулярно возмущенными» они не являются.

Кроме того, у ряда подобных объектов их описанные свойства не выявляются традиционными методами расчета. Такие объекты, которые, во-первых, могут существенно изменять свое поведение при малых относительных вариациях и, во-вторых, это опасное свойство не выявляется традиционными методами расчета, не учитывающими недавно открытых новых свойств эквивалентных преобразований – были названы «особыми» объектами.

Встречаются эти объекты не очень часто, поэтому и были открыты поздно, но они заслуживают самого серьезного внимания и изучения, поскольку каждая неожиданная встреча с подобным объектом может стать – и уже не раз становилась – причиной аварий и катастроф. Об этом более подробно рассказано в [4].

Детальное исследование и четкое понимание коренных отличий между относительными и абсолютными вариациями коэффициентов и параметров важно потому, что даже в серьезных и аргументированных книгах и пособиях, посвященных точности и надежности вычислений, относительные и абсолютные вариации иногда не различаются (что и приводит к путанице), а их надо обязательно различать. Математические модели, в которых допускаются «вариации нуля» и модели, где «вариации нуля» не допускаются, описывают разные классы объектов. Эти классы объектов обладают существенно различающимися свойствами, поэтому и методы исследования не совпадают и не могут совпадать. Смешение этих совершенно различных объектов и их математических моделей надолго задержало открытие «особых» объектов и открытие новых свойств эквивалентных преобразований.

§5. Необходимость исследования «триад»

Еще одной трудностью проблемы обеспечения надежности компьютерных расчетов явилась сложность выявления тех эквивалентных преобразований, которые изменяют свойства решений преобразуемых систем и, в частности, их корректность. Чаще всего эквивалентные преобразования корректности решений не изменяют, но встречаются (и являются очень важными!) случаи изменения корректности решений. В публикации [4] было предложено разделить эквивалентные (равносильные) преобразования на два класса:

1. преобразования, эквивалентные в классическом смысле – т. е. преобразования не изменяющие решений;

2. преобразования, эквивалентные в расширенном смысле – т. е. преобразования, которые, во-первых, эквивалентны в классическом смысле и, во-вторых, не изменяют корректности решений.

Если бы удалось найти простые критерии различения одних преобразований от других, то проблема обеспечения надежности компьютерных вычислений решалась бы легко: достаточно было бы при любых вычислениях использовать только преобразования, эквивалентные в расширенном смысле, а преобразования, эквивалентных в классическом смысле, но не в расширенном всячески избегать.

Однако оказалось, что в зависимости от решаемых задач и рассматриваемых математических моделей даже самые простые и «невинные» преобразования могут оказаться эквивалентными в классическом смысле, но не в расширенном.

Вот простой пример: система уравнений

$$(D^3 + 4D^2 + 5D + 2)x_1 = (D^2 + 2D + 1)x_2\,; \tag{24}$$

$$(D^2 + 4D + 5)x_1 = (D + 1)x_2 \tag{25}$$

описывает, как уже указывалось ранее, переходные процессы в системе управления частотой вращения электропривода, причем, x_1 – это отклонение частоты вращения от номинальной, x_2 – отклонение вращающего момента от номинального.

Введем теперь новые переменные, определив их равенствами

$$x_3 = \dot{x}_1 + 2x_1 - x_2; \tag{26}$$

$$x_4 = \dot{x}_3. \tag{27}$$

Относительно новых переменных уравнение (24) перейдет в систему трех уравнений первого порядка:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + x_2 + x_3; \\ \dot{x}_3 &= x_4; \\ \dot{x}_4 &= -x_3 - 2x_4. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Теперь преобразуем уравнение (25). Преобразования будут заключаться только в разбиении членов – член $4Dx_1$ будет преобразован в сумму $2Dx_1 + 2Dx_1$ – и переносе членов из одной части равенства в другую с изменением знака. Эквивалентность этих простейших преобразований никаких сомнений не вызывает. Проделав их, преобразуем уравнение (25) к виду:

$$[(D^2 + 2D)x_1 - Dx_2] + [2D + 4 - 2x_2] + x_1 = -x_2. \tag{29}$$

Теперь, сопоставляя (29) с равенствами (26) и (27) убеждаемся, что стоящее в первой квадратной скобке соответствует переменной x_4, второй квадратной скобке соответствует $2x_3$, а в целом уравнение (29) может быть записано в виде:

$$x_2 = -x_1 - 2x_3 - x_4, \tag{30}$$

т. е. оно переходит в дифференциальное уравнение нулевого порядка, в соотношение между переменными, не содержащее производных.

Подставив значение x_2 из (30) в первое из уравнений(28), получим для переменных x_1, x_3 и x_4 нормальную форму Коши:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -3x_1 - x_3 - x_4; \\ \dot{x}_3 &= x_4; \\ \dot{x}_4 &= -x_3 - 2x_4; \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

т. е. систему из трех уравнений первого порядка для трех переменных x_1, x_3 и x_4.

Таким образом, уравнения системы управления электроприводом могут быть записаны либо в виде системы уравнений (24) – (25), либо в виде эквивалентной ей системы из уравнений (28) и (30), или в виде системы (31) – эквивалентной и той и другой системам. Все три системы уравнений имеют один и тот же характеристический полином. Действительно, для системы (24) – (25) это будет полином:

$$\begin{vmatrix} \lambda^3+4\lambda^2+5\lambda+2 & \lambda^2+2\lambda+1 \\ \lambda^2+4\lambda+5 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^3+5\lambda^2+7\lambda+3\,. \qquad (32)$$

Для системы (28) – (30) это будет тот же полином:

$$\begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda+2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^3+5\lambda^2+7\lambda+3 = (\lambda+3)(\lambda+1)^2\,, \qquad (33)$$

а для системы (31) снова имеем тот же самый характеристический полином

$$\begin{vmatrix} \lambda+3 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+3)(\lambda+1)^2 = \lambda^3+5\lambda^2+7\lambda+3\,. \qquad (34)$$

Можно и непосредственно проверить, что, например, решение $x_1(t)$ и для системы (24) - (25), и для системы (28) – (30), и для системы (31) одинаково имеет вид

$$x_1 = C_1e^{-3t} + (C_2t + C_3)e^{-t}\,, \qquad (35)$$

где постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3 зависят от начальных условий и определяются ими.

Таким образом, мы убеждаемся, что совершенно элементарные, безусловно эквивалентные (в классическом смысле) и не вызывающие никаких сомнений простейшие преобразования (разбивка члена $4Dx_1$ на сумму $2Dx_1 + 2Dx_1$; перенос членов из левой части уравнения в правую с изменением знака) могут изменить корректность решения и относятся к преобразованиям, эквивалентным в классическом смысле, но не в расширенном.

Поэтому вряд ли можно надеяться найти простой критерий выделения преобразований, эквивалентных в расширенном смысле. Большие усилия в поисках этого критерия, предпринимавшиеся в 1994 – 2003 годах, не привели к успеху.

Для обеспечения надежности компьютерных вычислений нужно проверять корректность решений у математической модели в наибольшей мере соответствующей физическому смыслу решаемой задачи. Проверка корректности по математической модели, приведенной эквивалентными преобразованиями к наиболее удобной для исследования форме, может дать неверный ответ – даже если эта форма получена из исходной совершенно эквивалентными (в классическом смысле) преобразованиями.

Так, например, корректность решения задачи об устойчивости частоты вращения $x_1(t)$ в системе управления электроприводом следует исследовать по математической модели в виде системы уравнений (24) – (25). Исследование по математической модели в виде системы уравнений (31) не дает правильного результата, несмотря на то, что системы (24) – (25) и (31) эквивалентны (в классическом смысле) по отношению к переменной $x_1(t)$ и решения $x_1(t)$ в системах (24) – (25) и (31) – тождественны.

Это обстоятельство важно подчеркнуть потому, что оно до сих пор не оговаривается в учебных курсах, посвященных инженерным расчетам и компьютерным вычислениям. Не используется оно и при составлении компьютерных программ и пакетов таких программ. Корректность решений проверяют (если вообще проверяют) по наиболее удобной для исследования форме математической модели, и это может приводить к ошибочным заключениям.

Непосредственная проверка корректности решения конкретной системы уравнений может потребовать (как об этом уже говорилось в главе первой) большого объема вычислений и поэтому желательно выделить такие классы задач, для которых корректность уже проверена и поэтому корректность каждой отдельной конкретной задачи можно не проверять.

Это можно сделать в рамках «триады». Триадой мы назовем совокупность из следующих трех элементов:

1. исследуемая математическая модель;

2. поставленная при ее исследовании задача;

3. используемый метод решения.

Диадой назовем совокупность из математической модели и поставленной при ее решении задачи (для случаев, когда метод решения можно не учитывать).

§6. Примеры различных «триад» и «диад»

Первая триада: проверка устойчивости

Элементы триады:

1. Исследуемая математическая модель: система линейных дифференциальных уравнений различных порядков с постоянными коэффициентами.

2. Поставленная задача: проверить устойчивость этой системы.

3. Метод решения: вычисляется характеристический полином системы и его корни. Если у всех корней вещественные части отрицательны, то традиционно делается заключение об устойчивости системы.

В данной триаде заключение будет надежным и достоверным не всегда, не для всех систем, поскольку существуют – как уже было показано – такие «особые» системы, у которых все корни имеют отрицательные вещественные части и которые, тем не менее, становятся неустойчивыми при сколь-угодно малых, неизбежных на практике, отклонениях коэффициентов от расчетных значений.

Заметим, что формально, с чисто математической точки зрения заключение об устойчивости будет верным всегда: отрицательные вещественные части у всех корней говорят о том, что если коэффициенты системы идеально точно равны своим расчетным значениям, то решения устойчивы. Однако система, способная терять устойчивость при сколь-угодно малых, а значит неизбежных на практике вариациях параметров ничуть не лучше неустойчивой и даже опаснее нее.

Вторая триада: проверка устойчивости другим методом

Математическая модель и поставленная задача – те же, что и в первой триаде.

Метод решения: вычисление характеристического полинома и его корней дополняются проверками: 1. не является ли степень характеристического полинома ниже, чем порядок системы (проверка вырожденности); 2. не является ли какой-либо из коэффициентов характеристического полинома малой разностью больших чисел – настолько малой, что при неизбежных на практике величинах вариаций этих больших чисел, коэффициент характеристического полинома может изменить свой знак. Только в том случае, если обе проверки дали отрицательный результат, компьютерное вычисление характеристического полинома приводит к надежному заключению об устойчивости системы. Традиционные методы расчета устойчивости, без упомянутых дополнительных проверок, надежности и достоверности компьютерных вычислений не обеспечивают.

Третья триада: использование функций Ляпунова

Математическая модель: система нелинейных дифференциальных уравнений различных порядков.

Поставленная задача: определить - устойчивы ли решения этой системы?

Метод решения: преобразовав систему к нормальной форме Коши, пытаемся построить функцию Ляпунова для данной системы. Если функция Ляпунова построена, то традиционно делается заключение об устойчивости нулевого решения системы, а исследование любого решения может быть сведено к исследованию устойчивости нулевого решения.

В данной триаде традиционное заключение об устойчивости нулевого решения – как ранее было показано – не всегда, не для всех систем является надежным, поскольку существуют системы, для которых построена функция Ляпунова, но которые становятся неустойчивыми при сколь угодно малых, неизбежных на практике, вариациях коэффициентов системы уравнений или параметров объекта, математическая модель которого исследуется.

Четвертая триада: вычисление собственных значений

Исследуемая математическая модель: система из n линейных однородных алгебраических уравнений с параметром λ, типа системы

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = \lambda x_1; \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = \lambda x_2; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0. \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

Отметим, что в систему (36) входит $n - r$ уравнений с правыми частями, содержащими параметр λ, и входят также r уравнений, не содержащих параметра λ; их правые части равны нулю.

В векторно-матричных обозначениях систему равнений (36) можно записать в виде:

$$(A - \lambda \overline{E})X = 0, \qquad (37)$$

где X – вектор переменных x_1; x_2; ….; x_n, A – квадратная матрица коэффициентов, $\overline{E}$ - квазиединичная матрица – т. е. матрица, у которой все элементы, кроме стоящих на главной диагонали – нули, а на главной диагонали стоят $n - r$ единиц и r нулей. При $r = 0$ матрица $\overline{E}$ переходит в известную единичную матрицу E.

Поставленная задача: найти собственные значения параметра λ – т. е. значения, при которых система (36) имеет ненулевые решения x_i.

Метод решения: последовательное исключение переменных из системы (36) до тех пор, пока не останется последнее уравнение для переменной x_n:

$$M(\lambda)x_n = 0, \qquad (38)$$

где $M(\lambda)$ – полином, среди корней которого находятся собственные значения.

Данная триада приводит (как показано в [4]) к некорректным заключениям о собственных значениях системы (36).

Если изменить третий пункт триады, изменить метод решения, а именно, пользуясь уравнениями, не содержащими λ, выразить одни переменные через другие и придти в результате к системе из меньшего числа уравнений, но в которой уже каждое из уравнений содержит параметр λ, и лишь затем приступать к последовательному исключению переменных, то в этом случае собственные значения будут (как показано в [4]), корректны.

Данный пример иллюстрирует необходимость уточнения используемых алгоритмов при переходе на компьютерные вычисления: в «эпоху ручного счета» при встрече с системами типа (36) начинали, разумеется, с уравнений, не содержащих параметра λ. Пользуясь ими, уменьшали число переменных и число уравнений, приходили к системе из меньшего числа уравнений, в каждое из которых входил параметр λ, и лишь затем начинали последовательно исключать переменные. Такой метод вычислений был удобен при ручном счете и к некорректностям не приводил. Поэтому задача о вычислении собственных значений традиционно считалась корректной.

Однако для машинного счета этот метод не очень удобен, поскольку требует использования двух разных программ. Для компьютера удобнее по единой программе исключать переменные одну за другой из исходной системы. Не сразу было замечено, что этот, удобный для компьютера алгоритм, приводит к некорректным собственным значениям – как это более подробно рассмотрено в [4].

Заметим, что если параметр λ входит в каждое их уравнений системы, то задача об отыскании собственных значений λ называется классической задачей о собственных значениях, а если в некоторые из уравнений параметр λ не входит, то та же задача называется обобщенной задачей об отыскании собственных значений. И классическая, и обобщенная задача о собственных значениях часто встречаются в приложениях. Они подробно изучались еще в девятнадцатом веке. Некорректность решения обобщенной задачи при прямолинейном использовании компьютера для последовательного исключения переменных из исходной системы, была замечена совсем недавно (смотри [4]). Для обеспечения надежности компьютерных вычислений в данном случае достаточно свести обобщенную задачу о собственных значениях к классической. Если предметом исследования является система из n линейных однородных алгебраических уравнений, из которых $n - r$ уравнений содержат параметр λ, а r уравнений его не содержат, то нужно преобразовать эту систему в систему из $n - r$ уравнений, каждое из которых содержит λ. Приходим тем самым к классической задаче о собственных значениях, которую можно решать путем последовательного исключения переменных. При таком методе вычислений некорректности решений (как показано в [4]) не будет.

Пятая триада: численное решение систем дифференциальных уравнений

Математическая модель: система обыкновенных дифференциальных уравнений различных порядков, в общем случае, - нелинейных.

Поставленная задача: нахождение численного решения системы при заданных начальных условиях.

