Введение

Настоящая книга посвящена результатам недавних исследований в области теории управления – результаты настолько просты и значительны, что их необходимо включить в учебные курсы университетов и технических университетов по теории управления, по теории автоматического управления и регулирования, теории автоматических систем.

В основу книги легли спецкурсы, прочитанные автором на факультете Прикладной математики - процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета (СПбГУ). В данной области исследований сотрудники СпбГУ опередили своих зарубежных коллег – это особенно важно подчеркнуть, поскольку последние годы нельзя считать временем, благоприятным для российской науки. Это время трудностей и унижения. Тем важнее отметить, что и в это время наука России может идти вперед других стран.

Книга состоит из двух глав. Первая глава посвящена синтезу систем управления, обеспечивающих наилучшее возможное качество стабилизации и слежения при неизвестном спектре возмущающих воздействий.

Для известного спектра решение этой важной задачи давно и давно вошло в учебные курсы. Однако спектр возмущающих воздействий часто не известен или может меняться с течением времени. Поэтому первостепенное значение имеет проблема построения гарантирующего управления, которое гарантировало бы наилучшие возможные результаты при любом спектре.

Совсем недавно было получено решение этой важной проблемы, долго не поддававшейся усилиям многих исследователей. Решение это является настолько простым, что вполне доступно для студентов и может быть включено в учебные курсы. Оно даже проще, чем известное ранее решение для заданного спектра и позволяет реализовать заветную мечту проектировщиков – еще на стадии проектирования располагать простыми зависимостями, позволяющими для любых возмущающих воздействий сразу указать – какая точность стабилизации и слежения достижима при том или ином ресурсе управления и обратно – какой ресурс управления необходим для обеспечения той или иной точности.

Вторая глава книги посвящена недавно обнаруженной проблеме законности и допустимости привычных и широко используемых преобразований математических моделей, исследуемых физически, и технических объектов. С одной стороны – без преобразований никак не обойтись, они являются основой любого исследования и расчета, правила законных и эквивалентных преобразований давно и хорошо известны. С другой стороны, недавно было обнаружено, что даже самые привычные и часто используемые эквивалентные преобразования могут таить в себе неожиданные сюрпризы, могут приводить к опасным ошибкам в расчетах сохранения устойчивости при вариации параметров и в других расчетах. Поэтому студент обязательно должен быть предупрежден об этом.

Поясним сказанное примером.

Рассмотрим несложный объект управления (электропривод постоянного тока), математической моделью которого является следующая система линейных дифференциальных уравнений

$$(D^3 + 4D^2 + 5D+2)\, x_1 = (D^2 + 2D + 1)U \qquad (1)$$

$$(D^2 + 4D + 5)x_1 = (D + 1)\, U \qquad (2)$$

В уравнениях (1) и (2) $D = \dfrac{d}{dt}$ - оператор дифференцирования, x – регулируемая переменная, U – управление. Уравнение (1) является моделью объекта управления, уравнение (2) – моделью цепи обратной связи (регулятора). Система уравнений (1) и (2), рассматриваемая совместно, является математической моделью замкнутой цепи. Исключив переменную U из уравнений (1) и (2), получим уравнение замкнутой системы относительно переменной x:

$$(D^3+5D^2+7D+ 3)\, x = 0 \qquad (3)$$

Мы убеждаемся, что характеристический полином замкнутой системы имеет вид:

$$\lambda^3+5\lambda^2+7\lambda+ 3, \qquad (4)$$

имеет корни $\lambda_1= -3$, $\lambda_2 =\lambda_3 = -1$ и является гурвецивым (напомним, что гурвецивым называют полином не имеющих ни нулевых корней, ни корней с положительной вещественной частью). Все решения уравнения (3) имеют вид

$$x=c_1e^{-3t}+(c_2t+ c_3)\, e^{-t} \qquad (5)$$

и являются асимптотически устойчивыми, затухающими с течением времени. Простота системы (1)-(2) позволяет провести ее непосредственное исследование и убедиться, что, будучи воплощенной, в металле она станет работать не удовлетворительно: при неизбежных на практике малых вариациях параметров некоторых коэффициентов системы (1)-(2), (причем при вариациях только определенного знака), замкнутая система теряет устойчивость и может создать аварийную ситуацию.

Однако прямое непосредственное исследование возможно только для простых систем. Современные сложные системы управления, описываемые многими уравнениями разных порядков, чаще всего предварительно преобразуют: введением новых переменных их приводят к форме Коши, к форме n уравнений первого порядка, что позволяет для вычисления характеристического полинома использовать стандартные методы и программы линейной алгебры. Сведение к форме n уравнений первого порядка называют еще исследованием в пространстве состояний, и оно очень широко применяется в расчетах и проектировании. При преобразованиях математических моделей, разумеется, следят за тем, чтобы преобразования были эквивалентными. А эквивалентными называют такие преобразования, при которых все решения исходной системы совпадают с решениями системы преобразованной.

