Приложение.
О «грамматике» науки

Цикл лекций для студентов, аспирантов и научных работников

Лекция первая
1. Введение

Опыт работы с аспирантами и молодыми научными сотрудниками показал, что основные проблемы в их подготовке не связаны обычно со слабым знанием основных положений и фактов – со знанием того, что можно условно назвать «словарем» науки. С этим чаще всего все в порядке.

Основные пробелы в их подготовке связаны, чаще всего, со слабым знанием того, что можно (разумеется, условно) назвать «грамматикой» науки, знанием того, как связаны между собой факты и законы, как на самом деле, в реальной научной жизни, устанавливаются новые законы и теоремы и как они опровергаются, как должен относиться аспирант и молодой научный сотрудник к бурному и стремительному потоку публикаций, потоку текущей научной информации, в котором так легко захлебнуться. А ведь надо не только плыть (не захлебываясь) в этом потоке, но и самому понемногу приумножать его, приумножать, строго соблюдая этику научной публикации и научной дискуссии, этику, выработанную опытом веков, опытом наших великих предшественников.

В освоении «грамматики» науки (не менее важной, чем ее «словарь») могли бы очень помочь учебные курсы по истории науки, истории различных научных дисциплин. К сожалению, эти курсы читаются далеко не везде, что и приводит к серьезным пробелам в подготовке молодых ученых (положение, возможно, изменится в 2003 году, когда будут введены в кандидатский минимум экзамены по истории науки (по научным дисциплинам); решение об этом принято в 2002 году).

Настоящие «лекции» имеют целью частично восполнить эти пробелы. «Лекции» построены на материале научных исследований, выполненных автором и его сотрудниками в 1990-2002 годах на одной из кафедр факультета Прикладной Математики – Процессов Управления (факультет ПМ-МУ) Санкт-Петербургского Государственного Университета (СПбГУ) (частично изложенных в первой и второй главах) и на опыте последующего обсуждения результатов этих исследований.

2. Теоремы и контрпримеры

Все началось с того, что мною в 1990 году была обнаружена неполнота весьма важного и широко применяемого во всех проектно-конструкторских организациях метода проверки параметрической устойчивости. Хорошо известно, что для надежной работы любых технических систем и устройств (а также объектов экономики, биологии, медицины) необходимо, чтобы они были не только устойчивы, но и сохраняли устойчивость при неизбежных на практике малых отклонениях (вариациях) параметров системы. Свойство сохранения устойчивости при вариациях параметров называют, в последнее время, коротко: «параметрической устойчивостью».

Еще в первой половине 20 века была постепенно сформулирована и сразу начала применяться на практике важная теорема: «если характеристический полином линейной системы имеет все корни в левой полуплоскости комплексной переменой и далеко от мнимой оси, то система параметрически устойчива» (дается осовремененная формулировка). Доказательство было основано на другой хорошо известной теореме о непрерывной зависимости корней полинома от его коэффициентов.

Но в 1990 году неожиданно было обнаружено, что известная еще с первой половины 20 века теорема о параметрической устойчивости не верна. Были продемонстрированы примеры систем, корни характеристических полиномов которых лежали в левой полуплоскости далеко от мнимой оси, а системы, тем не менее, теряли устойчивость при сколь угодно малых, неизбежных на практике, вариациях параметров. Вот простой пример:

система (где $D=\dfrac{d}{dt}$)

$$(D^3+4D^2+5D+2)x_1-(D^2+2D+1)x_2=0 \quad (1)$$
$$(D^2+4D+5)x_1-(kD+1)x_2=0$$

при k=1 имеет характеристический полином $\Delta= \lambda^3+5\lambda+7\lambda+3$

с корнями $\lambda_1= -3$; $\lambda_2= \lambda_3= -1$; однако, если коэффициент (параметр) k отличается от k=1 на сколь угодно малую положительную величину, то устойчивость теряется.

Полученный результат, опубликованный в [1], был очень важен. Он раскрывал причину таинственных до этого аварий, происходящих от неполноты традиционных методов расчета, позволял усовершенствовать, дополнить традиционных методы, уменьшить вероятность аварий самолетов, атомных реакторов и других технических объектов.

Тем не менее, этот важный результат был встречен с большим недоверием. Мне говорили: «Юрий Петрович, у Вас все уж слишком просто. Привели примеры – и все. Нет, Вы покажите: где, в каком месте, содержится ошибка в доказательстве теоремы о параметрической устойчивости».

Это возражение сразу показывает, насколько слабо ориентированы молодые научные сотрудники в соотношениях между теоремами, их доказательствами и контрпримерами, т.е. примерами, доказывающими неверность ранее сформулированных теорем. А ведь еще в 30-х годах 20 века выдающийся венгерский математик Д.Пойа (в старых переводах – Полиа) справедливо подчеркивал: «Математика состоит из двух вещей – теорем и контрпримеров» (т.е. контрпримеры не менее важны, чем теоремы и их доказательства).

Действительно, в реальной работе математика теорема возникает чаще всего как обобщение подтверждающих утверждение теоремы примеров. Так, легко проверить, что существует много примеров систем с корнями, лежащими в левой полуплоскости комплексного переменного и обладающими параметрической устойчивостью. Отсюда возникает догадка (будущая теорема): все такие системы обладают параметрической устойчивостью. Но еще до того, как начать эту догадку доказывать, превращать в теорему, исследователь проверяет догадку контрпримером – проверяет, а не существует ли систем, с корнями, лежащими в левой полуплоскости, но параметрически неустойчивых. Если хотя бы одна такая система обнаружилась – догадке конец, пытаться доказывать ее как теорему – пустая трата времени (а ведь сколько времени тратят впустую те научные работники, к сожалению, многие, которые недооценивают роль контрпримера!). Только если ни одного контрпримера не обнаружено, исследователь начинает доказывать теорему.

А когда теорема (и ее доказательство) опубликованы, то коллеги автора теоремы начинают, прежде всего, с поиска опровергающих ее контрпримеров. Начинают потому, что найти ошибку в чужом доказательстве трудно, очень трудно. Если сомневаешься в утверждении теоремы, то самое простое и эффективное – это искать контрпример. Так в реальной научной жизни чаще всего и поступают; именно так, через контрпример, чаще всего и рушатся опубликованные, но неверные теоремы (а доказательства анализируются редко).

Исторический пример: в 1821 году признанный лидер математики того времени О. Коши опубликовал (с доказательством, разумеется) теорему: «Сумма любого сходящегося ряда непрерывных функций непрерывна». А через пять лет Н. Абель нашел (и опубликовал) всего один сходящийся ряд непрерывных функций, не имеющий непрерывной суммы. Несмотря на то, что Абелю было тогда всего 24 года, и он был почти никому не известен в математическом мире, после публикации его контрпримера теорема великого Коши была немедленно признана ошибочной. И только через 22 года Зейделем и Стоксом была вскрыта причина ошибки в доказательстве Коши. Как и всякая ошибка гения, она оказалась поучительной и глубокой – Коши не учел (да и не мог учесть) не известного в 1821 году требования равномерной сходимости ряда.

Любопытна, разумеется, и непростая причина ошибки в доказательстве теоремы о параметрической устойчивости. Я расскажу о ней в последней лекции, но особой необходимости знакомства с этой непростой причиной нет. Если продемонстрирован контрпример, то теорема все равно неверна, и в причину можно не вникать. Необходимо лишь, разумеется, заменить опровергнутую теорему другой, более узкой, но верной. Я предложил использовать в расчетах устойчивости следующую теорему (доказательство приведено в [2]): параметрической устойчивостью обладают линейные системы, у которых корни характеристического полинома лежат в левой полуплоскости далеко от мнимой оси, кроме систем особых, т.е. систем, у которых определитель «матрицы степеней» обращается в нуль. Необходимо, конечно, рассказать, что такое «матрица степеней», но о ней подробно рассказано в известной публикации [2] – во всех трех изданиях книги [2], о «матрице степеней» рассказано на стр. 74-82.

Из этой новой теоремы следует простое практическое правило надежного, достоверного расчета: надо, сначала, проверить, не является ли система особой (а это очень легко сделать), после чего уже можно применять традиционные методы.

3. О правилах научной дискуссии

В феврале 2002 года новая теорема о параметрической устойчивости в кругу других интересных вопросов, о которых расскажу далее, обсуждалась на расширенном научном семинаре, на факультете ПМ-ПУ, СПбГУ, и один из наиболее авторитетных присутствующих профессоров выдвинул следующее возражение. По его мнению, «опубликованные в [1;2] контрпримеры не опровергают старой теоремы, поскольку все они относятся к вырожденным системам». Напомню, что вырожденными называют системы дифференциальных уравнений, порядок которых ниже, чем у систем того же вида, но с другими коэффициентами. Вырожденные системы часто встречаются в приложениях.