Метод решения: после приведения системы к нормальной форме Коши используются готовые программы численного решения, приведенные в *MATLAB*, *Mathcad* или других пакетах.

Полученное данным методом решение не всегда будет корректным. Для некоторых, заранее не известных, систем реальное поведение объекта исследования может коренным образом отличаться от рассчитанного при сколь угодно малых, неизбежных на практике, отклонениях коэффициентов системы от принятых при расчете. Для обеспечения надежности вычислений необходимо предварительно проверить – не являются ли решения исследуемой системы некорректными или плохо обусловленными.

Шестая триада: решение с дополнительными проверками

Математическая модель и поставленная задача остаются теми же, что для пятой триады. Метод решения дополняется проверками: 1. не является ли исследуемая система вырожденной; 2. не оказался ли определитель, составленный из старших членов уравнений системы малой величиной – настолько малой, что он может изменить знак при возможных вариациях коэффициентов. Подобная проверка существенно уменьшает возможность появления неожиданных некорректных решений.

Седьмая триада: дифференциальные уравнения, частные случаи

Математическая модель: системы, состоящие из n уравнений первого порядка или одно уравнение n – го порядка. Правые части удовлетворяют условиям Липшица.

Поставленная задача: найти численное решение при заданных начальных условиях.

Метод решения: использование стандартных компьютерных программ.

В этом частном случае решения корректны, зависят от коэффициентов и параметров непрерывно.

Восьмая триада: интегральные уравнения

Математическая модель: интегральное равнение Вольтерра первого рода – т. е. уравнение

$$\int_a^x K(x;s)y(s)ds = f(x)\,. \qquad (39)$$

Как известно, к математической модели в виде уравнения (39) водятся многие важные задачи физики и техники.

Поставленная задача: решить уравнение (39) - т. е. найти искомую функцию $y(s)$ по заданной правой части $f(x)$ и ядру $K(x;\, s)$.

Метод решения: переход путем эквивалентных преобразований от уравнения Вольтерра к более простому уравнению Фредгольма с последующим решением этого уравнения.

Профессор В. С. Сизиков впервые обнаружил, что в данной триаде получается некорректное решение, и что причиной некорректности является то, что преобразование уравнения Вольтерра в уравнение Фредгольма является преобразованием, эквивалентным в классическом смысле, но не в расширенном. Это преобразование изменяет корректность решения.

Более подробно эта триада и методика получения надежного результата компьютерных вычислений при решении интегральных уравнений рассмотрены проф. В. С. Сизиковым в учебном пособии [19] на стр. 145 – 147.

<u>Первая диада: вещественные корни полиномов</u>

Для ряда частных случаев корректность или некорректность решения не зависит от используемого метода. В этом случае достаточно сформулировать результат исследования для комплекса из двух элементов:

1. математическая модель;

2. поставленная при ее решении задача.

Этот комплекс будем называть диадой.

Первый пример диады:

Математическая модель: полином степени n с вещественными коэффициентами.

Поставленная задача: вычисление вещественных (и только вещественных!) корней полинома. Значимость этой задачи определяется тем, что для многих объектов исследования физический смысл имеют только вещественные корни. Наличие одних комплексных корней говорит в данном случае о том, что поставленная задача не имеет решения.

Из материала, приведенного в §2 главы второй, следует, что если вещественные корни не являются кратными, то решение корректно. Если же корни кратные, то решение не корректно и физического смысла чаще всего не имеет: при сколь угодно малых вариациях коэффициентов любая пара вещественных кратных корней может исчезнуть, корни станут комплексными.

Об этом простом и в общем известном обстоятельстве полезно напомнить потому, что даже в подробных руководствах по методике вычислений часто забывают упомянуть о некорректности решения в случае кратных корней.

<u>Вторая диада: комплексные корни полиномов</u>

Математическая модель - та же, что и в первой диаде.

Поставленная задача: вычисление корней, вещественных или комплексных.

Решение это задачи – всегда корректно. При малых изменениях коэффициентов полинома положение его корней на комплексной плоскости изменяется мало. Проверку корректности решения для каждого отдельного полинома можно не производить.

<u>Третья диада: задача на максимум и минимум</u>

Математическая модель: в данном случае может быть любой.

Поставленная задача: найти максимум или минимум.

Разнообразным задачам на максимумы и минимумы и методам их решения при обучении студентов уделяется большое внимание (и это правильно), но часто забывают указать, что привычные формулировки решений часто не имеют физического смысла и на практике могут привести к конфузу.

Вот простой пример: надо найти минимум длины изгороди, способной огородить участок произвольной формы площадью S. Это известная «задача Дидоны», решение которой было известно еще в Древней Греции. Действительно, из всех замкнутых кривых заданной длины наибольшую площадь ограничивает окружность. Поэтому, если требуется огородить участок площадью S, то лучше всего, если этот участок имеет форму круга и наименьшая длина изгороди в этом случае равна $L_{\min} = 2\sqrt{\pi}\sqrt{S}$. Если S = 100 м^2, то L = 35,448 метра (если участок имеет форму квадрата, то L_{min} = 40 метров.

Однако, это совсем не значит, что минимальный элемент – изгородь, длиной 35,448 метра – даст реальное решение поставленной задачи.

Дело в том, что исходные данные – в данном случае S = 100 м^2 – как и почти во всех практических задачах – известны с ограниченной точностью. Фактически исходным является условие $S = (1 + \varepsilon)\cdot 100$ м^2, где величина ε зависит от точности измерений площади; она может быть малой величиной, но почти никогда не выполняется точное равенство $\varepsilon = 0$. А если $\varepsilon > 0$, то длины L_{min} = 35,448 метра не хватит для замыкания изгороди и поставленная задача решена не будет.

Для получения реального решения надо изменить формулировку задачи, сформулировав ее, например, так: задан участок произвольной формы с площадью S, измеренной с точностью ε. Требуется найти минимальную длину изгороди, способной гарантированно огородить участок при любых значениях ε. Решение дает формула:

$$L_{гар} = 2\sqrt{\pi}\sqrt{S}\sqrt{1+\varepsilon}\,. \tag{40}$$

Если $\varepsilon = 0{,}05$, то $L_{гар}$ = 36,167 метра, и $L_{гар}$ - L_{min} = 0,727 метра.

Рассмотренный простой пример типичен для очень многих задач на минимум (максимум). Поскольку исходные условия задачи известны почти всегда лишь с ограниченной точностью, то рассчитанный для фиксированных значений исходных данных минимальный элемент в реальных условиях оказывается недостаточным. Для того, чтобы получить практически пригодное решение надо учитывать возможные отклонения реальных исходных данных этих расчетных значений. Без учета этих возможных отклонений в задачах на максимум и минимум, рассчитанный минимальный или максимальный элемент дает обычно некорректное решение при любом методе вычисления. Учет возможных вариаций исходных данных восстанавливает корректность решения и его надежность.

Иногда говорят: некорректную задачу можно решать с помощью методов регуляризации, изложенных, например, в [5]. Это – не совсем точное высказывание. Некорректные задачи надежных решений не имеют. Регуляризация – это не метод решения. Это, фактически, переход от одной задачи к другой, от некорректной задачи к корректной. Иногда это – прямая переформулировка задачи, когда, например, вместо минимальной длины изгороди ищем длину, гарантирующую огораживание участка, с учетом оценки погрешности ε (формула 40)). Часто регуляризация сводится к использованию дополнительной информации о решении. Но использование дополнительной информации – это тоже переход от одной задачи к другой, от некорректной к корректной.

Глава 6. Примеры и задачи

§1. Примеры проверки надежности результатов вычисления решений систем уравнений

Пример 1. Математическая модель особого объекта

Найти общее решение (семейство решений) системы уравнений:

$$(D^2+2D+1)x_1+(D+1)x_2=0\,; \tag{1}$$

$$Dx_1+x_2=0\,. \tag{2}$$

Для системы (1) – (2) можно вычислить характеристический полином:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2+2\lambda+1 & \lambda+1 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = \lambda+1, \tag{3}$$

имеющий единственный корень λ_1 = -1.

Из (3) следует, что общее решение имеет вид:

$$x_1=C_0e^{-t}\,. \tag{4}$$

Можно непосредственно, подставив в уравнение (1) значение $x_2 = -Dx_1$ из уравнения (2) сразу получить уравнение

$$(D+1)x_1=0\,, \tag{5}$$

общим решением которого снова будет семейство функций (4), зависящих от одной постоянной интегрирования C_0. Оба метода решения приводят к одному и тому же результату.

Однако решение (4) не будет корректным. Действительно, если например, коэффициент при Dx_2 в уравнении (1) вместо значения единица примет значение $(1 + \varepsilon)$, то характеристический полином будет равен:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + 2\lambda + 1 & (1+\varepsilon)\lambda + 1 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = -\varepsilon\lambda^2 + (1-\varepsilon)\lambda + 1 \tag{6}$$

с двумя корнями λ_1 и λ_2, причем при малых $\varepsilon > 0$ один из корней оказывается большим положительным, а второй – близким к минус единице. Так, если $\varepsilon = 0{,}01$, то с точностью до четвертого знака после запятой $\lambda_1 = +100$; $\lambda_2 = -1$ и общее решение принимает вид:

$$x_1 = C_1 e^{-t} + C_2 e^{100t}. \tag{7}$$

Вообще, с точностью до членов порядка ε^2, общее решение будет иметь вид:

$$x_1 = C_1 e^{-t} + C_2 e^{\frac{1}{\varepsilon}t}. \tag{8}$$

В данном случае все просто: система (1) – (2) является вырожденной. Ее характеристический полином должен в общем случае иметь вторую степень, но при конкретных значениях коэффициентов системы со второй степенью λ взаимно сокращаются, и характеристический полином становится полиномом первой степени. Понятно, что такое понижение порядка происходит лишь при коэффициентах, в точности равных расчетным. Поэтому, несмотря на простоту системы, ее решение (4) будет некорректным, и практического смысла иметь не будет. Уже при неизбежных на практике сколь угодно малых отклонениях коэффициентов системы от расчетных значений решение может измениться коренным образом – перейти, например, в решение (8), которое даже при самых малых ε не имеет ничего общего с решением (4).

Математическая модель (1) – (2) описывает «особый» объект. Для правильного подхода к отысканию и исследованию решения надо проверить вырождение системы. Система (1) – (2) является вырожденной, ее решение практического смысла не имеет. Традиционные методы вычисления решения, не предполагающие проверки вырожденности или невырожденности системы не обеспечат правильного ответа на вопрос о поведении объекта, описываемого системой (1) – (2).

Разумеется, в такой простой системе как (1) – (2) все ясно и исследователь ошибки наверняка не сделает. Этот пример приведен для того, чтобы показать: даже в самых простых системах возможно изменение корректности решения при самых простых эквивалентных преобразованиях. Так, решения системы (1) – (2) – некорректны, а после эквивалентного преобразования – замены в уравнении (1) величины x_2 на равную ей величину Dx_1 из уравнения (2) – получается уравнение (5), решения которого корректны. Исходная некорректность в преобразованной математической модели исчезает, поэтому работник, производящий вычисления, может не заметить некорректности, может не заметить, что он столкнулся с опасным «особым» объектом. Конечно, относительно такой простой системы, как (1) – (2) никто ошибок не сделает, но в сложных системах, состоящих из многих уравнений, ошибку допустить очень легко и подобные ошибки часто происходили.

Пример 2. Проверка устойчивости

Для той же системы уравнений (1) – (2) требуется проверить устойчивость и сохранение устойчивости при вариациях коэффициентов.

Традиционный метод исследования – исследование корней характеристического полинома (3) – даст ответ: система устойчива и сохраняет устойчивость не только при малых, но и при больших вариациях коэффициентов характеристического полинома. Этот ответ, разумеется, неверен, но достоверность результата исследования легко восстанавливается с помощью рекомендованной в главе четвертой дополнительной проверки – не является ли исследуемая система вырожденной. Эта простая проверка восстановит надежность и достоверность результатов исследования. Правильный ответ: система (1) – (2) параметрической устойчивостью не обладает. Система может стать неустойчивой при сколь угодно малых вариациях коэффициентов.

Пример 3. Проверка устойчивости невырожденной системы

Проверить устойчивость и параметрическую устойчивость системы уравнений

$$(D^3 + 4D^2 + 5D + 2)x_1 = (D^2 + 2D + 1)x_2\,; \qquad (9)$$

$$(D^2 + 4D + 5)x_1 = (0{,}96D + 1)x_2\,. \qquad (10)$$

Традиционным методом проверки устойчивости является вычисление характеристического полинома системы и проверка положительности диагональных определителей матрицы Гурвица, о которой говорилось в главе четвертой (формула (5) главы 4).

Для системы (9) – (10) характеристический полином равен

$$\begin{vmatrix} \lambda^3+4\lambda^2+5\lambda+2 & -(\lambda^2+2\lambda+1) \\ \lambda^2+4\lambda+5 & -(0{,}96\lambda+1) \end{vmatrix} = 0{,}04\lambda^4+1{,}16\lambda^3+5{,}2\lambda^2+7{,}08\lambda+3. \qquad (11)$$

Для полинома (11) матрица Гурвица принимает вид

$$\begin{Vmatrix} 1{,}16 & 7{,}08 & 0 & 0 \\ 0{,}04 & 5{,}2 & 3 & 0 \\ 0 & 1{,}16 & 7{,}08 & 0 \\ 0 & 0{,}04 & 5{,}2 & 3 \end{Vmatrix}. \qquad (12)$$

Вычисляя диагональные определители: $\det_1 = 3$; $\det_2 = \begin{vmatrix} 7{,}08 & 0 \\ 5{,}2 & 3 \end{vmatrix} = 21{,}24$;

$$\det_3 = \begin{vmatrix} 5{,}2 & 3 & 0 \\ 1{,}16 & 7{,}08 & 0 \\ 0{,}04 & 5{,}2 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 5{,}2 & 3 \\ 1{,}16 & 7{,}08 \end{vmatrix} = 97{,}008; \qquad \det_4 = \begin{vmatrix} 1{,}16 & 7{,}08 & 0 & 0 \\ 0{,}04 & 5{,}2 & 3 & 0 \\ 0 & 1{,}16 & 7{,}08 & 0 \\ 0 & 0{,}04 & 5{,}2 & 3 \end{vmatrix} = 106{,}5135,$$

убеждаемся, что все они положительны, поэтому система (9) – (10) – устойчива.

Для проверки параметрической устойчивости традиционно проверяют знак диагональных определителей матрицы Гурвица, составленной с учетом возможных вариаций коэффициентов полинома (11) – т. е. матрицы

$$\begin{Vmatrix} 1{,}16(1\pm\varepsilon_2) & 7{,}08(1\pm\varepsilon_4) & 0 & 0 \\ 0{,}04(1\pm\varepsilon_1) & 5{,}2(1\pm\varepsilon_3) & 3 & 0 \\ 0 & 1{,}16(1\pm\varepsilon_2) & 7{,}08(1\pm\varepsilon_4) & 0 \\ 0 & 0{,}04(1\pm\varepsilon_1) & 5{,}2(1\pm\varepsilon_3) & 3(1\pm\varepsilon_5) \end{Vmatrix}. \qquad (13)$$

В матрице (13) индекс ε соответствуют порядковому номеру коэффициента в полиноме (11), а величины вариаций ε_1; ε_2; …; ε_5 вообще говоря различны и требуют отдельного исследования. Обычно используют приближенную методику, считая, что все модули вариаций ограничены сверху одним числом: $|\varepsilon_i| \le m$.