Приведем к форме Коши уравнение (1) введя переменные

$$x_1 = x; \;\; x_2 = Dx_1 - U$$
$$x_3 = Dx_2; U = U \qquad (6)$$

В новых переменных уравнение (1) имеет вид

$$\begin{aligned} x_1' &= -2x_1 + x_2 + U \\ x_2' &= x_3 \\ x_3' &= -x_2 - 2x_3 \end{aligned} \qquad (7)$$

и станет уравнением в пространстве состояний. Исключив переменные x_2 и x_3 , легко привести уравнение (7) к обратной форме (1). Преобразования от (1) к (7) и от (7) к (1) – эквивалентны.

Преобразуем теперь уравнение (2), используя только переносы членов из левой части уравнения в правую знаков и их группировку. Получим:

$$[(D^2+2D)x-DU]+[(2D + 4)x - 2U]+ x = -U \qquad (8)$$

в первой группе членов узнаем переменную x_1, во второй – $2x_2$; следовательно, уравнение (2) преобразуем к виду

$$U=-x_1-2x_2-x_3 \qquad (9)$$

Замкнув объект управления (7) обратной связью (регулятором) (9) получим уравнение замкнутой системы:

$$\begin{aligned} x_1' &= -3x_1 - x_2 - x_3 \\ x_2' &= x_3 \\ x_3' &= -x_2 - 2x_3 \end{aligned} \qquad (10)$$

Характеристический полином уравнения (10) легко вычисляется по правилам линейной алгебры и совпадает с полиномом (4). Это еще раз подтверждает, что все используемые нами преобразования были эквивалентными.

Исследуя теперь поведения замкнутой системы (10) и ее характеристического полинома (4) при вариациях любых коэффициентов, мы убеждаемся, что замкнутая система (10) не только устойчива, но и сохраняет устойчивость не только при малых, но при больших вариациях всех своих коэффициентов. Поэтому имеются все основания и тому, чтобы рекомендовать систему, математической моделью которой является уравнение (10) и эквивалентные уравнения (1)-(2) и воплощению в металле, что может стать первым шагом к опасной аварии. Действительно, мы уже указывали, система, описываемая уравнениями (1)-(2) теряет устойчивость при вариациях определенного знака некоторых своих параметров, но при эквивалентных преобразованиях ее к форме (7)-(9) это перестает быть видимым. Поскольку при изготовлении реальной системы в металле малые отклонения действительных значений параметров от расчетных неизбежны, а знак их непредсказуем, то малые вариации могут оказаться в безопасных интервалах и поэтому изготовленная система может успешно пройти проверочные испытания неопределенно долгое время успешно работать. В дальнейшем, при неизбежном в ходе нормальной эксплуатации малом дрейфе параметров в любой непредсказуемый момент времени знак малой вариации может изменяться и сразу произойдет потеря устойчивости, способная создать аварийную ситуацию, а то и аварию.

Мы в дальнейшем тем более рассмотрим этот пример и покажем, что рассматриваемое явление не случайно, встречается довольно часто и при недостаточном внимании к нему может быть причиной опасных аварий.

Действительно, используя только эквивалентные (в классическом смысле) преобразования уравнений, мы можем быть уверенны в том, что все решения исходной и преобразованной системы совпадают. Но для исследования сохранения устойчивости при малых вариациях параметров (и для многих других физических и технических задач) этого мало. При вариации параметра мы имеем дело уже не с решением, а его окрестностью, а совпадения окрестностей решений классической теории эквивалентных преобразований не гарантирует. Окрестности решений в пространстве параметров в классической теории не рассматриваются. Поэтому ошибки, подобные той, что возникла при изучении системы (1)-(2) могут возникать часто и для предотвращения аварий нужно существенно уточнить привычные и традиционные представления об эквивалентных преобразованиях уравнений. Коль скоро это опасное явление (открытое в СПбГУ в 1991-94 гг.) обсуждено и опубликовано, с ним обязательно должны быть, как можно скорее, ознакомлены и студенты, тем более что суть нового открытия проста и доступна.

Поскольку явление потери устойчивости при малых вариациях параметров тесно связано с теорией оптимальных систем, мы рассмотрим его в конце, после изложения метода синтеза оптимальных систем управления.

Глава 1. Синтез гарантирующих управлений.

§1. Оптимальные системы, задачи стабилизации и слежения.

Дальнейшее изложение будет относиться к системам управления, математическими моделями которых являются обыкновенные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Такие системы часто встречаются в технике, в банковском и страховом деле, в биологии и медицине.

Дифференциальные уравнения различных порядков для унификации чаще всего приводят либо к форме Коши, к форме n уравнений первого порядка, либо к одному уравнению n-го порядка относительно одной, наиболее интересующей нас переменной.