Данное возражение произвело впечатление на присутствующих на семинаре молодых (да и не только молодых) научных работников. Между тем, при самом простом анализе оно показывает свою несостоятельность. Действительно, старая теорема утверждала: параметрической устойчивостью обладают все системы с «хорошими» корнями. С учетом опровергающих ее контрпримеров, я предложил уточненную формулировку – параметрической устойчивостью обладают системы с «хорошими» корнями, кроме систем особых. Возражение уважаемого профессора равносильно другой формулировке: параметрической устойчивостью обладают системы с «хорошими» корнями, кроме систем вырожденных. Остается лишь доказать, что класс вырожденных систем совпадает с классом систем особых (возражающим это не было доказано) – и мы придем к формулировке, уже опубликованной в [2].

Таким образом, все, присутствующие на семинаре 11.02.2002 г., и молодые, и не молодые научные сотрудники не заметили, что в качестве возражения выдвигается не доказанное утверждение, а если оно будет доказано, то оно не только не опровергнет, а лишний раз докажет оспариваемое возражающим положение, ранее опубликованное в [2].

Данное обстоятельство лишний раз говорит о том, насколько оказалось утерянной культура научной дискуссии, без которой серьезная наука невозможна. А причина простая: во второй половине 20 века научные журналы редко публиковали дискуссии, и с каждым десятилетием все реже и реже. Серьезная письменная и печатная дискуссия подменялись ее суррогатом – устным обсуждением на конференциях и семинарах. Но в устной речи, если вопрос сложный, трудно уследить за логикой собеседника, да и высказанные доводы быстро забываются (как сформулировал: В. Маканин «когда я просто говорю – я за свои слова не отвечаю. Я отвечаю только за то, что написано моим пером»). Необходимо возродить публикацию дискуссий в научных журналах и шире рассказывать о великих научных дискуссиях прошлого в курсах истории науки. Только тогда мы вырастим настоящих научных работников-исследователей, которых не повергнут в смущение фразы о «вырожденных системах».

Приведем дополнительные примеры.

Формируя правила научной дискуссии полезно вспомнить очень старый известный ответ Лежандра (1752-1833) Гауссу (1777-1855) во время их дискуссии о приоритете: «Не существует открытия, - писал Лежандр, - которое нельзя было бы приписать себе, сказав, что те же вещи были найдены мной на несколько лет раньше; но если не дано этим словам доказательства, состоящего в указании места, где они были опубликованы, то это утверждение становится беспредметным и представляет собой только обиду для истинного автора открытия».

«В математике случается очень часто, - продолжает Лежандр, - что находят заново те самые вещи, которые уже были открыты другими. Подобное случалось со мной много раз, но я никогда не упоминал об этом и не называл «нашим принципом» принцип, который другой опубликовал раньше меня».

А вот другой пример, уже из 20 века: в 1960 году член-корреспондент Академии наук СССР Александр Михайлович Летов предложил метод «аналитического конструирования», т.е., собственно, метод расчета регуляторов вида

$$u=\Sigma k_i x_i \qquad (2)$$

где u – управляющее воздействие, k_i – постоянные коэффициенты, x_i – все переменные, от первой, x_1, до последней, x_n, присутствующие в математической модели объекта управления (опубликовано в [3]). А.М. Летов показал, что можно так рассчитать величины коэффициентов k_i, что будет обеспечена устойчивость системы управления, ее параметрическая устойчивость, а также хорошие переходные процессы. При этом все коэффициенты k_i в регуляторе (2) рассчитывались аналитически (а не подбором, как ранее), почему А.М. Летов и назвал свой метод «аналитическим конструированием».

Поскольку регуляторы вида (2) легко реализовывались и обеспечивали хорошее качество регулирования, они быстро стали широко использоваться на практике. Сообщения об использовании их то на одном, то на другом объекте управления десятками появлялись в 60-х гг. на страницах технических журналов того времени.

А потом произошел большой конфуз: «аналитически сконструированные» регуляторы стали причиной нескольких серьезных аварий из-за потери устойчивости, хотя по расчету казалось, что устойчивость обеспечена. Причина заключалась в том, что у многих объектов управления не все переменные x_i доступны для использования в регуляторе и их заменяли измеряемыми, пользуясь, разумеется, только эквивалентными преобразованиями, не изменяющими решений системы и ее переходных процессов. В те годы еще не знали, что эквивалентные (в классическом смысле) преобразования могут изменять параметрическую устойчивость, что и было истинной причиной аварий. Но этого в те годы не знали, и причины аварий списывали на «недостатки» метода аналитического конструирования. В результате «аналитическое конструирование» просто перестали применять, заменив его более сложными методами оптимального управления, не порождающими столь частые аварии.

Таким образом, на практике уже приходилось иметь дело с авариями, причиной которых были ошибки расчета, неразличение преобразований, эквивалентных в классическом смысле и в расширенном (о необходимости такого различения я расскажу в следующем разделе). Но тогда, в 60-70-е годы 20 века эта причина еще не была выяснена. В результате убрали только наиболее явный источник аварий – использование метода «аналитического конструирования» с исключением части переменных, но аварии, порождаемые не различением преобразований, эквивалентных в различных смыслах, хотя и более редко, но все равно происходили (см. публикацию [2]), стр 21-23.

Истинная причина аварий не была раскрыта в те годы потому, что не было тогда проведено на страницах научных журналов полноценной широкой дискуссии по поводу неожиданной и парадоксальной потери параметрической устойчивости. Научное руководство в те годы совсем не поощряло научные дискуссии в печати, на страницах журналов и книг. Я хорошо помню, как мы, специалисты, в своем кругу устно, очень горячо обсуждали интереснейшее и таинственное явление потери устойчивости при «аналитическом конструировании», но до истинной причины добраться тогда не удалось (впервые все прояснилось лишь много лет спустя, в 1987 году, в [4]).

Устное обсуждение, даже самое горячее и искреннее, не могло заменить тогда полноценной дискуссии в печати. Если бы такая дискуссия прошла тогда, то различие между преобразованиями, эквивалентными в классическом смысле и в расширенном, было бы, наверное, обнаружено много раньше и многих аварий удалось бы избежать.

Эти примеры, взятые как из давней, так и из совсем недавней истории науки, лишний раз свидетельствуют о важности письменного (а еще лучше – печатного) оформления научной дискуссии, когда аргументы оппонентов четко фиксируются на бумаге и могут быть в дальнейшем беспристрастно оценены сторонними лицами. Именно они – сторонние лица – выносят окончательный приговор – кто был прав и кто не прав в научной дискуссии, но сделать это они могут, опираясь только на печатный (в крайнем случае – рукописный) материал.

Лекция 2
4. Знание, которое необходимо всем.

Если материал первой лекции представлял интерес для аспирантов и исследователей, встретившихся с проблемой устойчивости, то во второй лекции я расскажу о недавно обнаруженных новых важных явлениях, касающихся практически всех аспирантов и исследователей в области естественных наук. Речь пойдет об эквивалентных (равносильных) преобразованиях математических моделей исследуемых систем – о преобразованиях, без которых не обходится почти ни один исследователь.

Напомню, что согласно общепринятому определению эквивалентными (или, что то же самое, равносильными) называют преобразования, не изменяющие решений. Примеры: перенос членов из левой части в правую с изменением знака, умножение всех членов на число не равное нулю, замена любого члена на равный ему и т.п.

Правила эквивалентных преобразований известны с 17 века. Они изучаются еще в средней школе и самым широчайшим образом применяются во всех исследованиях и расчетах. За века их применения незаметно сложилось твердое убеждение – раз эквивалентные преобразования не меняют решений преобразуемой системы, то они вообще ничего не меняют: «если что-то изменилось, значит, использованное Вами преобразование было, на самом деле, не эквивалентным; ищите ошибку». Вот ход мысли сегодняшних аспирантов (да и не только аспирантов), с которым я неоднократно встречался. А между тем наши великие предшественники, великие математики прошлых веков, выбиравшие названия для математических операций, различали преобразования тождественные и преобразования эквивалентные. Они догадывались, наверное, что эквивалентные преобразования могут что-то менять. Но что именно? Вот в этом-то и вопрос, который, как ни странно, веками не поднимался и поэтому до последнего времени не получал ответа.