Возможен и другой подход к проверке устойчивости и параметрической устойчивости: исследуемую систему приводят к нормальной форме, к системе n уравнений первого порядка, после чего используют стандартные программы для вычисления корней характеристического полинома – они будут совпадать с собственными значениями матрицы коэффициентов.

Уравнение (9) – это уравнение, знакомое нам по главе пятой (формула (10) из главы 5), соответствующее $m = 1$; $k_0 = 2$. Поэтому в нормальной форме оно будет иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + x_2 + x_3; \\ \dot{x}_3 &= x_4; \\ \dot{x}_4 &= -x_3 - 2x_4. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Уравнение (10) по своей структуре соответствует уравнению регулятора (формула (11) из главы 5), но с измененными коэффициентами. При $m = 1$; $k_1 = 1$; $k_2 = 2$; $k_3 = 1$ уравнение регулятора (11) из главы 5 принимало бы вид

$$(D^2 + 4D + 5)x_1 = (D + 1)x_2 . \tag{15}$$

Но в уравнении (10) коэффициент единица при Dx_2 заменен на 0,96, что делает систему (9) – (10) невырожденной. Поэтому, с учетом равенств, определяющих новые переменные x_3 и x_4:

$$x_3 = \dot{x}_1 + 2x_1 - x_2 ; \tag{16}$$

$$x_4 = \dot{x}_3 , \tag{17}$$

уравнение (10) принимает вид:

$$[(D^2 + 2D)x_1 - Dx_2] + [(2D + 4)x_1 - 2x_2] + 0{,}04x_2 + x_2 + x_1 = 0 . \tag{18}$$

С учетом равенств (16) и (17) в первой квадратной скобке из равенства (18) узнаем переменную x_4, во второй квадратной скобке соответствует $2x_3$. Поэтому уравнение (18) можно записать в виде:

$$0{,}04\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 . \tag{19}$$

В целом система уравнений (9) – (10) приводится к следующей нормальной форме:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + x_2 + x_3; \\ \dot{x}_2 &= -25x_1 - 25x_2 - 50x_3 - 25x_4; \\ \dot{x}_3 &= x_4; \\ \dot{x}_4 &= -x_3 - 2x_4. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Нормальная форма (20), состоящая их четырех уравнений первого порядка, доказывает, что исходная система (9) – (10) не является вырожденной. Вычисляя характеристический полином системы в нормальной форме (20):

$$\begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 & -1 & 0 \\ \lambda+25 & 25 & 50 & 25 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = 0{,}04\lambda^4 + 1{,}16\lambda^3 + 5{,}2\lambda^2 + 7{,}08\lambda + 3\,, \qquad (21)$$

убеждаемся, что он совпадает с полиномом (11). Этот еще раз подтверждает, что преобразование системы (9) – (11) в систему (20) было эквивалентным (в классическом смысле) преобразованием. Об устойчивости и параметрической устойчивости системы (20) судят обычно по коэффициентам характеристического полинома. Удобно пользоваться условием устойчивости для полинома четвертой степени

$$a_4\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0\,, \qquad (22)$$

которое приводится в учебниках по автоматическому правлению и формулируется так: необходимым и достаточным условием устойчивости системы, имеющей характеристический полином (22) является положительность всех его коэффициентов и выполнение неравенства

$$\Delta_3 = a_1 a_2 a_3 - a_2^2 a_4 - a_0 a_3^2 > 0\,. \qquad (23)$$

Для системы (20) и характеристического полинома (21) будет

$$\Delta_3 = 7{,}08 \cdot 5{,}2 \cdot 1{,}16 - 5{,}2^2 \cdot 0{,}04 - 3 \cdot 1{,}16^2 = 47 - 1{,}08 - 4{,}04 = 41{,}88 > 0 \qquad (24)$$

Для полинома (21) положительные члены в неравенстве (23) много больше отрицательных. Это говорит о том, что система (20) устойчива и сохранит устойчивость при малых отклонениях коэффициентов от расчетных значений. Для того, чтобы более точно определить – при каких «малых» вариациях система сохранит устойчивость, примем, что вариации всех коэффициентов полинома (21) не превышают по модулю числа m: $|\varepsilon_i| \le m$, а знак их может быть любым. Наиболее опасным в отношении возможной потери устойчивости сочетанием вариаций коэффициентов в неравенстве (24) будет следующее: у коэффициентов 7,08; 5,2; 1,16 вариации отрицательны, а у коэффициентов 0,04 и 3 – положительны. С учетом этих вариаций имеем:

$$\Delta_3 = 7{,}08 \cdot 5{,}2 \cdot 1{,}16(1-m)^3 - 5{,}2^2(1-m)^2 \cdot 0{,}04(1+m) - 3(1-m)^2 \cdot 1{,}16^2(1-m)^2\,. \qquad (25)$$

Даже при $m = 0{,}5$ – т. е. когда коэффициенты 7,08; 5,2; 1,16 уменьшатся вдвое, будет $\Delta_3 = 2{,}57$ и устойчивость сохранится.

К тому же результату придем и при использовании методики, основанной на результатах В. Л. Харитонова [23]. Они не использовались в данном примере потому, что для систем четвертого порядка – типа системы (9) – (11) – исследование влияния вариаций коэффициентов характеристического полинома на устойчивость проще вести непосредственно, не прибегая к результатам, опубликованным в [23], которые полезны при $n > 4$.

Таким образом, традиционные методы исследования, не учитывающие возможного изменения корректности и обусловленности при эквивалентных преобразованиях, дают ответ: система (9) – (10) устойчива и параметрически устойчива. Она сохраняет устойчивость не только при малых, но и при больших (более чем на 50%) отклонениях коэффициентов характеристического полинома от расчетных значений.

Этот результат не верен. Исследуя непосредственно систему (9) – (10) без преобразования ее к нормальной форме и вычисляя старший член характеристического полинома системы (9) – (10) с учетом возможных вариаций коэффициентов (точками обозначим члены низших степеней)

$$\begin{vmatrix} (1+\varepsilon)\lambda^3+\ldots & -[(1-\varepsilon)\lambda^2+\ldots] \\ (1-\varepsilon)\lambda^2+\ldots & -[0{,}96(1+\varepsilon)+\ldots] \end{vmatrix} = [(1-\varepsilon)^2-0{,}96(1+\varepsilon)^2]\lambda^4+\ldots \qquad (26)$$

убедимся, что уже при $\varepsilon \geq 0{,}011$ старший член характеристического полинома делается отрицательным, нарушается необходимое условие Стодолы, устойчивость теряется.

Таким образом, система (9) – (10) обладает очень малым запасом устойчивости: устойчивость теряется при изменениях некоторых коэффициентов всего на 1,1%. Эквивалентное преобразование системы к нормальной форме завышает истинные запасы устойчивости в 50 раз.

Если не сделать простой дополнительной проверки – проверки возможного изменения знака старшего члена характеристического полинома при вариациях коэффициентов исходных уравнений – то результаты проверки устойчивости по коэффициентам характеристического полинома или по матрице коэффициентов нормальной формы могут оказаться совершенно ненадежными и не достоверными. По расчету будет казаться, что все хорошо, запасы устойчивости достаточны и поэтому проектируемый объект будет много лет работать хорошо и надежно. А на самом деле спроектированный объект будет хорошо работать только первое время, затем малые запасы устойчивости быстро исчерпаются, и в самый неожиданный момент времени произойдет авария, а то и катастрофа. Подобные аварии и катастрофы, порожденные недостаточной разработанностью теории эквивалентных преобразований, неоднократно происходили в прошлом и происходят, к сожалению, до сих пор, хотя их легко можно предотвратить с помощью совсем не сложных дополнительных проверок при расчете. Эти дополнительные проверки восстанавливают надежность компьютерных вычислений.

Пример 4. Вычисление решений системы дифференциальных уравнений

Задана уже рассмотренная в примере (3) система уравнений (9) – (10). Требуется найти ее решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$, удовлетворяющие заданным начальным условиям. Традиционный метод решения: введение новых переменных x_3 и x_4, определяемых формулами (16) и (17). При этом система (9) – (10) приводится к нормальной форме (20), для нахождения численного решения которой достаточно использовать стандартные компьютерные программы.

Однако традиционный метод не приведет к надежному результату: как уже было показано при рассмотрении примера 3, при изменениях коэффициентов системы всего на 1,1% в характеристическом полиноме могут произойти коренные изменения: его старший член сделается из положительного отрицательным и малым по абсолютной величине. А это означает, что в характеристическом полиноме появится большой положительный корень λ_4, а в общем решении системы (9) –(10)

$$x_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\lambda_3 t} + C_4 e^{\lambda_4 t} \tag{27}$$

появится стремительно растущий четвертый член. Таким образом, при $\varepsilon \geq 0{,}011$ может произойти коренное изменение решения. Решение, которое может коренным образом измениться при изменении исходных данных всего на 1,1% является совершенно ненадежным. Использование такого решения для каких-либо практических целей очень опасно, может привести к авариям и катастрофам. А самое неприятное заключается в том, что этой опасности мы не увидим после преобразования системы (9) – (10) в нормальную форму, в форму системы (20). У системы (20) решения зависят от коэффициентов непрерывно (согласно известной теореме теории дифференциальных уравнений). При изменениях любых коэффициентов системы (20) на ±2% решения $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$ изменятся (как легко проверить) очень мало. В то же время исходная система (9) – (10) является еще одним примером системы, в которой этой непрерывной зависимости нет.

Все это удобно проследить для случая, когда в системе (9) – (10) изменяется один коэффициент, и она принимает вид:

$$\left.\begin{aligned}(D^3+4D^2+5D+2)x_1&=(D^2+2D+1)x_2;\\(D^2+4D+5)x_1&=[(1+\varepsilon)\cdot 0{,}96D-1]x_2,\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

и имеет характеристический полином

$$\begin{vmatrix}\lambda^3+4\lambda^2+5\lambda+2 & -(\lambda^2+2\lambda+1)\\ \lambda^2+4\lambda+5 & -[(1+\varepsilon)\cdot 0{,}96D+1]\end{vmatrix}= \tag{29}$$
$$=[1-0{,}96(1+\varepsilon)]\lambda^4+[5-3{,}84(1+\varepsilon)]\lambda^3+[10-4{,}8(1+\varepsilon)]\lambda^2+[9-1{,}92(1+\varepsilon)]\lambda+3.$$

Теперь сразу видно, что как только величина ε превысит значение ε = 0,04166, старший член полинома (29) изменит знак, четвертый его корень λ_4 из отрицательного станет большим положительным, все решение резко, разрывно, изменится.

Для иллюстрации на рис. 5 показана для примера зависимость величины x_1 при $t = 1$ от ε для случая, когда постоянные интегрирования в решении (27) равны единице ($C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 1$).

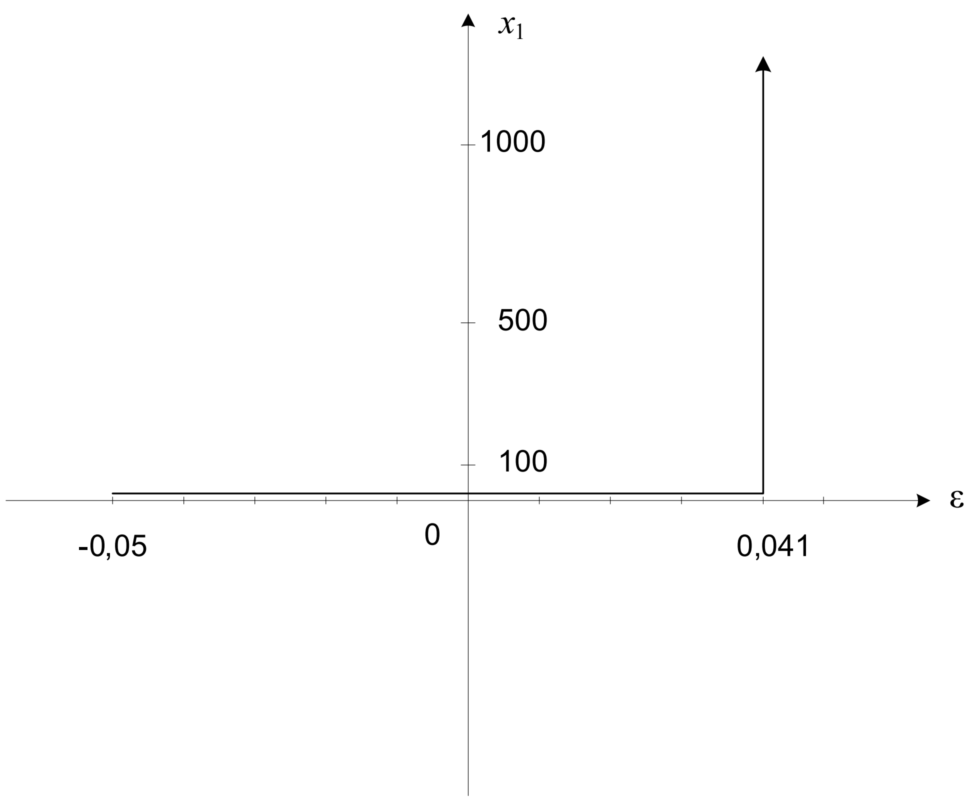


Рисунок 5

Сразу видно, что при ε = 0,04166 решение имеет разрыв, а значение $x_1(1)$ при ε > 0,04166 не помещается на графике (при 0,04166 < ε < 0,2 будет $x_1(1) > 10^5$).

Для обеспечения надежности и достоверности результатов расчета необходимо перед преобразованием системы уравнений в нормальную форму проверить – не является ли какой-либо из коэффициентов характеристического полинома малой разностью больших коэффициентов исходной системы и не изменит ли он знак при возможных изменениях этих коэффициентов.

На примере системы (9) – (10) мы еще раз убеждаемся, что:

1. существуют системы дифференциальных уравнений, не имеющие непрерывной зависимости решений от коэффициентов и параметров. В то же время после приведения системы к нормальной форме с помощью эквивалентных преобразований те же самые решения приобретают непрерывную зависимость от коэффициентов нормальной формы (20) и это может ввести в заблуждение

2. существуют системы дифференциальных уравнений, для которых традиционный метод вычисления решения через преобразование в нормальную форму и использование стандартных программ может привести к ошибочным заключениям о поведении объекта, математической моделью которого является исследуемая система. Эти ошибочные заключения могут стать (как уже не раз становились) причиной аварий и даже катастроф.

<u>Пример 5. Дополнительные проверки, восстанавливающие надежность и достоверность компьютерных вычислений</u>

Задана та же система дифференциальных уравнений (9) – (10). На ее примере проиллюстрируем дополнительные проверки.

1. Первая (и простейшая) проверка – не является ли система вырожденной. Для этой проверки достаточно вычислить характеристической полином (11) и убедиться, что его степень равна порядку системы (9) – (10). Система невырожденная, поэтому заключение об устойчивости будет достоверным и сохранит силу, по крайней мере, при сколь угодно малых вариациях коэффициентов. Надежность и достоверность заключения при малых конечных вариациях первая проверка не гарантирует.

2. Вторая проверка. Наличие в полиноме (11) коэффициента 0,04 при старшем члене, который более чем на порядок меньше наименьшего из остальных коэффициентов требует проверить – не оказался ли он малой разностью не малых величин и не изменит ли он знак при тех величинах вариаций коэффициентов, которые неизбежны в ходе эксплуатации.