Так, составленная на основе законов аэродинамики математическая модель продольного движения одного из летательных аппаратов (экраноплан, летящий на малой высоте над морем) имеет вид

$$
\begin{aligned}
&Dv - (D + 2.4)\,\alpha = D\nu_y \\
&(D^2+2.46)v+(0.4D+38)=-49U \\
&Dh + \alpha - v = \nu_y
\end{aligned}
\qquad (11)
$$

Где v – угол тангенса, α - угол атаки, h – отклонение высоты полета от заданной, U – отклонение руля высоты (управление), ν_y – скорость вертикальных порывов ветра, возмущающее воздействие.

Уравнение (11) можно введением новой переменной x=Dv свести к форме Коши, к форме 4 уравнений первого порядка. Если же для нас наибольший интерес представляет переменная h (высота), то мы можем исключить остальные переменные и свести уравнения (11) к виду:

$$(D^4+5.25D^3+43.9D^2)h=117.7U+(2.4D^3+5.88D)\nu_y \qquad (12)$$

Таким образом, можно выделить два стандартных типа математических моделей: уравнения в форме Коши:

$$X' = Ax + Bu \qquad (13)$$

где X-n-мерный вектор регулируемых переменных, A – квадратная nxn матрица постоянных коэффициентов, B – матрица (а точнее – вектор-столбец) коэффициентов при скалярном управлении U. Исключив все переменные кроме, например, переменной x_i, относительно x_i получим другую форму записи – уравнение

$$A(D)x_i=B_i(D)U, \tag{14}$$

Где $A(D) = a_nD^n + \ldots+a_0$; $B_i(D) = b_mD^m + \ldots+b_0$ – полиномы от оператора дифференцирования $D = \dfrac{d}{dt}$, которые связаны простыми соотношениями с матрицами A и B в уравнении (13). Действительно,

$$A(D)=\det[DE-A] \tag{15}$$

То есть является определителем матрицы DE-A, где E – единичная матрица, а полином $B_i(D)$ является определителем той же матрицы, но в которой i-й столбец заменен на вектор-столбец коэффициентов при управлении в уравнении (13). Форма записи (13) более универсальна, форма (14) позволяет сконцентрировать внимание на поведении любой наиболее интересующей нас переменной x_i, сопоставление достоинств и недостатков моделей (13) и (14) дано в [45].

Мы будем рассматривать системы управления при наличии возмущающих воздействий. Математическая модель подобных систем имеет вид

$$A(D)X=B(D)U+\varphi(t), \tag{16}$$

Где $\varphi(t)$ – возмущающее воздействие, которое будем считать некоторой функцией времени, в общем случае – случайной, не полностью известной нам; ее называют еще случайным процессом.

При наличии возмущающих воздействий задачей управления часто становится обеспечение возможно-малых отклонений регулируемой переменной x от желаемого значения, соответствующего x=0. Это - задача стабилизации движения.

Не менее часто встречаются и задачи слежения. Пусть интересующая нас переменная y(t) (например положение фрезы в копировально-фрезерном станке) должна хорошо отследить некоторую функцию z(t) – задаваемую, например, положением копира, скользящего по поверхности шаблона. Пусть динамика копировально-фрезерного станка описывается уравнением

$$A(D)y=B(D)U+\varphi_1(t) \tag{17}$$

Введем новую переменную x = y-z, где x - разность между действительным положением фрезы и «идеальным» – то есть x(t) – это погрешность слежения. В новых переменных уравнение (17) примет вид

$$A(D)x=B(D)U-A(D)z+\varphi_1(t) \tag{18}$$

Если теперь обозначить

$$\varphi_1(t)-A(D)z=\varphi(t) \tag{19}$$

обобщенное возмущающее воздействие, то мы придем к уравнению (16), к задаче стабилизации. Учитывая это, мы в дальнейшем будем для унификации рассматривать только задачи стабилизации, учитывая, что не менее важные задачи слежения к ним сводятся.

§2. Характеристики возмущающих воздействий и выбор критерия качества.

Случайные процессы φ(t), стоящие в правой части уравнения (16) – это своеобразные математические объекты, соединяющие в себе черты случайной величины и функции.

В каждом конкретном опыте или измерении случайный процесс является обычной функцией времени, которая называется реализацией случайного процесса. Для примера на рис. 1 показана запись реализации угла крена судна в функции времени. Напомним, что угол крена является возмущающим воздействием для многих систем судовой автоматики. На рис. 2 приведена запись реализации высоты волны в некоторой точке моря, на рис.3 – запись реализации скорости вертикальных порывов ветра, являющейся – возмущающим воздействием для полета самолета в турбулентной атмосфере. Аналогично выглядит и, например, реализация курса доллара по отношению к рублю, являющиеся возмущающим воздействием для банков, страховых компаний и т.п.

Характеристиками случайных процессов могут служить:

1. Среднее значение (или математическое ожидание)

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_k(t) \qquad (20)$$

где N – число реализаций. Среднее значение получается усреднением по множеству реализаций и является функцией времени, но уже не случайной.

2. Средний квадрат (или момент второго порядка):

$$\left\langle x^2(t) \right\rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_k^2(t) \qquad (21)$$

также является не случайной функцией времени.