Не всегда обращают внимание на то, что чаще всего нам нужно не просто решение той или иной задачи, а надежное, корректное решение. Дело в том, что почти все коэффициенты и параметры математической модели определяются из опыта и измерения с неизбежными, хотя и малыми, погрешностями. Если эти неизбежные малые погрешности ведут к большим погрешностям в решении, то решение никакого практического смысла не имеет. Подобные задачи называют некорректными и стараются их избежать; они требуют совершенно особого подхода. Точные математические формулировки корректности желающий может найти в [5;2].

Пример: для системы, не обладающей параметрической устойчивостью, задача проверки – устойчива система или нет – не корректна. Неизбежные малые погрешности в знании коэффициентов и параметров сделают результат расчета совершенно ненадежным: устойчивую систему мы можем принять за не устойчивую, и наоборот.

Как раз при анализе параметрической устойчивости и был получен ответ на вопрос, поставленный великими математиками прошлых веков: <u>эквивалентные преобразования (в отличие от тождественных) могут изменять корректность решаемой задачи</u>.

Действительно, рассмотрим систему (1). При k=1 она, как мы уже показали, на первой лекции, не обладает параметрической устойчивостью. Задача проверки – устойчиво ли решение $x_1(t)$ системы (1) при k=1 или нет – не корректна. Теперь исключим переменную $x_2(t)$ из системы (1) для k=1 путем эквивалентных преобразований. Получим уравнение:

$$(D^3+5D^2+7D+3)x_1=0 \tag{3}$$

Нетрудно проверить, что уравнение (3) имеет то же самое решение:

$$X_1(t)=C_1e^{-3t}+(C_2t+C_3)e^{-t} \tag{4}$$

что и система (1). Поэтому преобразование системы (1) в уравнение (3) для задачи нахождения решения $x_1(t)$ – является эквивалентным преобразованием. Однако, решение (4) уравнения (3) параметрически устойчиво по отношению ко всем коэффициентам и параметрам уравнения (3), а то же самое решение $x_1(t)$ системы (1) при k=1 параметрически неустойчиво; задача проверки устойчивости системы (1) для k=1 некорректна.

Таким образом, мы убедились, что существуют эквивалентные преобразования, способные изменить корректность решаемой задачи. Многочисленные более сложные примеры подобных преобразований содержатся в монографии [2].

С учетом существования подобных преобразований, в работе [2] было предложено уточнить представление об эквивалентных преобразованиях и разделить их на:

1. Преобразования, эквивалентные в классическом смысле, т.е. те, которые (согласно классическому определению) не изменяют решений преобразуемой системы
2. Преобразования, эквивалентные в расширенном смысле, т.е. те, которые, во-первых, эквивалентны в классическом смысле, во-вторых, не изменяют корректности решаемой задачи.

Из приведенного примера (и других примеров, опубликованных в [2]) следует, что существуют преобразования, эквивалентные в классическом смысле, но не в расширенном.

Теперь мы видим, что материал, изложенный в настоящей лекции (а более подробно – в публикациях [1;2]), действительно важен и необходим практически для всех аспирантов и научных работников (точнее – для всех тех, кто использует эквивалентные преобразования; очень трудно найти работу по естественным наукам, в которой они не использовались бы). А необходим этот материал потому, что только использование преобразований, эквивалентных в расширенном смысле, обеспечивает достоверность и страхует от ошибок. Более подробно, с многочисленными примерами, это показано в [2].

5. Наиболее важное следствие

Как только были открыты преобразования, эквивалентные в классическом смысле, но не в расширенном, сразу обнаружилось, что многие традиционные методы расчета, использующие эти преобразования, недостоверны. Они могут приводить к грубым ошибкам и для восстановления достоверности нужно проводить дополнительные расчеты и проверки, описанные в [2].

Наиболее важными из методов расчета, неполнота которых была обнаружена, являются методы численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений, очень часто используемых на практике. Хорошо известно, что первичной, непосредственно вытекающий из законов физики формой записи дифференциальных уравнений, описывающих изучаемый объект, является система, состоящая из уравнений различных порядков. Так, например, чаще всего математическую модель получают из известных уравнений Лагранжа второго рода, а это приводит к системе из уравнений второго порядка. В дальнейшем почти всегда любую систему, состоящую из уравнений различных порядков, приводят к нормальной форме Коши, т.е. к системе уравнений первого порядка; приводят ходя бы потому, что все стандартные программы численного решения уравнений составлены для нормальной формы. Составлять большое количество программ для всего обширного многообразия разнообразных систем было бы слишком громоздко. Гораздо проще привести исходную систему к нормальной форме, разумеется, с помощью эквивалентных преобразований. Это гарантирует, что решения преобразованной системы совпадут с решениями системы исходной.

Поскольку почти все коэффициенты и параметры математической модели, как уже говорилось, получаются из опыта и имеют ограниченную точность, то необходимым (хотя и недостаточным) условием достоверности расчета является непрерывная зависимость решений от параметров (в частном случае - от коэффициентов). Поэтому основной теоремой теории дифференциальных уравнений, лежащей в основе всех практических расчетов, является теорема о непрерывной зависимости решений от параметров.

Однако, обратите внимание, в учебниках по дифференциальным уравнениям эта теорема доказана лишь для систем в нормальной форме (в некоторых учебниках приводится еще и доказательство для одного уравнения n-го порядка). А другие системы, системы не в нормальной форме? У них у всех решения зависят от параметров непрерывно, или же нет? Я задавал этот вопрос многим уважаемым специалистам по дифференциальным уравнениям и всегда получал уверенный ответ: « Да, конечно. Во всяком случае, для систем, которые можно эквивалентными преобразованиями привести к нормальной форме, непрерывная зависимость решений от параметров существует, никаких сомнений нет».

Эта всеобщая уверенность (в свою очередь, опирающаяся на уверенность в том, что эквивалентные преобразования «ничего не меняют») привела к тому, что никто не искал особые системы, не обладающие свойством непрерывной зависимости решений от параметров. А такие системы существуют. Рассмотрим еще раз систему (1). Нетрудно проверить (подробный разбор приведен в публикации [6] и в третьем издании книги[2]), что при $k=1$ зависимость решений $x_1(t=t_0)$ для любого $t_0>0$ от коэффициента k терпит разрыв и поэтому вблизи $k=1$ любые решения совершенно не достоверны. Посчитайте и убедитесь сами, что при переходе, например, от $k=1{,}0001$ к $k=1{,}00011$ решение $x_1(10)$, т.е. значение $x_1(t)$ при $t=10$, изменится во много раз.

Для обеспечения достоверности результатов любого расчета, использующего дифференциальные уравнения, необходимо, прежде всего, проверить, не является ли исследуемая система особой, не имеющей непрерывной зависимости решений от коэффициентов и параметров. Методы такой проверки не сложны. Они описаны подробно в публикациях [6] и [2] (третье издание).

Эти результаты важны для очень широкого круга лиц – для всех аспирантов, инженеров, исследователей, использующих в своей работе дифференциальные уравнения.

6. Справедлива ли для аспирантов «презумпция невиновности»?

Когда я рассказывал о результатах предыдущего раздела аспирантам СПбГУ, использующим в своих диссертациях дифференциальные уравнения, и советовал проверить – для обеспечения достоверности – не являются ли исследуемые нами системы особыми, то мне пришлось столкнуться со стойким непониманием: « Юрий Петрович, у нас все правильно, мы считали добросовестно, покажите нам, где у нас ошибка. Если она есть, то тогда(и только тогда) мы заинтересуемся Вашими результатами и посмотрим их». Эта позиция аспирантов была обусловлена позицией их научных руководителей, утверждавших что «аспирант, как подсудимый в суде, должен пользоваться «презумпцией невиновности» - пока не доказано, что его результат неверен, следует считать, что в диссертации все верно и дополнительных проверок можно не проводить».

Мы убеждаемся теперь, что с «грамматикой науки» плохо знакомы не только аспиранты, но и часть научных руководителей. «Презумпции невиновности» у аспирантов, как и у любого научного работника, нет и быть не может. Скорее уж можно говорить о «презумпции виновности»: любой инженер-практик, желающий использовать новый результат, полученный исследователем, а также и любой рецензент диссертации имеют полное право проявить законное недоверие, потребовать, чтобы им доказали как верность, так и достоверность полученного исследователем (или аспирантом) результата его работы. Если у практика (или рецензента диссертации) возникли сомнения – они в любом случае будут истолкованы не в пользу аспиранта или исследователя. На это не нужно обижаться, а нужно просто стараться как можно более доходчиво и ясно доказать достоверность своих результатов.