Для проведения этой проверки достаточно при вычислении характеристического полинома (11) выписать только те составляющие, которые влияют на величину коэффициента при старшем члене- т. е. достаточно выписать определитель

$$\det\begin{vmatrix}(1\pm\varepsilon_1)\lambda^3 & -(1\pm\varepsilon_2)\lambda^2 \\ (1\pm\varepsilon_3)\lambda^2 & -0{,}96(1\pm\varepsilon_4)\lambda\end{vmatrix}. \tag{30}$$

Далее достаточно найти наиболее неблагоприятное сочетание знаков вариаций ε_1; ε_2; ε_3; ε_4 (наиболее неблагоприятно, когда ε_1 и ε_4 – положительны, а ε_2 и ε_3 – отрицательны), а затем вычислить при каком значении $\varepsilon \geq |\varepsilon_i|$ определитель (30) станет отрицательным. Для этого достаточно решить уравнение

$$(1-\varepsilon)^2 = 0{,}96(1+\varepsilon)^2 .$$

Решив его, найдем $\varepsilon = 0{,}011$. Отсюда следует (как уже было показано в примере 4), что вариации коэффициентов системы большие, чем 1,1% от номинальных значений могут привести к коренным изменениям решений. Результат вычисления не надежен.

Пример показывает, что дополнительная проверка не является сложной и может быть сведена к вычислению простого определителя (30).

Пример 6. Возможное изменение знака коэффициентов при младших членах характеристического полинома.

Задана система уравнений:

$$(D+1)x_1 + (D+3{,}98)x_2 = 0\,; \tag{31}$$

$$Dx_1 + 2Dx_2 + 2x_2 = 0\ . \tag{32}$$

Требуется проверить устойчивость и сохранение устойчивости при возможных вариациях коэффициентов параметров.

С помощью эквивалентных преобразований, выразив x_2 через x_1 с помощью уравнения (32) и подставив в уравнение (31), получим эквивалентное системе (31) – (32) в отношении переменной x_1 следующее уравнение второго порядка:

$$(D^2 + 0{,}02D + 2)x_1 = 0\,, \tag{33}$$

(что говорит о том, что исходная система (31) – (32) – не выреждена) с характеристическим полиномом

$$\lambda^2 + 0{,}02\lambda + 2\,. \tag{34}$$

Для переменной x_2 получаем такое же уравнение:

$$(D^2 + 0{,}02D + 2)x_2 = 0\,. \tag{35}$$

Исследуя характеристический полином (34) при вариациях его коэффициентов – т. е. исследуя полином

$$(1 \pm \varepsilon_1)\lambda^2 + 0{,}02(1 \pm \varepsilon_2)\lambda + (1 \pm \varepsilon_3)2 \tag{36}$$

нетрудно установить, что полином (36) остается гурвицевым не только при сколь угодно малых вариациях своих коэффициентов, но и при больших вариациях – вплоть до $|\varepsilon_i| < 1$.

Однако это совсем не означает сохранения устойчивости исходной системы (31) – (32) при малых вариациях ее коэффициентов, поскольку дополнительная проверка показывает, что коэффициент при λ в полиноме (34) оказался разностью чисел, каждое из которых больше его на два порядка. Поэтому, если коэффициенты исходной системы изменятся всего на $|\varepsilon_i| \geq 0{,}0025$, то коэффициент при λ в характеристическом полиноме (34) может стать отрицательным и система потеряет устойчивость.

Заключение о параметрической устойчивости системы (31) – (32), полученное, например, на основе известной методики исследования характеристического полинома, предложенной в [23], не будет надежным и достоверным. Дополнительная проверка показывает, что устойчивость сохранится лишь при $|\varepsilon_i| < 0{,}25\%$. Для большинства практических приложений система с таким малым запасом устойчивости равнозначна неустойчивой системе. К правильному заключению о запасах устойчивости можно придти только на основе исходных уравнений – уравнений (31) – (32). Эквивалентное преобразование системы (31) – (32) в эквивалентную ей систему уравнений (33) – (35) не изменяя самих решений как таковых, сильно изменяет величину запасов устойчивости.

Реально система (31) – (32) теряет устойчивость при изменениях коэффициентов всего на 0,25%, а исследование преобразованной системы (33) – (35) говорит о больших запасах устойчивости, что не соответствует реальности.

Заметим, что если при вариациях коэффициентов исходной системы уравнений изменяется (делается отрицательным) любой из коэффициентов характеристического полинома, то это одинаково говорит о потере устойчивости решений. Однако процессы, происходящие после потери устойчивости, зависят от того, какой из членов характеристического полинома изменил знак. Если изменил знак, стал отрицательным и малым по абсолютной величине старший член характеристического полинома, то решения системы начинают очень быстро, стремительно возрастать (по абсолютной величине). Мы уже видели это на примере системы (28), а ранее об этом говорилось в главе первой. Если же изменяет знак любой из младших коэффициентов в характеристическом полиноме и делается малым отрицательным, то решения тоже начинают неограниченно возрастать по абсолютной величине, но возрастают медленно. Так, например, решения уравнения

$$(D^2 - \varepsilon D + 1)x = 0 \tag{37}$$

с характеристическим полиномом

$$\lambda^2 - \varepsilon\lambda + 1 \tag{38}$$

имеют вид:

$$x(t) = e^{\frac{\varepsilon}{2}t}\left(C_1 \sin\sqrt{(1-\frac{\varepsilon^2}{4})}t + C_2 \cos\sqrt{(1-\frac{\varepsilon^2}{4})}t\right) \tag{39}$$

и при малых ε они возрастают с течением времени не ограниченно, но очень медленно.

<u>Пример 7. Система из трех дифференциальных уравнений с тремя переменными</u>

Задана система из трех уравнений:

$$(D^3 + 2{,}15D^2 + 1{,}23D + 0{,}98)x_1 + (1{,}05D^2 + 0{,}95D + 1{,}12)x_2 + (1{,}08D^2 + 2{,}7D + 3{,}23)x_3 = 0;$$
$$(1{,}07D^2 + 2{,}12D + 3{,}75)x_1 + (1{,}09D + 2{,}98)x_2 + (2{,}5D + 2{,}08)x_3 = 0;$$
$$(1{,}16D + 3{,}63)x_1 + 1{,}18x_2 + 1{,}15x_3 = 0.$$

Требуется проверить устойчивость этой системы.

Традиционный путь – вычисляется характеристический полином

$$
X.\Pi. = \begin{vmatrix} \lambda^3 + 2{,}15\lambda^2 + 1{,}23\lambda + 0{,}98 & 1{,}05\lambda^2 + 0{,}95\lambda + 1{,}12 & 1{,}08\lambda^2 + 2{,}7\lambda + 3{,}23 \\ 1{,}07\lambda^2 + 2{,}12\lambda + 3{,}75 & 1{,}09\lambda + 2{,}98 & 2{,}5\lambda + 2{,}08 \\ 1{,}16\lambda + 3{,}63 & 1{,}18 & 1{,}15 \end{vmatrix} \qquad (41)
$$

и затем его корни. Если у всех корней вещественные части отрицательны – система устойчива.

Однако полезнее предварительно проверить – не окажется ли коэффициент при старшем члене характеристического полинома нулем или малой разностью больших чисел. Проверка не очень сложна, поскольку старший член (член четвертой степени) будет зависеть только от старших членов полиномов, стоящих в определителе (41) и будет равен определителю:

$$
\begin{vmatrix} 1 & 1{,}05 & 1{,}08 \\ 1{,}07 & 1{,}09 & 2{,}5 \\ 1{,}16 & 1{,}18 & 1{,}15 \end{vmatrix} = 1\cdot 1{,}09\cdot 1{,}15 + 1{,}05\cdot 2{,}5\cdot 1{,}16 + 1{,}08\cdot 1{,}07\cdot 1{,}18 - \qquad (42)
$$

$$
-1{,}08\cdot 1{,}09\cdot 1{,}16 - 1\cdot 2{,}5\cdot 1{,}18 - 1{,}05\cdot 1{,}07\cdot 1{,}15 = 0{,}1 - 0{,}09 = 0{,}01.
$$

Равенство (42) сразу показывает, что уже при малых вариациях коэффициентов системы (40), при $\varepsilon < 0{,}01$, старший коэффициент характеристического полинома может изменить знак и сразу нарушится необходимое условие устойчивости Стодолы. Запасы устойчивости малы, заключение об устойчивости решений – не надежно.

Численное интегрирование системы (40), вычисление ее решений, также не надежно, поскольку при изменениях знака старшего члена может происходить коренное изменение всех решений – как об этом уже говорилось при рассмотрении примера 4.

§2. Примеры обеспечения надежности расчета технических объектов.

В предыдущем разделе были приведены многие примеры математических моделей, для которых результаты расчета не надежны и не достоверны.

На практике, разумеется, важно не просто констатировать ненадежность расчета, но и найти пути обеспечения его надежности.

Это можно сделать за счет изменения математической модели объекта. Хорошо известно, что один и тот же технический объект может быть описан различными математическими моделями, с различной степенью точности и детальности описания процессов, происходящих в объекте. Поэтому после проверки, которая показала, что результаты вычислений первоначально выбранной математической модели ненадежны, можно перейти к другой модели, которая обеспечит надежность.

Если поиски хорошей модели не привели к успеху, можно использовать другой путь – изменить параметры проектируемого технического объекта – при этом автоматически изменится и его математическая модель. Это изменение параметров (а иногда – и конструкции) проектируемого технического объекта следует проводить так, чтобы математическая модель измененного объекта гарантировала надежность вычислений, гарантировала совпадение результатов расчета с реальным поведением исследуемого объекта при возможных малых изменениях его параметров.

Пример 8. Оптимальное управление судами

Для судов – танкеров типа «Казбек» (водоизмещение 16000 тонн, скорость – 14 узлов) математической моделью движения на курсе под действием руля и возмущающих сил от ветра и морского волнения является следующее дифференциальное уравнение второго порядка:

$$(690D^2 + 17{,}2D)\theta = u + \varphi(t)\,. \qquad (43)$$

В уравнении (43) время t выражено в секундах, θ – угол отклонения судна от заданного курса в градусах, u – угол отклонения руля от диаметрали в градусах, $\varphi(t)$ – возмущающее воздействие от ветра и морского волнения, стационарный случайный процесс, спектральная плотность мощности (спектр) которого может быть аппроксимирована различными аналитическими уравнениями. Обычно рекомендуют аппроксимировать спектр формулой Рахманина – Фирсова:

$$S_\varphi(\omega) = <\varphi^2> \cdot \frac{4\alpha}{\pi} \cdot \frac{\alpha^2+\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2+\omega^2)^2 - 4\beta^2\omega^2}\,, \qquad (44)$$

где $<\varphi^2>$ - средний квадрат возмущающего воздействия, ω – частота, ее размерность – рад/с, α и β – размерные коэффициенты (размерность – 1/с), зависящие от интенсивности волнения. Для волнения средней интенсивности часто принимают $\beta = 1$ с$^{-1}$ и $\alpha = 0{,}21\beta$.

Потеря скорости судна, как известно, пропорциональна интегралу

$$\Delta v = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T (k^2\theta^2 + u^2)\,dt\,, \qquad (45)$$

где k^2 – безразмерный коэффициент, зависящий от обводов корпуса судна. Для танкера «Казбек» он равен 6,25.

Закон управления рулевой установкой – т. е. закон зависимости отклонения руля $u(t)$ от отклонения судна от заданного курса $\theta(t)$ – желательно выбирать так, чтобы потеря скорости была минимальной. Для отыскания оптимального закона управления рулевой установкой и проектирования оптимального авторулевого, автоматически реализующего этот закон можно воспользоваться теорией оптимизации среднеквадратичных функционалов, изложенной в публикациях [10], [18].

Для танкера «Казбек» оптимальный закон управления рулевой установкой имеет вид:

$$u_{\text{ÎÏÒ}} = [690D^2 + 17{,}2D - \frac{690D^2 + 61{,}2D + 2{,}5}{0{,}973 - 0{,}06D}]\theta\,. \qquad (46)$$

Подробный вывод формулы (46) приведен в книге [24]. Там показано, что закон управления (46) действительно обеспечивает устойчивое движение судна на курсе (при условии, что параметры судна равны расчетным) и наименьшую возможную потерю скорости. Однако, параметрической устойчивости закон управления (46) не обеспечивает.

Действительно, предположим, что параметры судна отклонились от расчетных на малые величины и его математическая модель (43) приняла вид:

$$(690(1+\varepsilon_1)D^2 + 17{,}2(1+\varepsilon_2)D)\theta = u + \varphi(t)\,. \qquad (47)$$

Подставив в формулу (47) вместо u его выражение (46), получим

$$[-41{,}4\varepsilon_1 D^3 + (690 + 660\varepsilon_1 + 1{,}03\varepsilon_2)D^2 + (61{,}2 + 16{,}7\varepsilon_2)D + 2{,}5]\theta = (973 - 0{,}06D)\varphi\,. \qquad (48)$$

Из формулы (48) сразу следует, что уже при сколь угодно малом $\varepsilon_1 > 0$ устойчивость теряется, поскольку нарушается необходимое условие устойчивости Стодолы. Закон управления (46) для практического использования непригоден. Результат расчета при номинальных значениях параметров, для которых движение судна по курсу устойчиво, коренным образом разойдется с действительным движением. Уже при сколь угодно малых $\varepsilon_1 > 0$ движение станет неустойчивым.

Для обеспечения надежности результатов расчета можно изменить закон управления и тем самым - параметры математической модели закона управления (46), поскольку эти параметры целиком находятся в нашем распоряжении. Замечая, что параметрическая неустойчивость целиком зависит от малого члена 0,06D в формуле (46) заменим его нулем. Закон управления (46) преобразуется в закон:

$$u_1 = -[30D^2 + 42{,}3D + 2{,}43]\theta\,. \tag{49}$$

Подставив соотношение (49) в формулу(47), получим:

$$\{[690(1+\varepsilon_1) + 30]D^2 + [17{,}2(1+\varepsilon_2) + 42{,}3]D + 2{,}5\}\theta = \varphi(t)\,. \tag{48}$$

Теперь не только при малых, но и при больших вариациях ε_1 и ε_2 полином, стоящий в фигурных скобках, остается гурвицевым, движение судна по курсу остается устойчивым.

Данный пример иллюстрирует простое правило обеспечения надежности результатов вычисления и обеспечения параметрической устойчивости в системах управления: если при выбранном законе управления параметрическая устойчивость не обеспечивается, то измени закон управления, измени параметры регулятора.

Для оптимального управления вопрос обеспечения параметрической устойчивости в публикациях [10] и [18] разработан подробно: если задан объект управления в виде математической модели

$$A(D)x = B(D)u + \varphi(t)\,, \tag{51}$$

где x – управляемая величина, u – управляющее воздействие, $A(D)$ и $B(D)$ – произвольные полиномы от оператора дифференцирования $D = \frac{d}{dt}$, причем степень полинома $A(D)$ равна n, степень полинома $B(D)$ равна m, а спектр возмущающего воздействия $\varphi(t)$ аппроксимирован четной рациональной дробью

$$S_\varphi = \frac{a_p\omega^{2p} + a_{p-1}\omega^{2p-2} + \ldots + a_0}{b_q\omega^{2q} + b_{q-1}\omega^{2q-2} + \ldots + b_0}\,, \tag{52}$$

то закон управления, обеспечивающий минимум среднеквадратического функционала будет обеспечивать параметрическую устойчивость только в том случае, если выполняется критерий Ю. П. Петрова:

$$p \geq m + q - 1\,, \tag{53}$$

где m – это степень полинома $B(D)$ в математической модели объекта управления (51), p – половинная степень числителя в аналитической аппроксимации спектра (52), q – половина степени знаменателя в (52).