3. Дисперсия, (или средний квадрат отклонения функции от ее математического ожидания):

$$D_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} [x_k(t) - \left\langle x \right\rangle]^2 \qquad (22)$$

Если у процесса x(t) среднее значение равно нулю, то такие процессы называют центрированными. Для них дисперсия и средний квадрат совпадают. Постоянную составляющую в случайном процессе удобно выделить и рассмотреть отдельно, а оставшуюся после выделения часть рассматривать как центрированную.

Наиболее распространенным и наиболее важным являются стационарные случайные процессы, для которых среднее значение, средний квадрат являются постоянными величинами, не зависящими от времени. Мы будем в дальнейшем рассматривать стационарные случайные процессы с эргодическим свойством, для которых осреднение по реализациям эквивалентно осреднению по времени и поэтому среднее значение и средний квадрат могут быть вычислены как интегралы:

$$\left\langle x \right\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{0} x dt \qquad (23)$$

$$\left\langle x^2 \right\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{0} x^2(t) \qquad (24)$$

Отметим, что $\langle x \rangle$ и $\langle x^2 \rangle$ являются постоянными числами.

Важной характеристикой случайного процесса является его корреляционная функция:

$$K_{\varphi}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{0}x(t)x(t-\tau)dt \qquad (25)$$

которая отражает тесноту связи между значениями случайного процесса, разделенными интервалом τ. Свойства корреляционной функции описаны, например, в работе [45].

Важной характеристикой случайного процесса является закон распределения его ординат. Для подавляющего большинства случайных процессов, встречающихся в природе и в технике, ординаты распределены по закону, близкому к нормальному (закону Гаусса), а точнее – к усеченному нормальному. Для нормального закона вероятность того, что значение модуля $|x(t)|$ для любого t не превысит величины $k\sigma_x$ (где $\sigma_x=\sqrt{\langle x^2\rangle}$) зависит только от k и выражается формулой

$$P[|x|\le k\sigma_x]=\Phi(k) \qquad (26)$$

Где Φ(k) – известный «интеграл вероятностей»

$$\Phi(k)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{k}e^{-\frac{y^2}{2}}dy \qquad (27)$$

для которого имеются подробные таблицы. Полезно помнить краткую выдержку из них:

k	1	1,645	2	3	4,417
Φ(k)	0,6827	0,9	0,9545	0,9973	$1\text{-}10^{6}$

Широчайшая распространенность случайных процессов, распределенных по нормальному закону связана с тем, что этот закон является законом предельным: как известно, сумма достаточно большого числа независимых или слабо зависимых случайных величин, подчиненных каким угодно законам распределения при весьма не жестких ограничениях стремится в переделе к нормальному закону. А поскольку любое значение реального случайного процесса является следствием большого числа порождающих факторов, то и не удивительно, что на практике почти всегда приходится иметь дело с процессами, распределенными по нормальному или близкому к нормальному закону.

Однако имеет место одна важная оговорка: идеальный нормальный закон является законом предельным, порожденным бесконечным множеством отдельных причин. Именно поэтому для него хотя и мала, но отлична от нуля, как показывает формула (26), вероятность сколь угодно больших значений x(t) (поскольку Φ(k)<1 для любых k). Реальные процессы порождены конечным, хотя и большим числом факторов и ограничены. Поэтому для лучшего согласия с реальностью формулу (26) дополняют «принципом практической уверенности», принимая, что вероятность неравенства $\left|x(t)\right| \geq k_0\sigma_x$ равна нулю. Постоянную k_0 в этом неравенстве называют «постоянной практической уверенности» и в большинстве приложений принимают равной трем. Отсюда вытекает известное «правило трех сигм», формулируемое так: «отклонений, больших, чем три среднеквадратичных значения в реальном процессе не встретится». В некоторых особых случаях постоянная практической уверенности k_0 может быть больше, чем k_0=3.

Из подавляющей распространенности нормальных случайных процессов следует, что для системы стабилизации и слежения естественным критерием качества является именно среднеквадратичный.

Действительно, пусть, например, техническими требованиями к полету экраноплана над морем задано, что предельным допустимым отклонением высоты полета от заданной является h_0 метров. Согласно правилу «трех сигм» это будет обеспечено, если будет $\sigma_h \le \frac{h_0}{3}$. Отсюда и вытекает важнейшая роль среднеквадратичных величин при синтезе оптимальных систем стабилизации и слежения. А сами среднеквадратичные величины легко вычисляются через корреляционную функцию и спектральную плотность мощности случайного процесса.