Если рецензент показал, что ошибка <u>возможна</u>, то долг аспиранта <u>доказать</u>, что эта возможность в его диссертации <u>не</u> реализуется, что на самом деле все верно и возможной ошибки, по причине, которую должен четко обосновать диссертант, на самом деле в его диссертации все же нет.

7. Необходимость согласия в определениях.

Одно из основных положений «грамматики науки», без которого невозможно ни понимание чужих научных работ, ни плодотворная дискуссия – это необходимость согласия с автором (или оппонентом в дискуссии) в определениях. Если такого согласия нет – все дальнейшее бесполезно. Можно спорить о фактах, о методах и т.д. – нельзя спорить об определениях. Перед любой дискуссией, любым обсуждением, надо проверить, одинаково ли понимают обсуждающие определения тех терминов, которые будут использованы в дискуссии. Иначе обсуждение будет бесплодным. Несмотря на элементарность этого правила «грамматики науки», оно все же часто нарушается.

Пример из моей собственной практики: я рассказываю об открытии интереснейшего нового (третьего) класса задач математики, физики и техники, о задачах, которые нельзя отнести ни к корректным, ни к некорректным, поскольку эти задачи меняют корректность при эквивалентных, в классическом смысле, преобразованиях, используемых при решении. Тут же, на доске, я демонстрирую примеры таких задач. Один из слушающих возражает: «Юрий Петрович, у Вас все неверно, приведенные Вами преобразования не эквивалентны, поскольку не являются взаимно однозначными». Я удивленно переспрашиваю: «А почему они должны быть взаимно однозначными? Ведь в определении, которое я привел в начале доклада, было ясно сказано, что единственным требованием, выполнение которого делает преобразование эквивалентным (равносильным) является неизменность решений преобразуемой системы. Никаких других требований нет. Кроме того, используемое мною определение общепринято – загляните в «Математическую энциклопедию», издание 1984 г., том 4, стр. 800. Вы найдете такое же определение без всяких требований взаимной однозначности». Возражающий упорствует: «А для меня «Математическая энциклопедия» не авторитет». Что же, в этом случае мне остается только посочувствовать и пожалеть – кто не признает определений «Математической энциклопедии» и других авторитетных изданий, тот автоматически ставит себя вне большой сегодняшней науки. Согласие в определениях – первое и непременное условие успеха своей научной работы и понимания научных работ других.

Дополнительные немалые трудности вносит неоднозначность в определениях некоторых терминов, когда разные исследователи один и тот же термин определяют по-разному. Так, термин «аналитическое конструирование» первоначально определялся как метод аналитического определения коэффициентов k_i регуляторов вида (2) для обеспечения хороших переходных процессов в линейных системах.

Впоследствии стало иногда употребляться второе определение «аналитического конструирования» - как метода, позволяющего аналитически определить структуру и коэффициенты регуляторов, не обязательно вида (2), и не обязательно для линейных систем, а это уже совершенно меняет смысл термина.

Наличие нескольких определений часто приводит к недоразумениям. Так, в одном из моих докладов я рассказывал о неоднократных авариях, происходивших из-за того, что при расчетах систем управления на основе «аналитического конструирования» в 60-70-х гг. 20 века еще не знали о необходимости различать преобразования, эквивалентные в классическом и в расширенном смысле, и что эти аварии подорвали репутацию методов «аналитического конструирования». Один из весьма квалифицированных слушателей моего доклада возразил: «Не могу согласиться с докладчиком поскольку «аналитическое конструирование» регуляторов успешно используется в наше время». Недоразумение возникло потому, что я пользовался первым определением понятия «аналитическое конструирование», а возражающий мне – вторым.

Для преодоления недоразумений необходимо, чтобы участники обсуждения сверили определения используемых ими понятий и понимали их одинаково. Иначе любая дискуссия утонет во взаимных недоразумениях.

8. Что обязан, и что не обязан читать и знать аспирант.

Еще 10 лет назад в ответе на вопрос «что обязан регулярно читать и что обязан знать аспирант» не было разногласий. И научные руководители, и члены ученых советов, и сами аспиранты – все были согласны с тем, что аспирант обязан просмотреть ведущие научные журналы и книги по своей специальности хотя бы за последние 5-10 лет. Он обязан уже не просмотреть, а внимательно прочесть те немногие из этих статей и книг, которые имеют непосредственное отношение к теме его диссертации. Если во время защиты обнаруживалось, что диссертант не знаком с положениями ранее опубликованной статьи или книги, теми положениями, которые могли повлиять на выводы диссертации, то диссертация Ученым Советом безоговорочно отклонялась.

Такое требование обязательного знания всей литературы по теме диссертации отнюдь не является обременительным или чрезмерно жестким. Список ведущих журналов, относящихся к теме диссертации, очень невелик (обычно, это всего 5-6 названий), а, просматривая их, аспирант сразу убеждается, что примерно 99% статей в журналах посвящены частным вопросам, не имеющим отношения к его теме. Такие статьи можно лишь бегло просматривать и откладывать в сторону. Важно лишь не пропустить и внимательно изучить те очень немногие статьи, которые либо непосредственно относятся к твоей теме, либо рассказывают о научных открытиях общего характера, не учитывать которые нельзя. То же самое относится и к книгам.

За последние 10 лет положение аспирантов осложнилось: аспирантская стипендия совершенно недостаточна для самого скромного существования. Подавляющее большинство аспирантов работает, и защитить диссертацию в срок, совмещая учебу и работу, стало очень трудно.

В этих условиях некоторые научные руководители и ученые советы ослабили требования к аспирантам, исключив такое важное требование, как знакомство с научной литературой по теме диссертации. Да, я безоговорочно согласен, что положение сегодняшних аспирантов очень трудное, согласен с тем, что им надо помогать, но ведь не такой же ужасной ценой!

Пример: я спрашиваю одного из аспирантов: «Вот Вы используете математическую модель исследуемого Вами явления в виде системы дифференциальных уравнений, приводите ее перед решением к нормальной форме эквивалентными преобразованиями. Почему Вы не проверили, не является ли Ваша система особой, для которой такое преобразование недопустимо, поскольку может привести к ошибкам? Ведь такая проверка совсем не сложна, а о необходимости ее рассказано, например, в публикации [7], вышедшей 2 года назад и Вам доступной». (А так же в публикациях [2], [6] и др.) Аспирант отвечает: «Научный руководитель сказал мне, что не обязательно читать все публикации, относящиеся к теме диссертации. Можно читать только те, которые нравятся». Проверяю у его научного руководителя и убеждаюсь, что такое «разрешение не читать» действительно было дано.

Я работаю в науке 50 лет (считая с момента написания первой научной работы), много чего слышал, но это меня просто испугало. Вот простое сравнение: вы приходите к врачу, нужен анализ крови, и врач собирается колоть вас не одноразовым шприцем. Вы робко спрашиваете: «А вирус СПИДа? Я не заражусь?» Врач же вам спокойно отвечает: «Да, я слышал что-то про вирус, знаю, что о нем писали. Но разве можно всю литературу перечитать? А про СПИД мне читать не нравится, я и не читал. Так что, давайте руку, больной, сделаю Вам укол».

Как будете реагировать на такого врача? Ясно, что убежите поскорей, а затем, скорее всего, привлечете такого врача к суду, чтобы он не губил других людей. Правильно сделаете. Но почему же вы думаете, что менее опасным будет пренебрежение аспиранта к новым научным результатам, нежелание (причем, одобренное его научным руководителем!) знакомиться с ними. Ведь завтра этот аспирант, став кандидатом наук, будет участвовать в проектировании и расчете, ну, например, самолета. Привыкнув игнорировать «не нравящиеся» ему научные результаты, он будет делать то же самое и при проектировании. Самолет окажется дефектным, потерпит аварию, загубит экипаж и пассажиров. Кто будет больше виноват? Научный руководитель? Или все-таки сам аспирант? Ведь никто не мешал ему знакомиться с «грамматикой науки», а точнее – с ее непременными требованиями о том, что должен знать аспирант, требованиями, выработанными на опыте поколений. Литературы по истории науки достаточно, читать ее никто не запрещает.