Для математической модели танкера «Казбек» (43) будет $m = 0$. Для спектра Рахманина - Фирсова (44) имеем $p = 0$, $q = 2$. Поскольку $0 < 0 + 2 - 1$, то критерий Ю. П. Петрова не выполнен и сразу можно сказать, что закон управления (46), доставляющий минимум функционалу (45) при возмущающем воздействии со спектром (44), параметрической устойчивости заведомо не обеспечит.

Для обеспечения параметрической устойчивости удобно изменить аналитическую аппроксимацию спектра, а тем самым и закон управления. Поскольку частотная характеристика танкера «Казбек» почти целиком располагается в той части спектра (44), где он еще почти постоянен и очень слабо зависит от частоты ω, то можно (как было предложено еще в [24], аппроксимировать спектр возмущающего воздействия просто постоянной величиной:

$$S_{\varphi}(\omega) = C\,. \tag{54}$$

Такой аппроксимации соответствует $p = 0$ и $q = 0$. Для этих значений p и q критерий Ю. П. Петрова (53) выполняется. Спектру (54) соответствует закон управления

$$u_2 = -[43{,}6D + 2{,}5]\theta\,. \tag{55}$$

Разумеется, упрощение аналитической аппроксимации спектра может увеличить потерю скорости, но не намного. В публикации [24] на стр. 137 произведен расчет, показывающий, что если истинный спектр возмущающего воздействия точно соответствует формуле (44), то даже в этом предельном случае замена спектра (44) на спектр (54) увеличит потерю скорости всего на 9,7%.

Для того, чтобы учесть медленно изменяющиеся составляющие в возмущающем воздействии $\varphi(t)$, не учитываемые спектром (54), авторулевой дополняют интегрирующим звеном с малым коэффициентом усиления и закон управления принимает окончательный вид:

$$u_3 = -[43{,}6D + 2{,}5 + \frac{0{,}005}{D}]\theta\,. \tag{56}$$

на основе формулы (56) проектируется структура авторулевого: в ее основе лежит параллельное соединение дифференцирующего, усилительного и интегрирующего звена. Эта структура часто использовалась при проектировании авторулевых. Конкретные числовые значения коэффициентов усиления в авторулевых зависят от водоизмещения судна, его скорости, обводов корпуса и вычисляются по методике, приведенной в публикации [24], стр. 132 – 149. Дополнительные материалы о проектировании и расчете авторулевых, обеспечивающих малое число перекладок руля, точность отслеживания движения по речному фарватеру и т. д. – и в то же время неизменно сохраняющих параметрическую устойчивость – приведены в [18], стр. 215 – 226 и в [10], стр. 243 – 248. Там же приведены примеры обеспечения параметрической устойчивости и надежности вычислительных алгоритмов для многих других оптимальных систем управления.

Надо отметить, что именно в теории оптимальных систем управления особенно остро стоит проблема обеспечения надежности вычислительных алгоритмов, используемых при проектировании. Действительно, стремясь обеспечить оптимальное, наилучшее качество работы систем управления, мы неизбежно приближаемся к границам устойчивости и об этом всегда нужно помнить.

Опыт проектирования и расчета надежно работающих оптимальных систем может быть использован и при расчете других технических объектов – не обязательно оптимальных.

Пример 9. Расчет строительных конструкций

При проектировании и расчете различных зданий и сооружений возможна встреча с объектами, существенно изменяющими свои свойства при малых изменениях параметров.

Рассмотрим пример, приведенный в хорошо известном учебнике [25] на стр. 205. В этом примере рассматривается нагруженная рама, показанная на рис 6, где $l_1 = l_2 = l_3 = l$. Концы рамы заделаны, в середине горизонтального участка приложена сила P. Требуется рассчитать горизонтальную силу x_1, действующую в нижней заделке, вертикальную силу x_2 и изгибающий момент x_3.

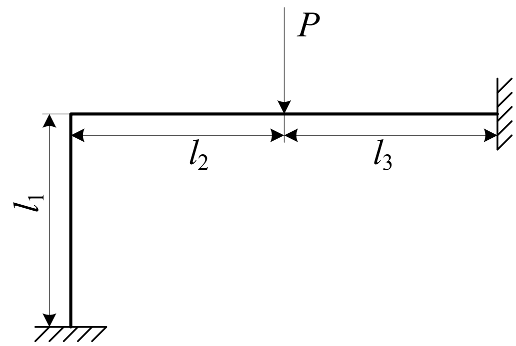


Рисунок 6

С использованием известного «метода сил», в учебнике [25] на стр. 205 – 206 составлена система трех алгебраических уравнений для определения трех неизвестных x_1; x_2; x_3:

$$\left.\begin{array}{l} 14lx_1 + 12lx_2 + 15x_3 = 3Pl; \\ 12lx_1 + 16lx_2 + 12x_3 = 5Pl; \\ 5lx_1 + 4lx_2 + 6x_3 = Pl. \end{array}\right\} \qquad (56)$$

В [25] на стр. 206 приведено решение системы уравнений (56):

$$x_1 = -\frac{1}{4}P; x_2 = \frac{7}{16}P; x_3 = \frac{1}{12}Pl\,. \qquad (57)$$

Теперь проверим надежность этого решения, учитывая, что все коэффициенты, входящие в систему (56), могут испытывать вариации – из-за неточного измерения длин l_1; l_2; l_3, из-за неточного знания модуля упругости E на различных участках рамы и т. д.

Для примера проверим надежность вычисления величины x_3, которая, согласно известным формулам Крамера, равна дроби, составленной из определителей Δ_3 и Δ (в долях от произведения Pl):

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 14 & 12 & 3 \\ 12 & 14 & 5 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 14 & 12 & 15 \\ 12 & 16 & 12 \\ 5 & 4 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{4}{48} = \frac{1}{12}\,.$$

Рассмотрим более детально выражение определителя Δ_3. Его значение

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 14 & 12 & 3 \\ 12 & 14 & 5 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 14\cdot 14\cdot 1 + 12\cdot 5\cdot 5 + 3\cdot 12\cdot 4 - 3\cdot 14\cdot 5 - 14\cdot 5\cdot 4 - 12\cdot 12\cdot 1 = 668 - 664 = 4 \quad (58)$$

равно малой разности больших положительных и отрицательных произведений. Поэтому совсем не трудно вычислить «модульный определитель», о котором говорилось в главе 3, §5. Он будет равен 668 + 664 = 1232, будет в 308 раз больше определителя (58), и поэтому уже при очень малых ε предельная погрешность вычисления определителя (58) может быть большой. Поэтому необходимо перейти к более точной оценке возможной погрешности величины x_3. Если погрешность ε в значении первого члена первой строки определителя (58) положительна, второго члена – отрицательна, третьего – снова положительна, а погрешность третьего члена третьей строки – отрицательна, то определитель (58) примет вид:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 14+\varepsilon & 12-\varepsilon & 3+\varepsilon \\ 12 & 14 & 5 \\ 5 & 4 & 1-\varepsilon \end{vmatrix} = 4 - 129\varepsilon - 28\varepsilon^2 \quad (59)$$

и уже при ε = 0,03 погрешность в его вычислении превысит 90%.

Таким образом, уже при ε = 3% вычисление значения x_3 совершенно не надежно. По сути уже то, что определитель $\Delta_3 = 4$ является малой разностью больших чисел 668 и 664 (они больше определителя Δ_3 более, чем на два порядка) сразу говорит о том, что вычисление определителя Δ_3 и момента x_3 не надежно. Величина x_3 может существенно изменяться при малых изменениях условий задачи. Это обстоятельство можно не заметить, если систему (56) решать не через определители, а например, путем последовательного исключения неизвестных x_1, x_2, применяя известный метод Гаусса.

Рассмотренный пример наглядно показывает, что и при статическом расчете зданий и сооружений не является редкостью встреча с плохо обусловленными объектами, для которых неизбежные малые неточности в определении исходных данных для расчета могут приводить к большим, коренным расхождениям между результатом расчета и реальными нагрузками. Такие расхождения становятся причинами последующих аварий и катастроф.

Поэтому в строительных расчетах (как и при расчетах в любых других областях техники) недостаточно ограничиться вычислением значений интересующих нас величин. Необходимо дополнительно проверить –

насколько надежно и достоверно это вычисление при неизбежных малых погрешностях в исходных данных.

При этом надо учитывать (а это далеко не всегда делается), что эквивалентные преобразования, используемые при вычислениях, могут сильно изменить степень обусловленности решений, степень их чувствительности к погрешностям исходных данных.

Вернемся к системе (56) и произведем с помощью эквивалентных преобразований, домножений и сложений, исключение величины x_1. Получим систему двух уравнений:

$$40lx_2 - 6x_3 = 17Pl; \qquad (59)$$

$$32lx_2 - 12x_3 = 13Pl \qquad (60)$$

для определения переменных x_2 и x_3. Система (59) – (60) имеет те же решения $x_2 = \frac{7}{16}P; x_3 = \frac{1}{12}Pl$, что и исходная система (56), но степень чувствительности этих решений к погрешностям исходных данных будет совсем другой.

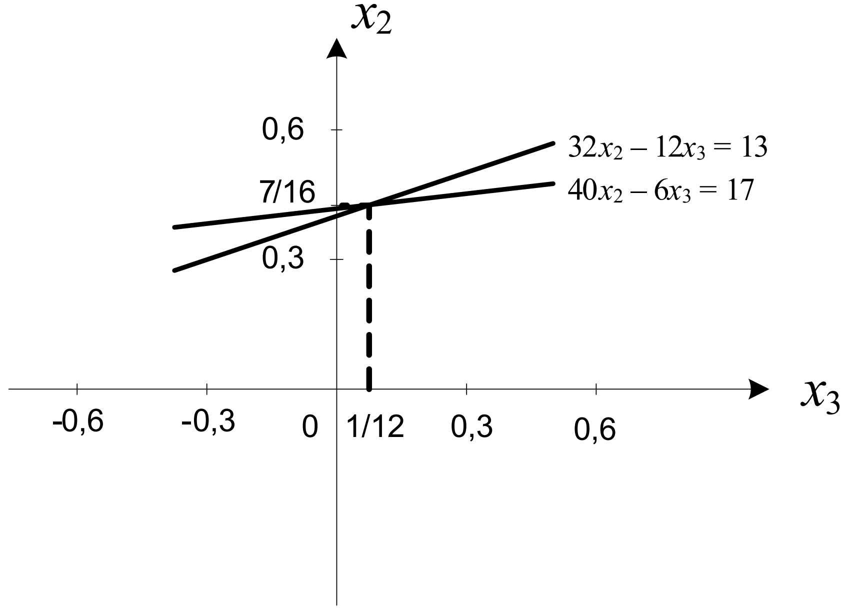
Изменение степени обусловленности решений может происходить и при эквивалентных преобразованиях, не изменяющих порядка системы. Так, если вычесть из уравнения (59) почленно уравнение (60), то получим

$$8lx_2 + 6x_3 = 4Pl, \qquad (61)$$

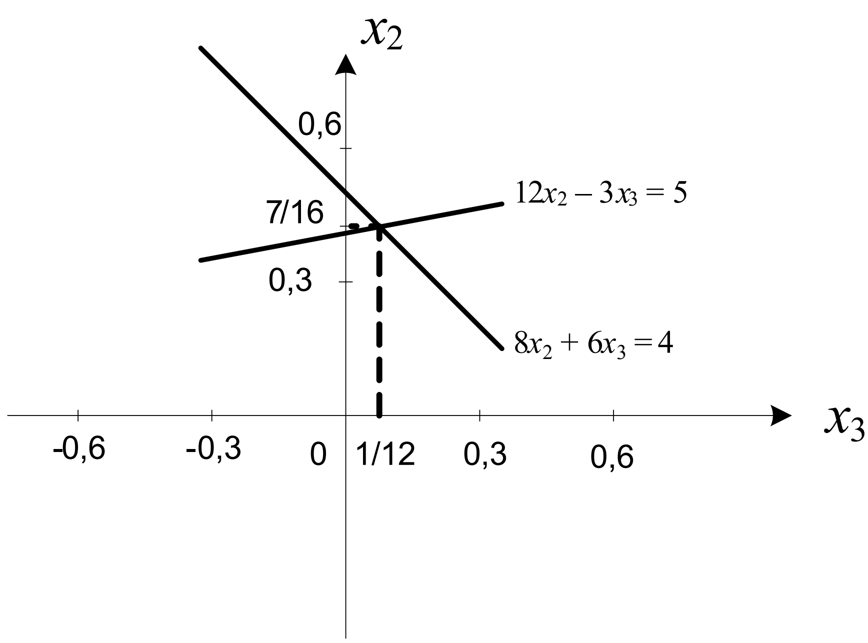
а если сложить уравнения (59) и (60), то получим

$$12lx_2 - 3x_3 = 5Pl. \qquad (62)$$

Система (61) – (62) эквивалентна системе (59) – (60) и имеет те же решения x_2 и x_3. Однако чувствительность этих решений к вариациям коэффициентов, как легко проверить, будет различной. Действительно, уравнения (59), (60), (61), (62) – являются уравнениями прямых линий. Воспользовавшись формулами аналитической геометрии, нетрудно вычислить, что тангенс угла между прямыми (59) и (6) равен -0,212, а тангенс угла между прямыми (61) и (62) равен +1,23 (хотя точки пересечения прямых (59) и (60) те же, что и у прямых (61) и (62)). Напомним, что величина угла пересечения служит хорошей мерой обусловленности решений систем двух уравнений с двумя неизвестными. Чем меньше угол пересечения, тем хуже обусловлены решения системы. На рис. 7[а] показаны прямые, описываемые уравнениями (59) – (60), а на рис. 7б – прямые, описываемые уравнениями (61) – (62). Изменение степени обусловленности сразу видно.



(а)



(б)

Рисунок 7

Пример 10. Вычисление частот малых колебаний

Необходимость в вычислении частот малых колебаний различных механических и электрических систем часто возникает в самых различных областях техники – при расчете зданий и сооружений, расчете колебательных контуров в радиотехнике, резонансных явлений в электрических сетях и т. д.

Расчеты частот собственных колебаний в различных областях техники имеют много общего, поэтому удобно рассмотреть их на примере механических систем. Простейшим примером будет система с одной степенью свободы – т. е., например, массивное тело, лежащее на упругой опоре (рис .8) и способное на малые перемещения в вертикальной плоскости. Уравнение этих перемещений имеет вид:

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1 x_1\,, \tag{63}$$

где x_1 – перемещение, m – масса тела, k – коэффициент пропорциональности между перемещением и силой упругости опоры, препятствующей перемещению и имеющей, поэтому, знак минус. Характеристический полином уравнения (63) имеет вид

$$\lambda^2 + a_{11} = 0\,,$$

где $a_{11} = \dfrac{k_1}{m_1}$, и имеет чисто мнимые корни $\lambda_{1,2} = \pm j\omega$, где ω – частота колебаний (затуханием колебаний пока пренебрегаем).