Спектральной плотностью мощности (или для краткости спектром) случайного процесса φ(t) называется косинус-преобразование Фурье его корреляционной функции:

$$S_\varphi(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty K_\varphi(\tau)\cos\omega\tau d\tau \qquad (28)$$

Если спектр φ(t) известен, то его средний квадрат вычисляется через интеграл от спектра:

$$\left\langle \varphi^2 \right\rangle = \sigma_\varphi^2 \int_0^\infty S_\varphi(\omega) d\omega \qquad (29)$$

Из свойств косинус-преобразования Фурье вытекает, как известно, [45] простое правило для вычисления среднего квадрата решения дифференциального уравнения со случайной правой частью: если задано уравнение

$$A(D)x=\varphi(t) \qquad (30)$$

Где φ(t) - стационарный случай процесс, то между спектрами S_x и S_φ имеет место равенство

$$\left|A(j\omega)\right|^2 S_x = S_\varphi \qquad (31)$$

отсюда элементарно вычисляется средний квадрат решения x(t):

$$\sigma_x^2 = \int_0^\infty S_\varphi(\omega)\frac{d\omega}{\left|A(j\omega)\right|^2} \qquad (32)$$

Таким образом, для вычисления среднего квадрата достаточно подставить в операторный полином A(D) дифференциального уравнения (30) вместо оператора D мнимое число jω, вычислить квадрат модуля $\left|A(j\omega)\right|^2$ как функцию от ω и взять интеграл (32). Это можно делать в том случае, если полином A(D) – Гурвицев. Если он не Гурвицев, то расчет по формуле (32) может дать конечное значение σ_x^2, но физического смысла этот результат чаще всего не имеет, поскольку при не гурвицевом полиноме A(D) в формуле (30) значение σ_x^2 в реальном объекте не может быть конечным, так как x(t)→∞ при t→∞. Формула (32) дает величину среднего квадрата частного решения уравнения (30), остающегося ограниченным при t→∞. Если нас интересует только частное решение, то формулой (32) можно пользоваться и при не гурвицевом полиноме A(D). Формула (32) лежит в основе всех расчетов линейных систем, находящихся под воздействием возмущающих сил случайного характера. Они легко обобщаются и на уравнение вида

$$A(D)x=B(D)\varphi \qquad (33)$$

В этом случае $\sigma_x^2 = \int_0^{\infty} \frac{|B(j\omega)|^2}{|A(j\omega)|^2} d\omega$ (34)

Мы убеждаемся, что для вычисления σ_x достаточно знать спектр возмущающего воздействия. Его можно получить на основе формулы (28) из корреляционной функции процесса φ(t), а корреляционную функцию легко вычислить на основе формулы (25) по наблюдениями за процессом φ(t). Разумеется, на практике вместо бесконечного нижнего предела в интеграле (25) берут конечный. Практические вопросы вычисления нужной точности, когда обрывать вычисления и т.п. – с достаточной полнотой освещены во многих руководствах – таких, как, например, [8], [70]. Практические приложения отражены в работе [2].

На практике полученные из наблюдений значения корреляционной функции аппроксимируют каким-либо аналитическим выражением. Чаще всего используют аппроксимацию экспонентой:

$$K_\varphi(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha\tau} \tag{35}$$

подбирая значение α наилучшим образом соответствующее экспериментальным точкам. Корреляционной функции (35) соответствует спектр

$$S_\varphi(\omega) = \sigma_\varphi^2 \frac{2}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \tag{36}$$

Часто используют также аппроксимацию вида

$$K_\varphi = \sigma_\varphi^2 e^{-\alpha\upsilon} \cos \beta\tau \tag{37}$$

и подбирает два параметра α и β, стремясь к наилучшему совпадению с экспериментальными данными. Корреляционной функции (37) соответствует спектр

$$S_{\varphi}(\omega)=\sigma_{\varphi}^{2}\frac{2\alpha}{\pi}\frac{\alpha^{2}+\beta^{2}+\omega^{2}}{(\alpha^{2}+\beta^{2}+\omega^{2})^{2}+4\alpha^{2}\omega^{2}} \qquad (38)$$

иногда используют разновидность аппроксимации (37):

$$K_{\varphi}=\sigma_{\varphi}^{2}e^{-\alpha\tau}(\cos\beta\tau+\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta\tau) \qquad (39)$$

которой соответствует спектр

$$S_{\varphi}(\omega)=\sigma_{\varphi}^{2}\frac{4\alpha}{\pi}\frac{\alpha^{2}+\beta^{2}}{(\alpha^{2}+\beta^{2}-\omega^{2})^{2}+4\alpha^{2}\omega^{2}} \qquad (40)$$

При малых отклонениях α,β спектры (38) и (40) похожи друг на друга и имеют резко выраженные максимумы при $\omega\approx\beta$.

На рис.4 показан спектр (40) при α=0,21 и β=1. Такое соотношение α и β характерно для развитого морского волнения в открытом море.

В общем случае спектр всегда можно аппроксимировать дробно-линейной четной функцией ω:

$$S_{\varphi}=\frac{a_{p}\omega^{2p}+a_{p-1}\omega^{2p-2}+\ldots+a_{0}}{b_{q}\omega^{2q}+b_{q-1}\omega^{2q-2}+\ldots+b_{0}} \qquad (41)$$

и подобрать коэффициенты a_p и b_q так, чтобы наилучшим образом аппроксимировать полученные в эксперименте данные. Чем выше степени p и q, тем точнее аппроксимация.