Могут, конечно, возразить: ошибка участника проектирования самолета совсем не обязательно приводит к аварии и гибели людей, она лишь увеличивает (может быть даже немного) вероятность аварии. Да, это так. Но ведь и укол многоразовым шприцем совсем не обязательно (и даже редко) ведет к смерти пациента. Однако врача за такой укол судят, и правильно делают. А вот аспиранта (и его научного руководителя) мы не осуждаем. И это напрасно.

Вот печальный недавний пример: в мае 2002 г. в Ученом Совете факультета прикладной математики - процессов управления СПбГУ С.А. Сумачевым защищалась диссертация по исследованию газотурбинного двигателя для самолетов. Двигатель содержал несколько контуров управления, и диссертант рассчитывал их устойчивость традиционными, устаревшими методами, давно доказавшими свою неполноту. Диссертант явно не знал, что неполнота этих методов в 1994 году была доказана мной [1], в 1997 году – профессорами А.Р. Гайдуком [8] и В.А. Подчукаевым [9], в 2000 году – академиком РАН Я.Б. Данилевичем [7]. При этом работы этих авторов были опубликованы в известных авторитетных научных журналах, безусловно, доступных диссертанту. В этих публикациях приводились методы дополнительных проверок, обеспечивающих достоверность расчета. Диссертант мог воспользоваться любым из этих методов – либо моим, либо методом профессора А.Р. Гайдука, либо иным. Он не воспользовался ни одним. В результате выводы диссертации оказались недостоверными, необходимое требование Высшей Аттестационной Комиссии (ВАК) о достоверности результатов оказалось не выполненным, о чем говорилось и на защите. В данном случае Ученый Совет все же присудил диссертанту степень, хотя и рисковал, что решение будет отменено во время контрольной проверки диссертации в ВАК. Рассчитывали на то, что в последние годы ВАК отправляет на контрольную проверку лишь небольшую долю кандидатских диссертаций, так что риск был не очень велик.

Непонятно другое – зачем надо было Ученому Совету идти на неприятный риск? Не проще ли было потребовать с аспиранта (лучше всего на стадии предварительного обсуждения диссертации) проведения дополнительной проверки по одной из опубликованных [2], [6], [8], [9] методик? Тогда и риска не было бы.

Мы убеждаемся, что игнорирование многих общепринятых ранее правил науки (составляющих в совокупности ее «грамматику») стало в последние годы довольно частым явлением и это не может не огорчать.

9. Как получить достойную зарплату за свой труд?

Сегодняшняя зарплата научных работников России очень низка, недопустимо, нищенски низка. То, что ее необходимо крупно (в разы) повышать, нет никаких сомнений. Это бесспорно! Но, уважаемые мои коллеги, научные работники, давайте будем совершенно откровенны: первосортную зарплату естественно требовать за науку первого сорта. А если мы ради облегчения себе жизни потихоньку игнорируем сегодня одно правило «грамматики науки», завтра – другое правило, то во что же быстро превращается наша наука?

Она превращается в «науку второго сорта», за которую и зарплата будет соответствующая – второсортная.

Если хотим получать хорошую зарплату, достойное материальное обеспечение, то лучший путь к этому – заниматься наукой «первого сорта», не поддаваться на соблазны облегчить себе жизнь, проигнорировать пусть обременительные, но необходимые правила «грамматики науки». Ведь эти правила появлялись не случайно, они выросли из опыта столетий развития научных исследований - правила обязательного знания научной литературы предшествующих лет, обязательного отказа от доказательства, опровергнутого контрпримером, согласия в определениях, печатного (в крайнем случае, письменного) оформления научной дискуссии.

Отказ от хотя бы одного из этих правил ведет к потере научной репутации. Если один научный сотрудник позволяет себе отказаться от общепризнанных правил науки, то погибнет репутация этого конкретного человека и не более того, хотя для него самого это трагедия. Потерять репутацию легко – восстановить очень трудно.

Гораздо хуже, если в стенах какого-нибудь научного учреждения игнорирование правил науки не встречает отпора, становится привычным, часто встречающимся. Тогда может сильно пострадать репутация научного учреждения в целом.

Я, разумеется, рассказал далеко не обо всех правилах «грамматики» науки, остановив внимание на тех, которые нарушались чаще всего на моих глазах.

Не мешает отметить еще и такое важное правило, как возможность подтверждения или опровержения. Высказанное кем-либо утверждение остается гипотезой до тех пор, пока оно не будет:

1. доказано (вариант – подтверждено ясными экспериментами)
2. опровергнуто.

Любопытно, что и это простое правило иной раз бывает нарушено. Пример: астрологические прогнозы. Вы часто можете слышать прогнозы типа: «Родившихся под знаком Овна на этой неделе ожидает успех в делах», «У родившихся под знаком Рака на этой неделе возможны неприятности, старайтесь воздерживаться от принятия решений». Но тщетно вы будете искать подтверждения таких прогнозов, типа: «На прошлой неделе мы проследили за 100 предпринимателями, родившимися под знаком Овна. У 80 из них наблюдались успехи в делах. А вот из проверенных 100 человек, родившихся под знаком Рака, у 75 на прошедшей неделе были неприятности».

Вы нигде не найдете подобных проверок астрологами своих «прогнозов». Причина проста: когда подобные проверки проводили независимые исследователи, результаты неизменно заканчивались конфузом: прогнозы не сбывались. Тогда астрологи отказались от проверок и от самого принципа проверяемости. Свои прогнозы астрологи постоянно публикуют, а сбываются «прогнозы» или нет – их не интересует.

Но тогда понятно, что отказавшись от такого важнейшего правила «грамматики науки» как принцип проверяемости, астрология перешла уже даже не на положение «науки второго сорта», а в «науку вне сортов», или, коротко, на положение лженауки. Таковой она остается и до настоящего времени.

Пренебрежение теми правилами «грамматики науки», о которых я рассказывал в предыдущих разделах, не имеет таких катастрофических последствий, но все же тот, кто пренебрегает ими, превращается в научного работника «второго сорта» с соответствующим к нему отношением, а в дальнейшем и с соответствующей зарплатой.

Лекция третья
10. Объяснение парадоксов

В этой лекции я постараюсь дать наиболее простое и наглядное объяснение недавно открытому явлению, о котором говорилось в предыдущих лекциях – изменению некоторых важных характеристик математической модели при эквивалентных, в классическом смысле, преобразованиях ее. При преобразованиях, не изменяющих ее решений, но меняющих некоторые их свойства. Парадоксальность этого явления заключается в том, что эквивалентными (их называют так же равносильными) преобразованиями пользовались сотни лет тысячи математиков, и никто не замечал и не верил, что эти, привычные еще со средней школы преобразования могут что-то менять.

Внимательное исследование показало, что эквивалентные преобразования могут изменять параметрическую устойчивость, непрерывную зависимость решений от коэффициентов и параметров. То есть, обобщая, они могут изменять корректность решаемой задачи. Парадокса здесь нет, объяснение недавно открытого явления совсем не сложно.

Действительно, рассмотрим внимательнее, что означает, например, безусловно верное утверждение:

«Решение дифференциального уравнения

$$a_1\dot{x} + a_0 x = 0 \qquad (5)$$

непрерывно зависит от коэффициентов a_1 и a_0?»

Ведь фактически это совсем не является утверждением о самом уравнении (5). По существу, это является утверждением о свойствах решений семейства уравнений, семейства вида

$$a_1(1+\varepsilon_1)\dot{x}+a_0(1+\varepsilon_0)x=0 \qquad (6)$$

где ε_1 и ε_0 – любые числа, малые по сравнению с единицей. Это семейство является окрестностью уравнения (5), окрестностью в пространстве коэффициентов.

Утверждение о непрерывной зависимости решений уравнения (5) от коэффициентов a_1 и a_0 справедливо тогда и только тогда, когда все решения семейства (6) при любых, сколь угодно малых, ε_1 и ε_0 будут сколь угодно мало отличаться от решения исходного уравнения (5).