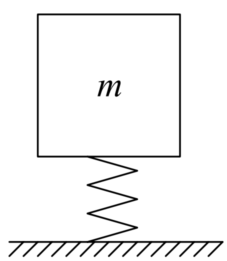


Рисунок 8

Для систем с несколькими степенями свободы, для систем, состоящих из нескольких взаимодействующих тел, уравнения динамики примут вид:

$$\left.\begin{array}{l}\ddot{x}_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = 0;\\ \ddot{x}_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = 0;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ddot{x}_m + a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m = 0,\end{array}\right\} \tag{64}$$

где коэффициенты a_{ij} при $i \neq j$ отражают степень взаимодействия между различными телами. Помимо уравнений динамики (64) часто приходится учитывать и кинематические соотношения между перемещениями. Их записывают в виде уравнений, не содержащих производных, например, в виде уравнений

$$a_{k+1}x_1 + a_{k+2}x_2 + \ldots + a_{k+m}x_m = 0\,. \tag{65}$$

В целом системы уравнений для определения частот малых колебаний принимают вид:

$$\left.\begin{array}{l} \ddot{x}_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0; \\ \ddot{x}_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0. \end{array}\right\} \tag{66}$$

В системе (66) часть уравнений содержит производные, часть – не содержит. Заменяя в уравнениях, содержащих производные, оператор дифференцирования на число λ, приходим к системе алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} (\lambda^2 + a_{11})x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + (\lambda^2 + a_{22})x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0. \end{array}\right\} \tag{67}$$

Эта система будет иметь ненулевые решения лишь при тех значениях λ^2, при которых определитель системы

$$\det = \begin{vmatrix} \lambda^2 + a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{68}$$

обращается в нуль. Эти значения λ^2 называют собственными значениями.

Таким образом, задача вычисления частот малых колебаний сводится к обобщенной задаче вычисления собственных значений, и тем самым – к решению известного матричного уравнения

$$(A - \lambda^2 \overline{E})x = 0\,, \tag{69}$$

где $\overline{E}$ - квазиединичная матрица, или – в более общей постановке – к решению матричного уравнения

$$A(\lambda)x = 0\,, \tag{70}$$

где элементами матрицы A могут быть полиномы от переменной λ различных степеней. Так, например, в задаче о вычислении частот малых колебаний с учетом их затухания элементами матрицы A могут быть полиномы второй степени:

$$(D^2 + 2nD + a_{kk})x_k\,, \tag{71}$$

где коэффициент n пропорционален скорости затухания колебаний, а их частота ω равна

$$\omega = \sqrt{a_{kk} - n^2}\,. \tag{72}$$

Об этих уравнениях говорилось в §7 главы четвертой, и было указано, что решения таких уравнений часто оказываются некорректными. Методы избежания некорректности с подробным обоснованием и примерами изложены в [4] и [20].

Более коротко о них рассказано в §6 главы пятой при рассмотрении четвертой триады.

Пример 11. Строительная механика

Рассмотрим балку AB, лежащую на двух опорах (рис. 9). Длина участка балки левее левой опоры – $2l_1$, между опорами - $2l_2$,, справа от правой опоры - $2l_3$. Требуется найти нагрузку на левую опору x_1 и на правую опору x_2. Вес балки пропорционален ее длине.

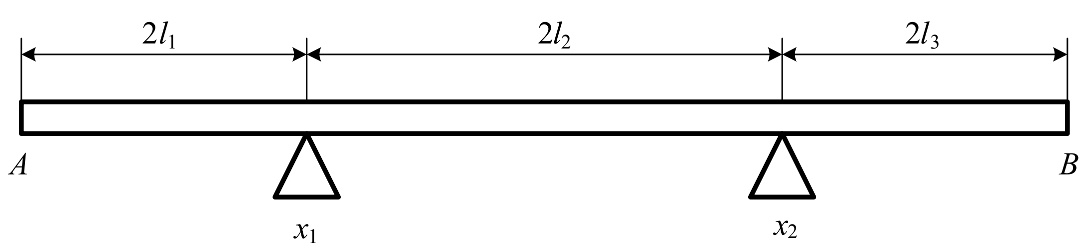


Рисунок 9

В данном случае несложно составить уравнения равновесия моментов относительно точки A и относительно точки B. Относительно точки A имеем:

$$2l_1^2 - 2l_1x_1 + (2l_1 + l_2)\cdot 2l_2 - (2l_1 + 2l_2)x_2 + (2l_1 + 2l_2 + l_3)\cdot 2l_3 = 0\,. \qquad (73)$$

Преобразуя, получим:

$$l_1x_1 + (l_1 + l_2)x_2 = m^2\,, \qquad (74)$$

(где $m = l_1 + l_2 + l_3$).

Аналогично, составляя уравнения равновесия моментов относительно точки B, получим:

$$(l_2 + l_3)x_1 + l_3x_2 = m^2\,. \qquad (75)$$

Решая систему уравнений (74) – (75), находим следующие формулы для усилий x_1 и x_2:

$$x_1 = \frac{(l_1 + l_2)^2 - l_3^2}{l_2};\, x_2 = \frac{(l_2 + l_3)^2 - l_1^2}{l_2}\,. \qquad (76)$$

Формулы (76) сразу указывают на возможную опасность: если, например, сумма $l_1 + l_2$ близка к l_3, то усилие x_1 мало. Пока $x_1 > 0$ балка устойчиво лежит на опорах. При малых ошибках в измерении длин в этом случае возможно решение $x_1 < 0$, а это означает, что балка соскользнет со второй опоры и может упасть.

При $l_1 + l_2 = l_3$ балка находится на границе устойчивости и задача проверки ее устойчивости – не корректна. При сколь угодно малых погрешностях величин l_1, l_2, l_3 балка может перейти от устойчивости к неустойчивости и наоборот. Если решение в общем случае еще не получено, то корректность решения легко проверить по условию $\Delta_1 = \begin{vmatrix} m^2 & l_1 + l_2 \\ m^2 & l_3 \end{vmatrix} = 0$, поскольку обращение определителя Δ_1 в нуль означает, что $x_1 = 0$ и балка находится на границе устойчивости.

Получение решения в общем виде, в виде формул типа (76) возможно лишь в самых простейших случаях. Для любых сколько-нибудь сложных систем и сам расчет, и расчет возможных погрешностей можно провести только численно (да и компьютеры оперируют почти исключительно с числами). Проведем подробный расчет для случая l_1 = 1 метр, l_2 = 1 метр, l_3 = 1,9 метра. Вес балки 100 кг/метр.

Для решения уравнений (74) – (75) воспользуемся формулами Крамера. Имеем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2{,}9 & 1{,}9 \end{vmatrix} = 1{,}9 - 2 \cdot 2{,}9 = -3{,}9\,;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} m^2 & 2 \\ m^2 & 1{,}9 \end{vmatrix} = m^2(1{,}9 - 2) = -m^2 \cdot 0{,}1, \text{ где } m^2 = 3{,}9^2 = 15{,}21;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & m^2 \\ 2{,}9 & m^2 \end{vmatrix} = m^2(1 - 2{,}9) = -m^2 \cdot 1{,}9\,.$$

Далее вычисляем: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 0{,}39$; $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 7{,}41$; нагрузки на опоры в килограммах составляют 39 и 741 килограмм соответственно на левую и на правую опоры.

Теперь оценим возможные погрешности в расчете усилий, если длины l_1, l_2, l_3 были измерены с погрешностью.

Начать расчет удобно с вычисления модульных определителей, о которых рассказывалось в главе 3. Имеем: Δ_{mod} = -(5,8 +1,9) = -7,7 = 1,98Δ; $\Delta_{1mod} = -m^2(2+1{,}9) = -m^2 \cdot 3{,}9 = 39 \cdot \Delta_1$; $\Delta_{2mod} = -m^2(2{,}9+1) = -m^2 \cdot 3{,}9 =$ $= 2{,}05 \cdot \Delta_2$. Из этих соотношений сразу видно, что для Δ и Δ_2 их модульные определители всего лишь в 1,98 и 2,05 раза больше их самих. Отсюда – с учетом формул, приведенных в главе третьей – следует, что малые погрешности в измерениях не могут существенно повлиять на величину определителей Δ и Δ_2. Поэтому дальнейшего исследования в отношении их (а, значит, и в отношении нагрузки x_2) можно не проводить.

Совсем другое заключение следует для определителя Δ_1. Для него модульный определитель в 39 раз больше его самого и поэтому уже при погрешности ε = 1,3% величина Δ_1 может измениться коренным образом. Поскольку оценка по величине модульного определителя является – как уже говорилось в главе 3 – оценкой «сверху», то проведенный простой расчет не означает, что при ε = 1,3% результаты вычисления x_1 будут обязательно неверными. Простая оценка по модульному определителю говорит только о необходимости более тщательного расчета, говорит лишь о возможности – а не об обязательности – больших погрешностей в результатах вычислений.

Предположим, что с погрешностью ε была измерена величина l_3. Подставим в определитель $\Delta_1 = \begin{vmatrix} m^2 & 2 \\ m^2 & 1{,}9 \end{vmatrix}$ вместо l_3 = 1,9 значение

l_3 = 1,9(1+ ε_3), где ε_3 может быть и положительным и отрицательным. Получим (пренебрегая квадратами малых величин ε_3), что

$$\Delta_1 = (3{,}9 + 1{,}9\varepsilon_3)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1{,}9 + 1{,}9\varepsilon_3 \end{vmatrix} = -(15{,}21 + 14{,}8\varepsilon_3)(0{,}1 - 1{,}9\varepsilon_3)$$
$$= (1{,}521 - 28{,}9\varepsilon_3) = -1{,}521(1 - 19\varepsilon_3);$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2{,}9 + 1{,}9\varepsilon_3 & 1{,}9 + 1{,}9\varepsilon_3 \end{vmatrix} = -(3{,}9 + 1{,}9\varepsilon_3) = -3{,}9(1 + 0{,}488\varepsilon_3);$$
$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 0{,}39(1 - 19{,}488\varepsilon_3).$$

Таким образом, уже при погрешности $\varepsilon_{3\,кр.}$ = 1/19,488 = 5,14%, нагрузка x_1 может обратиться в нуль и балка упадет. Более точный расчет, без пренебрежения произведениями малых величин, дает для $\varepsilon_{3\,кр.}$ = 5,25%. Удобнее эту величину можно получить непосредственно из условия обращения в нуль определителя Δ_1; при ε_3 = 0,0525 будет Δ_1 = 0.

Впрочем, расчет через ε удобен при ручном счете. При компьютерных вычислениях удобнее просто провести серию расчетов, постепенно увеличивая погрешности в задании исходных величин l_1, l_2 и l_3. Здесь трудность заключается только в отыскании наиболее неблагоприятного, но возможного сочетания знаков вариаций ε_1; ε_2; ε_3. В общем случае, когда решение зависит от трех параметров надо выполнить 2^3 = 8 вариантов расчета. Для рассматриваемого примера достаточно очевидно, что наиболее неблагоприятным для решения x_1, будет сочетание, когда истинные значения l_1 и l_2 меньше расчетных, а значение l_3 больше расчетного, т. е. $\varepsilon_1 < 0$; $\varepsilon_2 < 0$; а $\varepsilon_3 > 0$. Произведем расчет для $|\varepsilon_1| = |\varepsilon_2| = |\varepsilon_3|$ = 0,01, т. е. когда l_1 = 0,99; l_2 = 0,99; l_3 = 1,919. В этом случае $m = l_1 + l_2 + l_3$ = 3,999; Δ_1 = -0,0975; Δ = -3,98; x_1 = 0,0245. Таким образом, погрешность измерения всех исходных данных в 1% приводит в данном случае к изменению решения x_1 во много раз (от x_1 = 0,39 до x_1 = 0,0245). А уже при $|\varepsilon_1| = |\varepsilon_2| = |\varepsilon_3|$ = 2,57%, при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ = -0,0257 и ε_3 = +0,0257, определитель Δ_1 обращается в нуль, а это означает, что решение изменяется коренным образом: балка уже не будет устойчиво стоять на двух опорах, она может соскользнуть с правой опоры и упасть.

Отметим, что данный пример можно решить несколько проще, заменив второе уравнение моментов (75) на уравнение нагрузок

$$x_1 + x_2 = 2(l_1 + l_2 + l_3), \tag{77}$$

поскольку сумма нагрузок на опоры равна, естественно, весу балки. Конечные формулы (76) для решений x_1 и x_2 и зависимости погрешностей решений от неточностей исходных данных остаются прежними.

Рассмотренный пример несложен и решается легко. Он приведен для иллюстрации того, что:

1. надежная оценка возможной погрешности решения достигается при учете всех возможных вариаций параметров (в рассматриваемом примере – вариаций параметров l_1, l_2, l_3) и всех их возможных сочетаний. Это требует большого объема вычислений (если число параметров равно n, то число комбинаций знаков вариаций равно 2^n);

2. для предварительной оценки надежности решений системы линейных алгебраических уравнений удобно использовать очень простое вычисление «модульных определителей», описанных в главе 3. Сравнение обычного определителя, входящего в формулы Крамера, с «модульным определителем» сразу указывает на те решения, погрешности которых могут быть много больше погрешностей исходных данных и которые поэтому требуют более тщательного исследования, с учетом возможных вариаций всех параметров объекта.

Пример 11 показывает также, что в задачах строительной механики (как и в других областях техники) возможны встречи со статическими системами, имеющими малые запасы устойчивости. Конечно, в такой простой системе, как рассмотренная в примере 11, все достаточно прозрачно и недоразумений не вызовет. Однако во встречающихся на практике гораздо более сложных системах распознание малых запасов устойчивости является очень непростым делом, и поэтому использование методов, изложенных в главах 1 – 5, может существенно помочь и уменьшить вероятность аварий. Дело в том, что отыскание усилий и нагрузок в сложных системах, состоящих из большого числа взаимодействующих элементов, требует решения систем, состоящих из большого числа уравнений. В этих случаях ограничиваются обычно вычислением решений при номинальных значениях параметров, не проверяя степень обусловленности решений, не проверяя величину погрешности решений при учете погрешностей в исходных данных и различных величин и сочетаний знаков этих погрешностей. Не производят эти проверки потому, что они требуют очень большой вычислительной работы – на много порядков большей, чем расчет при номинальных значениях параметров. В этих условиях особое значение имеют изложенные в предыдущих главах методы выявления «особых» объектов.

§2. Задачи

1. Система управления задана системой уравнений в «отклонениях»:

$$T_m \frac{dx_1}{dt} = -0{,}06 x_1 + x_2 - x_3 , \tag{78}$$

где T_m – постоянная времени, в дальнейшем расчете величина постоянной времени выбрана равной T_m = 1,26 секунд, x_1 – отклонение регулируемой величины от номинального значения, x_2 – управление, x_3 – отклонение момента сопротивления от номинального значения. Это отклонение является стационарным случайным процессом со спектром

$$S_{x_3} = \frac{1}{(\omega^2 + 0{,}81)^2} . \tag{79}$$

По общим правилам преобразования спектров вида (79) в систему уравнений для расчета устойчивости, спектру (79) соответствуют уравнения:

$$\dot{x}_3 = x_4 ; \tag{80}$$

$$\dot{x}_4 = -0{,}81 x_3 - 1{,}62 x_4 . \tag{81}$$

Из условия минимума среднеквадратического критерия качества управления регулятор системы управления выбран в виде:

$$x_2 = -0{,}71 x_1 - 1{,}12 x_3 - 0{,}55 x_4 , \tag{82}$$

где 0,71; 1,12 и 0,55 – коэффициенты усиления. Переменные x_3 и x_4 трудно доступны для измерения, поэтому при практической реализации системы управления уравнение регулятора (82) необходимо (путем эквивалентных преобразований уравнений (79) – (81)) заменить на уравнение, связывающее переменные x_1 и x_2 и их производные. Точно также переменные x_3 и x_4 надо исключить из уравнения (82).