Исследуя корреляционные функции, нужно иметь ввиду, что они на основе наблюдения за прошлым процесса $\varphi(t)$ при $t\le0$ дают некоторую информацию о будущем, о значениях $\varphi(t)$ при $t>0$ позволяют до известной степени прогнозировать будущее (подробнее о прогнозировании – в [8;59;70]). Однако информация о будущем, заключенная в корреляционной функции, является информацией ограниченной, не-полной и точность прогноза падает с ростом t. Чем быстрее затухает с ростом переменной τ корреляционная функция $K_\varphi(\tau)$, тем быстрее падает точность прогноза с увеличением времени.

Корреляционные функции и спектры позволяют перекинуть мост между детерминированием и случайным процессами. Вычисляя корреляционную функцию для гармонического колебания φ(t)=A sin (βt+θ) то есть для детерминирования процесса нетрудно убедиться, что в этом случае корреляционная функция

$$K_\varphi(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos\beta\tau \qquad (42)$$

не затухает с ростом τ, а, используя формулу (28) можно убедиться, что спектр φ(τ) гармонического колебания вырождается в обобщенную δ - функцию Дирака:

$$S_\varphi(\omega) = \frac{A^2}{2}\delta(\omega - \beta) \qquad (43)$$

Как известно, обобщением δ - функции Дирака равны нулю для всех значений аргумента ω, кроме значения аргумента, равного нулю. При этом значении аргумента δ - функция стремится к бесконечности и в то же время интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx = 1$$

Отметим важное свойство δ - функций Дирака: для любой непрерывной функции f(ω) будет иметь место равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\beta)f(\omega)d\omega = f(\beta)$$

то есть интеграл от произведения любой функции f(ω) на δ - функцию будет зависеть только от значения функции f(ω) при ω=β.

Обобщенную δ - функцию Дирака можно рассматривать как предел многих непрерывных функций. Так, нетрудно убедиться, что непрерывная функция (38) при α→0 переходит в δ - функцию: $S_\varphi(\omega)=\sigma_\varphi^2\delta(\omega-\beta)$.

Точно так же непрерывная функция (36) при α→0 переходит в δ - функцию: $S_\varphi(\omega)=\sigma_\varphi^2\delta(\omega)$. Следовательно, спектр $S_\varphi=\delta(\omega)$ соответствует детерминированному процессу φ(t)=1 – постоянной силе. В общем случае имеет место то же соотношение: спектр случайного процесса – непрерывная функция, спектр детерминированного процесса – это δ - функция или сумма δ - функций.

В заключение рассмотрим еще один своеобразный случайный процесс, для которого S_φ=const – то есть его спектр постоянен для всех частот. Такой процесс называют «белым шумом», и он, разумеется, является идеализацией, поскольку средний квадрат такого процесса бесконечен. Однако реальные процессы со спектрами вида (36) для больших значений α часто условно заменяют «белым шумом» и это упрощает все расчеты. Для «белого шума», как легко вычислить, корреляционная функция $K_\varphi(\tau)=\sigma_\varphi^2\delta(\tau)$ - то есть является обобщенной δ - функцией Дирака. Поэтому «белый шум» является «абсолютно непредсказуемым процессом», в его спектре – в отличие от спектров реальных процессов - не содержится никакой информации о поведении $\varphi(t)$ при $t>0$.

§3. Теория синтеза оптимального управления и ее развитие.

До появления корреляционной и спектральной теории случайных процессов исследование объектов и систем, находящихся под воздействием возмущающих сил случайного характера было очень затруднительно. Алексей Николаевич Крылов, выполнив в 1914 году в экспедиции на судне «Метеор» большие экспериментальные исследования качки судов в условиях реального нерегулярного морского волнения, убедился, что существовавший в то время математический аппарат не позволял дать описание и расчет нерегулярной качки.

Новый математический аппарат, позволяющий рассчитывать характеристики случайных процессов на основе их корреляционных функций, был разработан в 1938-1943 годах трудами А.Н. Колмогорова, А.С.Хинчина, Н.Винера и их последователей. Вскоре появились простые расчетные формулы, подобные формуле (34).

Встал вопрос о синтезе оптимального регулятора, оптимальной обратной связи, которая обеспечила бы наилучшую возможную точность стабилизации или слежения, при возмущающих воздействиях случайного характера.

Задачу синтеза оптимальной системы можно рассматривать, например, в такой постановке: имеется объект управления, математической моделью которого является уравнение

$A(D)x=B(D)u+\varphi(t)$.

Объект управления замкнут линейной обратной связью (регулятором), имеющей уравнение

$$u=-W(D)x \qquad (45)$$

(оператор W(D) может быть дробно-линейной функцией от оператора дифференцирования D=d/dt, то есть $u=\frac{W_1(D)}{W_2(D)}x$, где $W_1(D)$ и $W_2(D)$ – полиномы, для удобства выкладок мы сохраним запись (45)).