Теперь сразу делается ясным, что эквивалентные преобразования исходного уравнения (5), которые, по определению, не меняют его (и только его!) решений, совсем не обязаны не изменять решений всего большого семейства уравнений (6). Эквивалентное преобразование может, конечно, не изменить эти решения, но может и изменить. Парадокса (или противоречия) в этом изменении нет. (Впервые это рассуждение, обосновавшее возможность существования преобразований, эквивалентных в классическом смысле, но не в расширенном, было опубликовано в [4]. Там же приведены и первые примеры подобных преобразований.) А обнаружены эти преобразования были так поздно просто потому, что они встречаются редко. Большинство преобразований, эквивалентных в классическом смысле, эквивалентны и в расширенном. Особые преобразования, эквивалентные в классическом смысле, но не в расширенном, преобразования изменяющие корректность задачи, а в частных случаях изменяющие параметрическую устойчивость, непрерывную зависимость решений от параметров и т.п. (все это частные случаи корректности), встречаются редко. Однако это совсем не означает, что им не нужно уделять самого серьезного и пристального внимания. Ведь каждая неожиданная, непредвиденная встреча с таким преобразованием может стать причиной ошибки в расчете, а значит – причиной аварии. Об этом подробно рассказано в публикациях [2;6], где приведены примеры аварий, произошедших по этой причине. Поэтому необходимо знать о существовании преобразований, эквивалентных в классическом смысле, но не в расширенном. А еще лучше не просто знать, а подробно изучить их свойства, опираясь на известные публикации [1; 2; 6; 7]. Это убережет от множества ошибок.

Теперь рассмотрим еще раз причину, почему было трудно открыть существование преобразований, эквивалентных в классическом смысле, но не в расширенном, и почему они были открыты так поздно.

Они были открыты в 1987-1994 гг. в ходе исследования проблемы оптимизации управления для различных технических объектов.

Рассмотрим пример – систему, состоящую из объекта управления (электропривода постоянного или переменного тока) и регулятора, поддерживающего постоянство частоты вращения электропривода. Математическая модель электропривода, работающего на механизм, колебания момента сопротивления которого являются случайным стационарным процессом с дробно-рациональным спектром второго порядка, описываются, как известно, системой трех дифференциальных уравнений с четырьмя переменными:

$$\begin{aligned} m\dot{x}_1 &= a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \\ \dot{x}_3 &= a_4x_4 \\ \dot{x}_4 &= a_5x_3 + a_6x_4 \end{aligned} \tag{7}$$

В этих уравнениях x_1 – это частота вращения (точнее, отклонение частоты вращения от ее номинального значения), x_2 – вращающий момент электропривода, играющий роль управления, x_3 – отклонение момента сопротивления исполнительного механизма электропривода от номинального значения, x_4 – производная переменной x_3, m – важнейший параметр электропривода, его механическая постоянная времени, численно равная времени разгона электропривода от нуля до номинальной частоты вращения при номинальном вращающем моменте и равном нулю моменте сопротивления. Коэффициенты a_1, $a_{2,\ \dots}$ a_6 принимают различные числовые значения у разных электроприводов. Мы в дальнейшем рассмотрим электропривод со значениями коэффициентов a_1= -2, a_2=1; a_3=1; a_4=1; a_5= -1; a_6= -2 т.е. рассмотрим электропривод, математическая модель которого имеет вид:

$$\begin{aligned} m\dot{x}_1 &= -2x_1 + x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -x_3 - 2x_4 \end{aligned} \tag{8}$$

Коэффициенты математической модели (8) близки к коэффициентам одного из реальных электроприводов, но для удобства дальнейших расчетов они округлены до целых чисел. Время t мы будем в дальнейшем выражать в долях от механической постоянной времени номинального режима. Это означает, что в номинальном режиме будет m=1, но мы будем учитывать также и возможные вариации параметра m. Так, при изменениях температуры изменяются линейные размеры всей деталей электропривода и при этом неизбежны малые изменения (вариации) параметра m.

В три уравнения (8) входят четыре переменные, поэтому процессы в электроприводе получают определенность при учете регулятора – устройства, которое вырабатывает управляющее воздействие x_2 на основе измерения остальных переменных. Выберем регулятор, математической моделью которого является уравнение:

$$x_2= -x_1-2x_3-x_4 \tag{9}$$

Его можно рассматривать как вырожденное дифференциальное уравнение, превратившееся в конечное соотношение между переменными.

Система уравнений (8)-(9) описывает процессы, протекающие в системе: «объект управления – регулятор».

Характеристический полином системы уравнений (8)-(9) равен определителю:

$$\begin{vmatrix} m\lambda+2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda+2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (m\lambda+3)(\lambda+1)^2 \tag{10}$$

имеющему корни: $\lambda_1= -3/m$; $\lambda_2= \lambda_3= -1$.

При m=1 (т.е. в номинальном режиме) будет $\lambda_1= -3$; $\lambda_2= \lambda_3= -1$; общее решение системы (8)-(9) имеет вид:

$$x_1=c_1e^{-3t}+(c_2t+c_3)e^{-t} \tag{11}$$

При малых отклонениях параметра m от номинального значения m=1 решения изменятся мало. Таким образом, мы убеждаемся, что решения системы (8)-(9) параметрически устойчивы (т.е. сохраняют устойчивость при вариациях параметра m) и непрерывно зависят от m.

Измерение и использование в регуляторе переменной x_3 и особенно переменной x_4 затруднительно и, поэтому желательно исключить переменные x_3 и x_4 из системы (8)-(9) с помощью эквивалентных преобразований.

Выполнив исключение переменных x_3 и x_4 по общим правилам, приведем систему (8)-(9) к виду:

$$[mD^3+(2+2m)D^2+(4+m)D+3]x_1-(D^2+2D+1)x_2=0 \tag{12}$$

$$[mD^2+(2+2m)D+5]x_1-(D+1)x_2=0 \tag{13}$$

Уравнение (12) – это уравнение объекта управления, уравнение (13) – это уравнение регулятора. Характеристический полином системы уравнений (12)-(13) равен определителю:

$$\begin{vmatrix} m\lambda^3+(2+2m)\lambda^2+(4+m)\lambda+3 & -(\lambda^2+2\lambda+1) \\ m\lambda^2+(2+2m)\lambda+5 & -(\lambda+1) \end{vmatrix} = (m\lambda+3)(\lambda+1)^2 \tag{14}$$

т.е. будет тем же самым, что и у системы (8)-(9). Поэтому мы должны, казалось бы, сделать вывод о том, что и после исключения переменных x_3 и x_4 рассматриваемая нами система уравнения будет параметрически устойчивой, и ее решения будут непрерывно зависеть от параметра m.

Но этот вывод будет ошибочным! Делая его, мы не учли, что параметры регулятора вполне могут не зависеть от вариаций механической постоянной времени электропривода. Действительно, регулятор – это отдельное устройство. Оно стоит рядом с электроприводом и вариация механической постоянной времени на его коэффициенты вполне может совсем не влиять. Поэтому более правильным и более соответствующим физическому смыслу будет для получения уравнения регулятора исключать переменные x_3 и x_4 из уравнений (8) и (9), в которых предварительно принято, что m=1,. При этом мы получаем уравнение регулятора в виде:

$$(D^2+4D+5)x_1-(D+1)x_2=0 \tag{15}$$

Оно совпадает с уравнением (13) при m=1.

Теперь его коэффициенты, что соответствует физическому смыслу, не зависят от вариаций параметра m в электроприводе, и поэтому уравнение (15) более правильно, чем уравнение (13), отражает истинные процессы, происходящие в системе «электропривод – регулятор» при вариациях параметра m.

В целом, система уравнений (12)-(15) более правильно описывает реальные процессы в системе управления, по сравнению с уравнениями (12)-(13). Теперь рассмотрим, в чем же заключаются различия. Характеристический полином системы (12)-(15) равен определителю:

$$\begin{vmatrix} m\lambda^3+(2+2m)\lambda^2+(4+m)\lambda+3 & -(\lambda^2+2\lambda+1) \\ \lambda^2+4\lambda+5 & -(\lambda+1) \end{vmatrix} = [(1-m)\lambda^2+(2-m)\lambda+3)(\lambda+1)^2 \tag{16}$$

При m=1 определители (14) и (16) совпадают. Это означает, что при m=1 решения системы (12)-(15) тоже имеют вид (11), и поэтому исключение переменных x_3 и x_4 из уравнений (8)-(9), с учетом реальной физической картины отсутствия связи между вариациями параметров электропривода и регулятора, является преобразованием, эквивалентным в классическом смысле. В то же время, эквивалентности в расширенном смысле нет, поскольку при $m=1+\varepsilon$, где $\varepsilon>0$, характеристический полином (16) получает четвертый большой положительный корень. Это означает, что в решениях системы (12)-(15) при $\varepsilon>0$ появляется быстрорастущий член вида $c_4e^{t/\varepsilon}$ – растущий тем быстрее, чем меньше ε. Это говорит о том, что система (12)-(15) теряет устойчивость при сколь угодно малом отклонении параметра m от расчетного номинального значения $m=1$. Ни параметрической устойчивостью, ни непрерывной зависимостью решений от параметра m система уравнений (12)-(15) не обладает, в отличие от уравнений (8)-(9).