Требуется: проверить наличие вырождения в системе, получившейся после исключения переменных x_3 и x_4 и на этой основе дать заключение о параметрической устойчивости системы управления. Выявить – вариации каких коэффициентов приводят к потере устойчивости.

2. На примере системы двух дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
(D+1)x_1 + (D+2)x_2 &= 0; \\
(D+2)x_1 + (D+5)x_2 &= 0
\end{aligned}
$$

с характеристическим полиномом

$$
\begin{vmatrix} \lambda+1 & \lambda+2 \\ \lambda+2 & \lambda+5 \end{vmatrix} = 2\lambda + 1
$$

с единственным корнем λ_1 = -0,5, лежащем в левой полуплоскости комплексного переменного и не близко от мнимой оси, объясните, почему известная оценка наличия запасов устойчивости по расположению корней характеристического полинома далеко не для всех систем дает правильный ответ? Какое обстоятельство в этой оценке не учтено?

Заключение

Материал настоящего учебного пособия в значительной мере основан на результатах исследований автора и его сотрудников, выполненных в СПбГУ. Подробный перечень публикаций автора и сотрудников приведен в библиографии четвертого издания книги [4], позиции 1, 2, 3, 4, 5, 28, 29, 32, 33, 34, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 47, 57, 68 (всего 23 публикации).

Основная особенность подхода, использованного в этих публикациях – учет возможности изменения свойств решений при эквивалентных (равносильных) преобразованиях. Прежние подходы к проблеме достоверности инженерных расчетов и компьютерных вычислений такой возможности не учитывали. Ее учет позволил выявить ограниченность и неточность ряда привычных положений, на которые традиционно опирались при расчетах. (Так, например, было показано, что существование функции Ляпунова не гарантирует реальной устойчивости, известная теорема о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметров не всегда верна, исследование корней характеристического полинома не может во всех случаях дать достоверный ответ на вопрос об устойчивости и т.п.). Потребовались исследования и разработка новых методов обеспечения достоверности и надежности инженерных расчетов. Основные результаты этих исследований изложены в настоящем учебном пособии. Использование этих результатов позволяет уменьшить аварийность, снизить вероятность техногенных аварий и катастроф, поскольку значительная часть этих аварий – сейчас это признано – происходит из-за ошибок и неточностей при расчете и проектировании.

Приложение

Анализ катастроф, причины которых связаны с неточностями методов проектирования и расчета

Настоящее «Приложение» не входит в основной текст учебного пособия, но с ним полезно ознакомиться потому, что недавно открытые систематические ошибки в расчетах, о которых говорилось в основном тексте книги, приводили – и приводят до сих пор – к авариям и катастрофам. Аварий, происходящих из-за неполноты и неточности методов расчета, происходит много – гораздо больше, чем это учитывается официальной статистикой, которая предпочитает списывать большинство аварий на «человеческий фактор», на ошибки операторов, пилотов и т. д., вместо того, чтобы исследовать и найти истинные причины. Официальному расследованию причин аварий и катастроф очень часто, почти всегда, нельзя верить. В расследовании, например, авиационных катастроф обязательно участвуют представители авиационных компаний, авиастроительных заводов и фирм. Все они стараются доказать, что их фирма не виновна в катастрофе и дружно валят вину на летчиков, на так называемый «человеческий фактор», особенно если летчики погибли и возразить не могут. Официально причиной большей части катастроф объявляется «человеческий фактор», ошибки пилотов, хотя часто истинные причины катастрофы совсем другие, и в их числе – неточности методов расчета и проектирования, используемых фирмами.

Вот что пишет, например, об этом В. В. Решетников, генерал-полковник, командовавший в свое время дальней авиацией и участвовавший в во множестве расследований аварий и катастроф: «Не было в моей жизни ни одного расследования летного происшествия, в котором самый очевидный факт, ставший причиной трагедии, не оспаривался бы со стороны тех, чьи ведомственные «уши» предательски торчали из обломков». Далее он продолжает: «Крупные специалисты, профессионалы высокого класса, входившие в состав комиссий, расследующих катастрофы, вопреки очевидности доказывали непричастность своих фирм».

В пятой главе, в §3 уже рассказывалось о катастрофах самолетов ТУ-144 в 1973 году и *А*-310 в 1994 году, истинные причины которых раскрылись лишь через многие годы. Расскажем дополнительно о некоторых катастрофах последних лет, об их причинах и о том, как их расследовали.

1. 09 июля 2006 года в Иркутске при посадке разбился и сгорел аэробус *А*-310, спроектированный и построенный франко-германским авиастроительным предприятием с центром в г. Тулуза. Самолет летел под управлением российского экипажа, приземлялся нормально и уже коснулся колесами посадочной полосы аэродрома. В этот момент

командир корабля, как обычно, нажатием соответствующего рычага дал команду на «реверс тяги» двигателям, чтобы создать тормозящее усилие, сократить длину пробега по земле и не дать самолету выкатиться за пределы аэродрома. Вместо торможения самолета произошел его разгон. Самолет понесся по взлетно-посадочной полосе с возрастающей скоростью, докатился до ограды аэродрома, пробил ее, врезался в гаражи, стоящие сразу за оградой, и загорелся. Погибли 124 пассажира и все летчики. Спаслись 20 пассажиров, сидевших в хвосте самолета. Они потом рассказывали, что даже они, пассажиры, заметили, что самолет, уже коснувшись колесами земли, стал вдруг разгоняться.

Казалось бы, что здесь причина катастрофы ясна: система управления тягой двигателя была не исправна. Летчик, нажав соответствующий рычаг, дал команду «реверс», система управления исполнила совсем другую команду: команду «полный вперед». Возникновение такой неисправности на сравнительно недавно выпущенном с завода самолете вполне возможно и наиболее вероятно связано с тем, что реальные запасы устойчивости и надежной работы системы управления оказались много меньше расчетных, и к роковой дате – к 09 июня 2006 года – они уже исчерпались. Все системы аэробуса *А*-310 рассчитывались, разумеется, с помощью компьютеров, а при этом – как уже говорилось ранее – возможны ошибки в оценке запасов устойчивости и надежной работы из-за неучета недавно открытых в СПбГУ новых свойств эквивалентных преобразований, особенно существенных для компьютерных вычислений.

А теперь посмотрим, какое заключение о причинах катастрофы вынес расследовавший ее Межгосударственный авиационный комитет (МАК). МАК обвинил во всем летчиков, заявил, что командир воздушного судна «непроизвольно задел рукой рычаг управления двигателями и тем самым задал исполнительным механизмам команду прямой тяги» (цитирую интервью председателя Научно-технической комиссии МАК Виктора Трусова газете «Известия» №01, 10.01.07, стр. 5).

В этом заключении МАК сразу несколько несообразностей: 1. опытные пилоты не «задевают непроизвольно» важные рычаги; 2. если даже летчик сделал эту редчайшую ошибку, то у него было достаточно времени ее исправить; от начала разгона самолета до его наезда на приаэродромные гаражи прошло 30 секунд. Все это время даже пассажиры, без приборов, ощущали, что самолет не тормозится, а разгоняется. Получается, что пассажиры ощущали, а опытный летчик ничего не ощущал и за 30 секунд ничего не сделал для исправления своей случайной ошибки? Все это полная несообразность. Совсем другое дело – неисправная работа системы управления, когда она выполняет совсем не те команды, которые ей дает летчик. Вот здесь уже действительно за 30 секунд мало что можно сделать.

Таким образом, заключение МАК явно пристрастно и уводит в сторону от истинной причины катастрофы. Вот как отозвался о заключении МАК опытный летчик, начальник отдела подготовки летного состава «Аэрофлота» В. Саженин: «Иркутск я бы оставил в стороне. Там «человеческий фактор» не причем. Я сам 15 лет летал именно на этом самолете (*А*-310) и у меня были точно такие же отказы. Просто мне везло – на тех аэродромах было больше места. И не было гаражей…» (из его интервью газете «Известия», №172, 19.09.06, стр. 2).

Анализ посадок аэробусов *А*-310 и *А*-320 на зарубежных аэродромах, где регистрируются и становятся известными не только катастрофы, но и авиационные происшествия, показывает, что случаи «выкатывания» этих аэробусов за пределы взлетно-посадочной полосы не единичны. Но внимательного исследования проектной и технической документации «особых» объектов, для выявления систем с малыми запасами устойчивости до сих пор не проводилось. И вот результат: почти точно через год после катастрофы в Иркутске, 18 июля 2007 самолет *А*-320 бразильской авиакомпании при посадке в Сан-Паулу не смог затормозить, выкатился за пределы аэродрома, налетел на здание авиакомпании, загорелся и погубил более 200 человек. Возможно, что и эту катастрофу спишут на «ошибку пилота». Если так – то тем хуже для будущих авиапассажиров. Для спасения их жизней надо не пилотов обвинять, а внимательно исследовать возможные ошибки при проектировании и расчете.

2. Теперь рассмотрим и проанализируем одну из самых страшных катастроф – гибель самолета Ту-154 авиакомпании «Пулково» 22 августа 2006 года над Донецком, когда погибли 170 человек – экипаж и все пассажиры. Эту катастрофу тоже собирались «списать» на ошибки летчиков. Но тут в первый раз произошло неожиданное: журналисты сумели достать и обнародовать то, что раньше всегда МАК тщательно засекречивал. Журналисты сумели достать копии записей сохранившихся бортовых самописцев и опубликовали их в газете «Известия» №208 от 10.11.2006 г. на стр. 4.

Ознакомившиеся с этой публикацией опытные летчики и инженеры сразу же установили и всю картину катастрофы, и ее причину. Главная причина – погрешности при проектировании и расчете самолета. При его расчете допустили не замеченную сразу опасную особенность его аэродинамики: обычно у самолетов при превышении углом атаки критического значения происходит срыв потока и подъемная сила падает. А самолет ТУ-154 при больших углах атаки переходит в так называемый «режим подхвата», когда возрастает и подъемная сила и лобовое сопротивление. Самолет быстро набирает высоту, но теряет путевую скорость. При потере скорости рули самолета перестают действовать и он сваливается в плоский штопор, из которого уже не может выйти (на выход из штопора и на другие фигуры высшего пилотажа большие пассажирские самолеты не рассчитаны – в отличие от военных истребителей и малых спортивных самолетов).

Таким образом, самолет ТУ-154 уже на стадии проектирования оказался обладающим очень опасной особенностью: «режимом подхвата». Само по себе попадание в «режим подхвата» еще не смертельно: если летчик быстро распознал этот режим и столь же быстро «дал ручку от себя», для того, чтобы «опустить нос» и уменьшить угол атаки, то скорость перестает падать, самолет не сваливается в штопор, опасность проходит. Но для того, чтобы избежать гибели, летчик должен быть хорошо обучен, должен уметь сразу распознать «режим подхвата» и должен очень быстро действовать, поскольку на правильные действия ему отпущены немногие секунды.

И действительно, самолет ТУ-154, летевший 22 августа 2006 года над Донецком в сложных условиях грозового фронта, в 11 часов 35 минут 40 секунд в условиях «болтанки» и колебаний углов атаки вошел в «режим подхвата»; уже всего через 10 секунд, в 11 часов 35 минут 50 секунд его путевая скорость упала до нуля, самолет свалился в плоский штопор и через три минуты упал на землю и разбился. За 10 секунд очень трудно и распознать положение и выполнить правильные действия. Летчики не справились с этой трудностью и самолет погиб. Очень хорошо, если бы летчики справились и спасли самолет и пассажиров, но виновны прежде всего не они, а те, кто проектировал и рассчитывал самолет, виновны те, кто оставили в самолете его опасную особенность, не устранили и не исправили ее.

На рис. 10 показана небольшая часть показаний бортовых самописцев погибшего самолета. Показаны высота полета и приборная скорость. Можно наглядно видеть, что в 11 часов 35 минут 40 секунд самолет попал в «режим подхвата», после чего быстро росла высота полета, падала скорость, и уже через10 секунд все стало необратимым: скорость упала до нуля, высота стала необратимо уменьшаться, до роковой встречи с землей осталось меньше трех минут…

Рисунок 10

Важно отметить, что в 1985 году уже была такая же катастрофа, когда самолет ТУ-154 над Учкудуком попал в тот же «режим подхвата», упал и разбился. Можно догадываться (точных данных нет), что сразу после этой катастрофы летчиков учили (на тренажерах) распознавать «режим подхвата» и быстро выходить из него. Поэтому много лет подряд катастроф по этой причине не происходило. Затем, очевидно, острота проблемы забылась, на первый план вышла экономия, занятия на тренажерах сократили. В центре подготовки «Аэрофлота», где имеются все необходимые тренажеры, за обучение пилота берут от 300 до 600 долларов в час. Авиакомпания «Пулково», которой принадлежал погибший самолет (позже, после слияния, она стала авиакомпанией «Россия») экономила, ее пилоты оказались не подготовлены к встрече с «режимом подхвата» и самолет не спасли (хотя, например, в 2005 году компания «Пулково» получила только чистой прибыли 56 миллионов долларов – так что деньги у нее были, подготовить летчиков к опаснейшей встрече с «режимом подхвата» она могла). Могла, но не сделала.

Отметим, что не сложно было бы поставить автоматическое устройство – размером со спичечный коробок – которое на основе сравнения показаний приборов об угле атаки и скорости автоматически распознавала вхождение в «режим подхвата» и предупреждала бы об этом.
Но главная вина в катастрофе лежит все же на тех, кто проектировал и рассчитывал самолет. Нельзя допускать, чтобы в самолете (да и любом другом техническом объекте) оставались особенности, создающие возможность аварии. Возможность аварии всегда может стать реальностью.

Отметим еще, что и после опубликования записей бортовых самописцев погибшего ТУ-154, когда любой грамотный инженер мог сам увидеть истинную причину катастрофы, межгосударственный авиационный комитет (МАК) в своем официальном заключении все же возложил главную вину на погибших пилотов, а о вине тех, кто в свое время рассчитывал и проектировал самолеты ТУ-154 и не устранил их опасные «особенности», не было сказано ни слова.

3. Теперь об одной из последних (по времени) аварий. 17 марта 2007 года в Самаре самолет ТУ-134 при посадке проскочил мимо взлетно-посадочной полосы, перевернулся и развалился, погубив 6 пассажиров (остальные отделались телесными повреждениями). Снова, прежде всего, заговорили об ошибке пилотов, но спасшийся бортмеханик Александр Муратов сразу заявил, что на самолете была не исправна курсоглиссадная система, помогающая пилоту при посадке. Причем эта курсоглиссадная система то работала правильно, то отказывала и запись об этом была занесена в бортовой журнал. Понятно, что командир не доверял столь ненадежно работающей системе, заходил на посадку без ее помощи и в условиях тумана «промазал».