Задача о синтезе оптимального регулятора равносильна поиску оптимального оператора W(D), который наилучшим образом преобразовал бы функцию x(t) в функцию u(t) – преобразовал бы так, что точность стабилизации и слежения была бы наилучшей. Задачи о поиске наилучших операторов не имеют для своего решения достаточно удобного математического аппарата. Вот почему огромное значение имеет корреляционная теория случайных процессов, которая позволила трудную задачу поиска оптимально оператора W(D) свести к задаче вычисления функции W(jω), которая доставляет минимум довольно несложным функционалам и поэтому может быть найдена традиционными методами вариационного исчисления. А если найдена W(jω) , то это определяет W(D) – достаточно подставить вместо аргумента jω оператор дифференцирования D=d/dt.

Действительно, замкнув объект управления (44) регулятором (45) получим уравнение замкнутой системы:

$$[A(D)+B(D)W(D)]x=\varphi(t) \qquad (46)$$

$$[A(D)+B(D)W(D)]u=-W(D)\varphi(t) \quad (47)$$

Пользуясь формулой (34), устанавливаем:

$$\sigma_x^2 = \int_0^\infty S_\varphi(\omega)\frac{d\omega}{|A(j\omega)+B(j\omega)W(j\omega)|^2} \quad (48)$$

$$\sigma_x^2 = \int_0^\infty S_\varphi(\omega)\frac{|W(j\omega)|^2 d\omega}{|A(j\omega)+B(j\omega)W(j\omega)|^2} \quad (49)$$

Теперь надо найти регулятор, доставляющий минимум σ_x^2 - то есть, обеспечивающий наилучшую точность стабилизации и слежения – но с учетом ограничения на ресурс управления. Начиная с первых работ по оптимизации считалось, что ограничение наложено на средний квадрат управления, на σ_u^2

(критика этого далеко не всегда обоснованного предположения и уточненные решения приведены в работе [1]) и тогда проблема поиска оптимального оператора W(D) сводилась к изопараметрической задаче вариационного исчисления – задаче о поиске функции W(jω), доставляющей минимум интегралу (48) при заданном значении интеграла (49). Согласно мнемоническому правилу решения задач вариационного исчисления, исходящего еще к Л.Эйлеру, достаточно найти функцию W(jω), доставляющую минимум составному функционалу

$$m^2\sigma_x^2+\sigma_u^2 = \int_0^\infty S_\varphi(\omega)\frac{m^2+|W(j\omega)|^2}{|A(j\omega)+B(j\omega)W(j\omega)|^2} \quad (50)$$

где m^2 – множитель Лагранжа, подлежащий в дальнейшем определению. Удобно сразу брать этот множитель в виде m^2, в виде неотрицательного числа, потому что при этом сразу выполняется необходимое условие Лежандра вариационного исчисления, [19,42].

Поскольку S_φ не зависит от $W(j\omega)$, то необходимым условием минимума является обращение в нуль первой вариации второго сомножителя в подынтегральном выражении интеграла (50), то есть функции

$$F = \frac{m^2 + |W(j\omega)|^2}{|A(j\omega) + B(j\omega)W(j\omega)|^2} =$$

П

$$= \frac{m^2 + W(j\omega)W(-j\omega)}{[A(j\omega) + B(j\omega)W(j\omega)][A(-j\omega) + B(-j\omega)W(-j\omega)]}$$

Поскольку

$\delta F = \frac{\partial F}{\partial W(j\omega)}\delta W(j\omega) + \frac{\partial F}{\partial W(-j\omega)}\delta W(-j\omega)$, то для обеспечения равенства нулю первой вариации необходимо равенство нулю производных $\frac{\partial F}{\partial W(j\omega)}$ и $\frac{\partial F}{\partial W(-j\omega)}$. Вычисляя по обычным правилам дифференциального исчисления производную $\frac{\partial F}{\partial W(j\omega)}$ и приравнивая ее к нулю, получаем следующее равенство для функции $W_э(j\omega)$, доставляющей минимум функционалу (50):

$$W_{опт}(j\omega) = -m^2 \frac{B(-j\omega)}{A(-j\omega)} \qquad (52)$$

Вычисляя производную $\frac{\partial F}{\partial W(-j\omega)}$ и приравнивая ее нулю, получаем снова условие (52). Проверив выполнение достаточных условий минимума, убеждаемся окончательно, что оптимальный регулятор имеет вид:

$$U_{опт} = -m^2 \frac{B(-D)}{A(-D)} x \qquad (53)$$

Однако, замкнув ее регулятором (53) объект управления (44), мы убедимся, что он не обеспечивает устойчивости замкнутой системы. Действительно, подставив (53) в (44), получим для замкнутой системы уравнения:

$[A(D)A(-D) + m^2B(D)B(-D)]x =$
$= A(-D)\varphi(t)[A(D)A(-D) + m^2B(D)B(-D)]u = m^2B(-D)\varphi(t)$
(54)

Стоящий в квадратных скобках характеристический полином замкнутой системы не может быть Гурвецивым. Действительно, если, например, некоторое комплексное число λ_i с отрицательной вещественной частью является корнем характеристического полинома, то и число $-\lambda_i$ с положительной вещественной частью вследствие симметричности выражения, стоящего в квадратных скобках, также будет его корнем.