Реальное поведение системы управления, в которой регулятор формируется на основе измерений и преобразований переменной x_1 с исключенными переменными x_3 и x_4, соответствует уравнениям (12)-(15), а не (12)-(13). Реальная система, как легко проверить на опыте, параметрической устойчивостью и непрерывной зависимостью решений от параметров не обладает.

Если же мы приведем систему (12)-(15) к нормальной форме Коши, то мы придем к уравнениям (8)-(9). Исследуя их, мы придем к ошибочному выводу о том, что исследуемая система управления якобы обладает параметрической устойчивостью и непрерывной зависимостью решений от параметра m, хотя сами решения, как таковые, при номинальном значении $m=1$ после перехода к нормальной форме Коши будут вычислены правильно.

Теперь мы получаем окончательный вывод: преобразование системы дифференциальных уравнений к нормальной форме Коши является все же «несколько грубоватым» преобразованием. Сами решения системы оно, безусловно, сохраняет, но некоторые тонкие (но важные!) свойства решений, такие, как параметрическая устойчивость и непрерывная зависимость параметров, это «немного грубоватое» преобразование к нормальной форме может не сохранять. И, как показывает рассмотренный пример, иногда (хотя и не всегда!) действительно не сохраняет.

Для правильного установления многих важных свойств решений необходимо пользоваться преобразованиями, эквивалентными не только в классическом, но и в расширенном смысле. Для этого необходимо знать свойства этих преобразований, которые, к сожалению, много сложней, чем простые свойства преобразований, эквивалентных в классическом смысле. Некоторые интересные свойства преобразований, эквивалентных в расширенном смысле, описаны в [2; 6], но исследование их еще далеко не закончено.

Становится понятным, почему преобразования, эквивалентные в классическом смысле, но не в расширенном, сохраняющие решения, но изменяющие ряд тонких свойств решений были открыты так поздно. Хотя свойства преобразований – это чисто математический вопрос, но правильное решение его требует, как мы убедились, четкого понимания характера взаимодействия различных элементов и узлов технических устройств, математические модели которых мы исследуем.

Становится так же понятным, почему часть наиболее консервативно настроенных математиков до последних лет (а некоторые и до сих пор!) отвергала существование преобразований, эквивалентных в классическом смысле, но не в расширенном. Им казалось неправомерным, при обсуждении математического вопроса, применение технических соображений (независимость вариаций параметров регулятора от параметров электродвигателя), которые использовались в [2] при выводе соотношений (12)-(15). Однако позже реальность преобразований, не эквивалентных в расширенном смысле, была показана уже и на чисто математических примерах (об этом будет рассказано далее).

11. Важные следствия

Обнаружение преобразований, эквивалентных в классическом смысле, но не в расширенном, повлекло за собой важные следствия (частично мы уже говорили о них в предыдущих лекциях).

1. Обнаружилась неполнота традиционных и широко применяемых методов расчета устойчивости. Оказалось, что они требуют совершенствования и уточнения, а иначе могут сделаться причиной опасных аварий. Об этом мы уже говорили.
2. Выявилось, что для ряда систем дифференциальных уравнений традиционные методы вычисления решений через стандартные программы с использованием преобразования системы к нормальной форме Коши ведут к ошибкам. Для предотвращения ошибок нужно перед расчетом проверять – не является ли рассматриваемая система особой. Об этом мы уже тоже говорили.
3. Третье следствие относится к тем многочисленным методам вычислений, которые используют цепочки эквивалентных преобразований. Так, наиболее распространенный метод вычисления определителей высокого порядка заключается в последовательном понижении порядка. Определитель, например, седьмого порядка преобразуют в определитель шестого порядка, потом – пятого и т.д. эквивалентными преобразованиями (домножениями и сложениями).

Теперь посмотрим, что будет, если среди этой цепочки преобразований окажется хотя бы одно преобразование, изменяющее корректность решаемой задачи? Тогда эту задачу нельзя уже отнести ни к корректным, ни к некорректным. Подобные задачи в 1998 году, в публикации [10] было предложено выделить в отдельный, третий класс – класс задач, меняющих свою корректность при эквивалентных преобразованиях, используемых в ходе их решения.

Открытие нового класса задач имеет как теоретическое, так и прикладное значение. С теоретической точки зрения оно интересно тем, что ранее, начиная с открытия Адамаром в 1902 году класса некорректных задач, считалось, что все задачи математики, физики техники делятся на два класса – на класс корректных и класс некорректных задач. В 1998 году выяснилось, что существует еще один своеобразный класс – класс «задач-перебежчиков», перебегающих из класса корректных в класс некорректных (или, наоборот) при эквивалентных преобразованиях, используемых при их решении.

С практической точки зрения открытие третьего класса задач интересно тем, что оно раскрывает еще один источник возможных ошибок при вычислениях. Действительно, пусть в ходе цепочки эквивалентных преобразований исходной математической модели изменилась корректность задачи, и она стала не корректной. Тогда даже сколь угодно малая погрешность в вычислениях (например, погрешность округления) может коренным образом изменить результат решения, привести к серьезной ошибке.

Покажем все это на примере известной задачи о вычислении собственных значений системы однородных линейных уравнений с параметром.

Рассмотрим, систему из трех уравнений с параметром λ:

$$\begin{gathered}(1-\lambda)x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\\ x_1 + (1-\lambda)x_2 + 3x_3 = 0\\ x_1 + x_2 = 0\end{gathered} \tag{17}$$

(в последнее уравнение параметр λ не входит)

Поскольку все уравнения однородны, то система, безусловно, имеет тривиальное нулевое решение $x_1=x_2=x_3=0$, но при некоторых значениях параметра λ возможны не нулевые решения. Такие значения параметра λ называют собственными значениями, а вычисление собственных значений является, как известно, одной из наиболее важных задач вычислительной математики и имеет многочисленные приложения в физике и технике.

Собственные значения системы (17) являются корнями определителя:

$$\begin{vmatrix}(1-\lambda) & 1 & 2\\ 1 & (1-\lambda) & 3\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix} = 5\lambda \tag{18}$$

откуда сразу видно, что единственным собственным значением является λ=0. Для простой системы (17) вычислить определитель несложно, и задача его вычисления вполне корректна, однако, для систем, состоящих из большого числа уравнений, прямое вычисление затруднено. Одним из возможных методов вычисления является последовательное сокращение числа уравнений и числа переменных в порядке их индексов.

Применим этот метод к системе (17). Помножив второе из уравнений (17) на -(1-λ) и сложив со вторым, мы исключим x_1 и придем к уравнению:

$$(\lambda^2-2\lambda)x_2+(1-3\lambda)x^3=0 \qquad (19)$$

Вычитая из второго уравнения (17) третье, получим:

$$\lambda x_2-3x_3=0 \qquad (20)$$

Мы пришли к системе двух уравнений (19) и (20) с двумя переменными x_2 и x_3. Исключив x_3, придем к одному уравнению

$$5\lambda x_2=0 \qquad (21)$$

откуда сразу находим единственное собственное значение $\lambda=0$.

Однако внимательное исследование обнаруживает, что задача вычисления собственных значений для системы уравнений (19)-(20) некорректна.

Действительно, пусть мы сделали малую ошибку в вычислениях и получили в уравнении (20) коэффициент перед x_3 не 3, а $3(1+\varepsilon)$. Тогда, после исключения x_3 из уравнений (19) и (20) мы получим вместо уравнения (21) уравнение:

$$(3\varepsilon\,\lambda^2-6\varepsilon\lambda-5\lambda)x_2=0 \qquad (22)$$

из которого находим два собственных значения:

$$\lambda_1=0;\ \lambda_2=2+5/3\varepsilon \qquad (23)$$

Второе (ложное) собственное значение будет присутствовать при любых, сколь угодно малых ε и при $\varepsilon\to0$ совсем не приближается к первому, что говорит о некорректности задачи вычисления собственных значений для системы (19)-(20).

Сколь угодно малая погрешность в вычислении всего лишь одного коэффициента приводит к принципиальной ошибке в решении – вместо одного собственного значения получаем два различных, не близких друг к другу.

Таким образом, мы привели пример преобразования, эквивалентного в классическом смысле, но не в расширенном, причем на этот раз без привлечения физических соображений, пользуясь лишь математикой.