Снова нужно сказать, что главная вина в катастрофе и гибели людей лежит на ком-то из тех, кто рассчитал, спроектировал и изготовил ненадежную курсоглиссадную систему, не оказавшую помощи летчику. Причем из того, что система то работала правильно, то давала сбой, следует, что она находилась на границе области своей надежной работы, то заходя «внутрь» этой области, то покидая ее (см. рис. №4). Но если у совсем еще неизношенного самолета одна из его многочисленных систем оказалась на границе области надежной работы, то одна из наиболее вероятных причин этого – ошибка в расчете запасов устойчивости, возникшая из-за неучета недавно открытых новых свойств эквивалентных преобразований. По расчету получалось, что область надежной и устойчивой работы велика и все системы самолета ТУ-134 должны были работать долго и хорошо, а на самом деле эта область оказалась малой и, во всяком случае, на одном из самолетов запас устойчивости исчерпался еще до 17 марта 2007 года, что и привело к катастрофе. Но если эта область оказалась малой на одном из самолетов ТУ-134, то она может оказаться столь же малой, может быстро исчерпаться и привести к катастрофам и на других самолетах типа ТУ-134, а также на самолетах других типов. Это говорит о том, что необходимо проверить техническую документацию эксплуатируемых и проектируемых самолетов для выявления «особых» объектов и систем с малыми запасами устойчивости и надежной работы.

Балтийский государственный технический университет (БГТУ) «Военмех» предлагал авиакомпании «Пулково» проверить техническую документацию, дирекция «Пулково» отказала. А ведь если бы не отказала, то катастрофа самолета ТУ-154 над Донецком 22 августа 2006 года могла бы быть предотвращена и тогда 170 человек погибших остались бы живы.

Надо сказать, что многие авиакомпании и России и за рубежом славятся своим нежеланием делать что-либо для повышения безопасности полетов. Гораздо печальнее то, что государственный «Ространснадзор» и его подразделение – «Северо-Западное управление государственного авиационного надзора» – то есть организации, обладающие большими правами, единственной обязанностью которых является обеспечение безопасности – тоже ничего не сделали, причем с любопытным «обоснованием»: эксплуатируемые сейчас «воздушные суда обладают сертификатами и отвечают нормам летной годности» (из их ответа на предложение «Военмеха»; этот ответ опубликован в [26]. О том, что «Нормы» и «сертификаты» необходимо совершенствовать, используя новые достижения науки – в ответах «Военмеху» не было сказано ни слова (более подробно борьба БГТУ «Военмех» за безопасность авиации и его переписка с чиновниками освещены в [26]).

Надо отметить, что в прежние годы такого неуважения к науке не было, и безопасность полетов постепенно возрастала. Характерный пример – победа в середине XX века над «флаттером» и «шимми». В те годы, при увеличении скорости полетов, стали особо опасны сложные автоколебания крыльев («флаттер») и самолетных шасси («шимми»). В те годы, разумеется, все самолеты тоже обладали нужными сертификатами и соответствовали требованиям тогдашних «Норм» летной годности, но аварии и катастрофы происходили. Научное исследование причин «флаттера» и «шимми» позволило найти методы устранения этих опасных явлений и – что самое главное – эти методы были быстро использованы. Тогдашний Госавианадзор сразу потребовал усовершенствовать «Нормы» и «сертификаты» и привести самолеты в соответствие с новыми нормами. В результате аварии, имевшие причиной встречу с «флаттером» и «шимми» прекратились, безопасность полетов, безопасность пассажиров существенно возросли. Надо отметить, что все это произошло во многом благодаря активной научной и организационной поддержке тогдашней Академии наук СССР. Молодой исследователь «шимми» М. В. Келдыш (см. его монографию [27]) был в 1946 году избран академиком, а затем и возглавил Академию наук.

Спустя полвека уже Российская Академия наук (РАН) поддержала научную сторону начатых в Санкт-Петербургском госуниверситете исследований новых свойств эквивалентных преобразований, исследований «особых» объектов и методов предотвращения аварий. Научным семинаром Института проблем управления РАН результаты этих исследований были признаны «научным открытием, имеющим большое практическое значение». Затем основные результаты были опубликованы в наиболее авторитетном из журналов РАН – в «Докладах Академии наук» (публикация [28]). При этом, ввиду важности и новизны поднятых вопросов, статья [28] была опубликована только после изучения ее специально созданной комиссией из трех академиков. Так что научную сторону исследований – результаты которых были опубликованы в [2], [3], а позже в монографиях [4], [11], [19] – Российская Академия наук поддержала, что способствовало признанию результатов исследований научным сообществом России и переводам на другие языки (см. [4], [19], [21]).

К сожалению, любые научные результаты, даже воплощенные в публикациях и получившие признание, сами по себе еще не предотвращают аварий. Авиакомпании и чиновники сопротивляются использованию научных результатов, даже когда они непосредственно касаются спасения жизни людей (об их сопротивлении и о непростой борьбе за безопасность в авиации – рассказано подробнее в [26]). Здесь была бы полезна не только чисто научная, но и организационная помощь Академии наук (которая так помогла в свое время борьбе с «флаттером» и «шимми»). К сожалению, внимание Академии наук в последнее десятилетие отвлечено на борьбу с недальновидными чиновниками и депутатами – на борьбу за научную самостоятельность Академии, за ее материальное обеспечение, за собственность академических институтов, на которую давно с вожделением смотрят многие влиятельные бизнесмены.

Уважение общества к науке, доверие к ней за последние десятилетия упали – и это плохо, поскольку только наука может помочь сберечь человеческие жизни в современном, насыщенном техникой мире.

Наука очень много сделала для предотвращения аварий и катастроф. Были разработаны новые материалы, новые средства управления. Вероятность аварий и катастроф уменьшилась – но уменьшилась меньше, чем хотелось бы. К сожалению, научно-технический прогресс, ликвидируя одни источники катастроф, порождает другие – пусть менее опасные, но все же неприятные, с которыми обязательно нужно бороться. Появление быстродействующей вычислительной техники, перевод большей части инженерных расчетов на компьютеры был большим благом. В то же время, этот перевод – поскольку компьютеры интуицией не обладают – обострил проблему надежности и достоверности вычислительных алгоритмов и компьютерных вычислений в целом. О путях решения этой проблемы рассказано в настоящей книге, о возникающих трудностях в их реализации рассказано в публикации [26].

Мы рассказали наиболее подробно о причинах авиационных катастроф, поскольку именно в авиации используется наиболее сложная техника и самые последние достижения науки. Но и в более «приземленных» областях техники постоянно происходят аварии, связанные с неточностями и погрешностями методов расчета и проектирования.

Характерный пример – серия аварий зданий и сооружений в первом квартале 2006 года:

1. 03 января 2006 года в Германии, в земле Бавария рухнула крыша катка. Погибло 11 человек.

2. 27 января 2006 года в Польше, в городе Катовице обрушилась крыша универмага. Погибло 67 человек.

3. 23 февраля 2006 года в Москве обрушилась крыша Басманного рынка.

4. 20 марта 2006 года в Ярославле рухнула крыша недостроенного торгового центра.

5. 31 марта 2006 года рухнула крыша построенного в 2005 году катка «Охта-парк» во Всеволожском районе Ленинградской области.

В качестве главной и основной причины всех этих аварий выдвигалось скопление снега на крышах. Под его тяжестью крыши рухнули. Да, во второй половине зимы 2005 – 2006 года снега было больше, чем в предыдущие годы. Но «больше» совсем не означает «катастрофически больше». Крыши зданий и сооружений в местностях, где выпадает снег, рассчитываются на экстремальные снеговые нагрузки, на такое количество снега, которое выпадает не чаще, чем один раз в 30 – 40 лет. А такого необычно большого, чрезвычайного, выпадения снега в 2006 году не было. Снега выпало много, но в пределах расчетных снеговых нагрузок, тех нагрузок, на которые здания были рассчитаны. А раз они рухнули, то это означает, что истинные запасы прочности и устойчивости зданий оказались много меньше расчетных значений – т. е. расчеты запасов прочности и устойчивости оказались не верны, хотя и проводились грамотными инженерами. Очень мала вероятность того, что во всех пяти перечисленных случаях аварий 2006 года инженеры допускали в расчетах элементарные ошибки, или же строители, или те, кто эксплуатировал здания, далеко отступали от проектных решений.

Наиболее вероятное объяснение серии аварий 2006 года состоит в неполноте традиционных методов расчета, не учитывающих недавно открытых в СПбГУ новых свойств эквивалентных преобразований. Неполнота традиционных методов привела к тому, что истинные запасы прочности и устойчивости оказались гораздо меньше расчетных, и в результате снегопады 2006 года – снегопады большие, но совсем не экстремальные, не опасные при правильном расчете – привели к целой серии аварий и катастроф.

И совсем не случайно аварии затронули здания и сооружения, спроектированные и построенные в последние десятилетия. В прежнее время, когда расчеты проводились вручную, интуиция опытных инженеров часто восполняла недостатки расчетных алгоритмов, не учитывающих новых свойств эквивалентных преобразований, недавно открытых в СПбГУ. Опыт инженеров позволял интуитивно распознавать «особые» объекты и избегать их. В последние десятилетия большинство расчетов выполняется с помощью компьютеров, которые интуицией не обладают. Поэтому надо особое внимание обращать на совершенствование вычислительных алгоритмов, на дополнительные проверки, обеспечивающие надежность и достоверность компьютерных вычислений. Усовершенствованные алгоритмы и дополнительные проверки, изложенные в настоящей книге, были разработаны в СПбГУ и подхвачены в БГТУ «Военмех» (более ранние исследования «Военмеха» по проблеме стабильности освещены в [29]).

Хотя рассмотренные в книге примеры относятся в основном к системам управления и (частично) к строительным конструкциям, но необходимость дополнительной проверки и совершенствования алгоритмов инженерных расчетов и компьютерных вычислений актуальна для многих отраслей техники – и не только техники.

Она актуальна, например, для экономических и финансовых задач. Иногда возражают – ведь в финансовых расчетах нет неточности или неопределенности исходных данных (что характерно для технических расчетов). В области финансов, в денежных расчетах выделенные и израсходованные суммы учитываются с точностью до копеек, в этих суммах неточности нет. Однако в экономических и финансовых расчетах необходимо учитывать возможные в ходе реализации проекта заранее не полностью предсказуемые изменения процентных ставок, курсов валют и т. п. Возможны ситуации, когда малые изменения этих факторов приводят к большим изменениям в доходах и прибыли, и возможность таких опасных ситуаций нужно заранее учитывать – иначе возможно разорение. Однако рассчитывать и предупреждать такие ситуации необходимо с учетом открытых в СПбГУ новых свойств эквивалентных преобразований, которые заставили по-новому взглянуть на всю проблему надежности и достоверности компьютерных вычислений. Обеспечить надежность и достоверность могут люди, хорошо знающие специфику расчетов и вычислений в своей отрасли. Настоящая книга поможет им в этой работе.

Литература

1. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1967, 564 с.

2. Петров Ю. П. О скрытых опасностях, содержащихся в традиционных методах проверки устойчивости. Известия ВУЗ, Электромеханика, 1991, №11, стр. 106 - 108.

3. Петров Ю. П. Устойчивость линейных систем при вариациях параметров. Автоматика и телемеханика. 1994, №11, стр. 186 – 189.

4. Петров Ю. П., Петров Л. Ю. Неожиданное в математике и его связь с авариями и катастрофами. Первое издание – 1999, 108 с., второе издание – 2000, третье издание – 2002, четвертое издание, расширенное и дополненное – 2005 г., издательство «БХВ - Петербург», 224 с. (есть перевод на английский язык, изданный в СПбГУ).

5. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986, 287 с.(третье издание; первое издание – 1974, второе – 1979 г.)

6. Математическая энциклопедия. В пяти томах. М.: Советсткая энциклопедия, 1977.

7. Математический энциклопедический словарь. М.: Научное издательство «Большая российская энциклопедия», 1995, 847 с.

8. Алимов Ш. А., Колягин Ю. М., Сидоров Ю. В. Пробный учебник для 10 – 11 классов средней школы. М.: Просвещение, 1990, 304 с.

9. Лётов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. Автоматика и телемеханика, 1960, №4, стр. 436-441, №5, стр. 561-568, №6, стр. 661-665.

10. Петров Ю. П. Синтез оптимальных систем управления при неполностью известных возмущающих силах. Издательство Ленинградского университета, 1987, 289 с.

11. Петров Ю. П. Новые главы теории управления и компьютерных вычислений. СПб, издательство «БХВ-Петербург», 2004, 192 с.

12. Зубов В. И. Методы А. М. Ляпунова и их применение. Издат. ЛГУ, 1957, 241 с.

13. Барбашин Е. А. Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970, 240 с.

14. Воротников В. И. Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. М.: Наука, 1991, 284 с.

15. Зубов В. И, Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л.: Машиностроение, 1974, 335 с.

16. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1975, 239 с.

17. Петров Ю. П. Вариационные методы теории оптимального управления. Л.: Издательство «Энергия», издание второе, 1977, 280 с.

18. Абдуллаев Н. Д., Петров Ю. П. Теория и методы проектирования оптимальных регуляторов. Л.: Энергоатомиздат, 1985, 240 с.

19. Петров Ю. П., Сизиков В. С. Корректные, некорректные и промежуточные задачи с приложениями. СПб, издат. «Политехника», 2003, 261 с. (В 2005 году ее перевод на английский язык вышел в издательстве "*VSP*", Лейден-Бостон)

20. Чертков К. Г. Исследование чувствительности к погрешностям округления собственных значений линейных систем. Тула. Известия Тульского государственного университета. 2002, с. 138 – 140.

21. Петров Ю. П. Третий класс задач физики и техники – промежуточный между корректными и некорректными. СПб, ООП СПбГУ, 1998, 30 с.

22. Ларин В. Б., Науменко К.И., Сунцев В. Н. Синтез оптимальных линейных систем с обратной связью. Киев. Наукова думка. 1973, 150 с.

23. Харитонов В. Л. Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства линейных дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения, 1978, №11.

24. Петров Ю. П. Оптимизация управляемых систем, испытывающих воздействие ветра и морского волнения. Л. Судостроение, 1973, 216 с.

25. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. Учебник для вузов. Издание восьмое, М. «Наука», 1979, 559 с.

26. Петров Ю. П. Расследование и предупреждение техногенных катастроф. Издательство «БХВ-Петербург», 2007, 104 с.

27. Келдыш М. В. Шимми переднего колеса трехколесного шасси. Труды ЦАГИ, №564, 1945.

28. Академик Данилевич Я. Б., Петров Ю. П. О необходимости расширения понятия эквивалентности математических моделей. Доклады Академии наук, 2000, том 371, №4, стр. 473-475.

29. Шароватов В. Т. Обеспечение стабильности показателей качества автоматических систем. Л.: Энергоатомиздат, 1987, 176 с.

30. Шароватов В. Т., Петров Ю. П. «Об ошибках пакета *MATLAB*» и Чертков К. Г., Петров Ю. П. «Ошибки, обнаружившиеся в пакете *MATLAB*». Труды второй Всероссийской конференции «Проектирование научных и инженерных приложений в среде *MATLAB*». Институт проблем управления Российской Академии наук, 2004, стр. 318 – 323 и стр. 324 – 327.

31. Фроленков Д. Б., Петров Ю. П. Изменение корректности при преобразованиях уравнений. Вестник СПбГУ, серия 1, выпуск 1, 2000, стр. 52 – 57.

Третье издание книги [4] и брошюра [21] имеются на сайте: *www.petrov*1930.*narod.ru*. Там же есть и их перевод на английский язык.

Предметный указатель

Оглавление