Теперь рассмотрим, какие практические следствия вытекают из недавно обнаруженного существования подобных преобразований. Из этого следует, что в любом вычислительном алгоритме, состоящем из цепочки эквивалентных преобразований (а таких вычислительных алгоритмов очень много) необходимо каждое преобразование проверять на эквивалентность в расширенном смысле. Если такой проверки не делать, то возможны любые ошибки в решениях. Действительно, если хотя бы одно преобразование оказалось эквивалентным в классическом смысле, но не в расширенном, то уже сколь угодно малая, неизбежная на практике погрешность в вычислениях (например, ошибка округления) может привести к самой грубой ошибке в окончательном результате вычисления и стать причиной тяжкой аварии, и даже катастрофы. Примеры приведены в [2]. Отсюда следует важность знания теории преобразований, эквивалентных в расширенном смысле.

Заметим, что когда мы говорим, что отсутствие проверки на эквивалентность в расширенном смысле <u>может</u> привести к грубой ошибке, то это не означает, что погрешность <u>обязательно</u> появится. Некоторые вычислительные алгоритмы безопасны. Так, исследование, проведенное в [2] показало, что в классической задаче о вычислении собственных значений, когда каждое из уравнений системы содержит параметр λ в первой степени, потери корректности при понижении порядка не происходит. В то же время в не менее часто встречающейся обобщенной задаче вычисления собственных значений, когда часть уравнений не содержит λ, потеря корректности возможна и происходит достаточно часто.

Проверка показала, что потеря корректности и связанные с ней ошибки (появление лишних собственных значений, зависящих от сколь угодно малых погрешностей округления) действительно систематически возникают у систем уравнений выше четвертого порядка и обычные методы борьбы с погрешностями округления, такие как перепрограммирование вычислительной машины на удвоенную точность, в данном случае не помогают.

Теперь становится понятным, почему существование преобразований, эквивалентных в классическом смысле, но не в расширенном, было обнаружено так поздно. При ручном счете в обобщенной задаче о собственных значениях было, безусловно, удобнее сначала исключить часть переменных, пользуясь уравнениями, не содержащими параметра λ. После этого обобщенная задача переходит в классическую, алгоритм решения которой безопасен. И только после широкого распространения программируемых вычислительных машин стало более удобным решение по единой программе, с исключением переменных в порядке их индексов. Только тогда ранее на замечавшиеся преобразования, эквивалентные в классическом смысле, но не в расширенном, показали все свое коварство и были обнаружены.

Общий вывод: распространение вычислительной техники требует дополнительной проверки и ревизии используемых алгоритмов. Алгоритмы, столетиями надежно применявшиеся при ручном счете, могут проявить новые свойства при машинных вычислениях.

12. Советы и рекомендации.

Завершая цикл лекций, хочу посоветовать относиться более внимательно к «грамматике» науки – правилам ведения научных дискуссий, методам доказательства и опровержения теорем и т.д. Неоценимую пользу может принести знакомство с историей науки, которая, в настоящее время, преподается, к сожалению, далеко не во всех высших учебных заведениях. Однако тот, кто не прослушал курса истории своей науки в ВУЗе, может прочесть самостоятельно любые из многочисленных хороших книг по этому вопросу. Из недавно изданных и имеющихся в продаже отметим книги [11], [12], в библиографии которых вы найдете обширный перечень ранее изданных книг. В [11] проанализирована, в частности, история развития теории автоматического управления и регулирования. Она рассмотрена как один из разделов прикладной математики; там же, в [11] изложена история исследования класса некорректных задач (начиная с Адамара) и рассказано о предпосылках открытия задач промежуточных между корректными и некорректными.

Для тех, кто ищет интересные темы для научной работы, я бы очень рекомендовал исследовать круг вопросов, связанных с преобразованиями, эквивалентными в классическом, но не в расширенном смысле и с задачами, относящимися к третьему классу, промежуточному между ранее известными классами корректных и классом некорректных задач математики, физики и техники. Это – новая область. Область недавнего научного прорыва, где еще очень многое не исследовано, остается в «тумане», где исследования, по существу, еще только начались. В такой сфере, где все еще только складывается, работать приятно и интересно. Она ждет своих молодых и энергичных исследователей. Необходимо, прежде всего, пополнить список задач третьего класса: На сегодняшний день известны и исследованы лишь очень не многие, на деле их гораздо больше, а между тем каждая непредвиденная, неожиданная встреча с подобной задачей может обернуться для инженера серьезным просчетом.

Недостаточно исследованы свойства преобразований, эквивалентных в расширенном смысле. Уже первые итоги в их исследовании показали, что эти свойства очень интересны, во многом – парадоксальны (см. [2] стр.120-125). Безусловно, при дальнейшем изучении можно ожидать новые сюрпризы.

Для тех, кто не будет заниматься исследованиями, для тех, кто интересуется, прежде всего, практическими приложениями, вытекающими из недавно сделанных научных открытий, следует отметить, что эти открытия, к сожалению, не облегчают, а усложняют жизнь инженера. Раньше он был уверен, что если у проектируемой им системы все корни характеристического полинома лежат в левой полуплоскости комплексного переменного далеко от мнимой оси, или же, если для системы построена функция Ляпунова, то устойчивость и параметрическая устойчивость обеспечены. Теперь мы видим, что это не так, и, чтобы гарантировать параметрическую устойчивость, необходимы дополнительные расчеты, дополнительная работа. Точно так же инженеры и физики были уверены, что приведение системы уравнений к нормальной форме, необходимое для использования стандартных программ, вполне справедливо и ничего в решениях не меняет. Теперь мы видим, что и это не так, что необходимы дополнительные вычисления, дополнительная работа, для того, чтобы проверить правильный ли ответ дает выбранная математическая модель, не изменились ли при преобразовании к нормальной форме некоторые тонкие, но важные свойства решений. Понятно, что дополнительную работу делать никому не хочется, и поэтому результаты, опубликованные в [2, 6], еще не получили широкого прикладного применения. Однако, несложные дополнительные проверки, описанные в [2] и в [6] страхуют от ошибок, уменьшают вероятность аварий. Постепенно это начинает осознаваться (см. публикации [7; 8; 9] и совсем недавнюю статью[13]). Поэтому рано или поздно (и скорее – рано) использовать дополнительные проверки придется всем. Причем фирма, первая внедрившая у себя дополнительные проверки, может с полным основанием утверждать, что вероятность аварий в выпускаемой ею продукции меньше, чем у фирм-конкурентов; это даст такой фирме преимущество в конкурентной борьбе за заказы, а этим пренебрегать нельзя.

Литература к «Приложению».

1. Петров Ю.П. Устойчивость линейных систем при вариациях параметров. Автоматика и телемеханика, 1994, №11, стр. 186-189.
2. Петров Ю.П. Неожиданное в математике и его связь с авариями и катастрофами последних лет. С. Петербург, СПбГУ, первое издание – 1999 108 с., третье, дополненное издание – 2002, 141 с.
3. Летов А.М. Аналитическое конструирование регуляторов. Автоматика и телемеханика, 1960, №№4, 5, 6.
4. Петров Ю.П. Синтез оптимальных систем управления при не полностью известных возмущающих силах. Учебное пособие, издательство ЛГУ, 1987, 289 с.
5. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М. «Наука», 1986, 287 с.
6. Петров Ю.П. Новые главы теории управления. С. Петербург, СПбГУ, учебное пособие, 2000, 156 с.
7. Академик Данилевич Я.Б., Петров Ю.П. О необходимости расширения понятия эквивалентности математических моделей. Доклады Академии Наук, 2000, том 371, №4, стр. 473-475.
8. Гайдук А.Р. К исследованию устойчивости линейных систем. Автоматика и телемеханика, 1997, №3, стр. 153-160.
9. Подчукаев В.А. К проблеме грубости. Сборник «Аналитические методы синтеза регуляторов». Саратов, 1997, стр. 206-235.
10. Петров Ю.П. Третий класс задач физики и техники - промежуточных между корректными и некорректными. С. Петербург, СПбГУ, 1998, 30 с.
11. Петров Ю.П. Лекции по истории прикладной математики. С. Петербург, СПбГУ, 2001, 337 с.
12. Рыбников К.А. История математики. Учебник, издательство Московского университета, 1994, 496 с.
13. Тарарыкин С.В., Тютиков В.В. Робастное модальное управление динамическими системами. Автоматика и телемеханика, 2002, №5, стр. 41-55.

Публикации [1; 2; 6; 10; 11] имеются на сайте http://www.petrov1930.narod.ru с вопросами и пожеланиями можно обращаться на E-mail: petrov1930@mail.ru.

Оглавление к приложению