Поэтому формула (53) не является окончательным решением поставленной нами задачи и нужно, продолжая решение, искать теперь регулятор вида (45), который бы обеспечивал минимум функционала (50) при учете дополнительного условия – устойчивости замкнутой системы. Определение оптимального регулятора при учете дополнительного условия устойчивости является значительно более сложной задачей, однако она решаема различными методами и не один раз. Решение можно найти в

[26,29,33,34,36,37,42,59,65,69] (далее мы разъясним, почему решений и публикаций было так много).

Проведем для иллюстрации один из наиболее простых алгоритмов синтеза оптимального регулятора, пригодный для объектов вида (45) при B(D)=1.

Алгоритм синтеза.

1. Предварительно для удобства в аналитической аппроксимации спектра (41) делают замену переменной: jω=5, после чего спектр $S_\varphi(s)$ являющийся четной функцией переменной s, факторизуют

$$S_\varphi(s)=S_1(s)S_1(-s) \tag{55}$$

- то есть, представляют как произведение двух симметричных множителей, один из которых зависит от s, другой - от –s. Для выполнения факторизации достаточно найти корни числителя и знаменателя спектра (41). В функцию $S_1(s)$ войдут корни с отрицательными вещественными частями, а в функцию $S_1(-s)$ – симметричные им корни с положительными вещественными частями.

2. Факторизуется полином:

$$A(s)A(-s)+m^2=G(s)G(-s) \tag{56}$$

При этом G(s) является Гурвицевым полиномом .
G(-s) – не Гурвицевым.

3.Выполняется операция сепарации, – то есть, разложения на целую часть и правильные дроби с полюсами в разных полуплоскостях комплексного переменного s:

$$\frac{A(s)}{G(-s)}S_1(s)=M_0+M_++M_- \tag{57}$$

где M_0 – целый полином, M_+ - правильная дробь с полюсами в левой полуплоскости, а M_- - правильная дробь с полюсами в правой полуплоскости.

4.Строится вспомогательная функция:

$$\Phi(s)=\frac{M_0+M_+}{G(s)S_1(s)} \qquad (58)$$

с использованием которой непосредственно синтезируется оптимальный оператор W(D):

W(D)=A(D)-1/Ф(D) (59)

Пример 1.

В качестве примера приведем синтез оптимального оператора для объекта управления

Dx=u+φ(t) (60)

1. Факторизуя спектр, находим:

$$\sigma_\varphi^2\frac{2}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2-s^2}=\sigma_\varphi\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha+s}\sigma_\varphi\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha-s}$$

откуда $S_1(s)=\dfrac{1}{\alpha+s}$ (поскольку постоянные множители на вид регулятора не влияют).

2. Факторизуя полином

m^2 +A(s)A(-s) = m^2-s^2 = (m+s)(m-s) находим, что G(s) = m+s; G(-s) = m-s.

3. Выполняя сепарацию выражения

$$\frac{A(-s)}{G(-s)}S_1(s)=\frac{-s}{(m-s)(\alpha+s)}=\frac{-m}{\alpha+m}\frac{1}{m-s}+\frac{\alpha}{m+\alpha}\frac{1}{\alpha+s}$$

находим, что M_0 = 0 и $M_+=\dfrac{\alpha}{\alpha+m}\dfrac{1}{\alpha+s}$

4. Функция Ф(s) в нашем случае равна

$\Phi(s)=\dfrac{M_0+M_+}{G(s)S_1(s)}=\dfrac{\alpha}{\alpha+m}\dfrac{1}{\alpha+s}$ и, следовательно, оптимальным будет регулятор

$$u=-\left[\frac{m}{2}D+\frac{m(m+\alpha)}{\alpha}\right]x \qquad (61)$$

Мы убеждаемся, что оптимальный регулятор зависит от спектра S_φ, а точнее - от параметра α спектра возмущающего воздействия (36).

Замкнув регулятором (61) объект управления (60) убедимся, что движение замкнутой системы описывается уравнением

$$(D+m)x = \frac{\alpha}{\alpha+m}\varphi \qquad (62)$$

и является устойчивым. Вычисляя σ_x^2 и σ_u^2 в замкнутой системе, находим:

$$\sigma_x^2 = \frac{\alpha^2}{m(\alpha+m)}; \sigma_u^2 = \frac{\alpha^2 m + 3\alpha m^2 + m^3}{(\alpha+m)^3} \qquad (63)$$

Если, например, ресурс управления ограничен неравенством $\sigma_u^2 \le 0.7$, то из второй формулы (63) находим множитель Лагранжа m^2=1.69. Регулятор (61) имеет вид

u= -[1.3D+3]x

и обеспечит при σ_u точность стабилизации $\sigma_x^2 = 0.0632$.

Нетрудно проверить, что из всех регуляторов вида u=-k_0x ограничению $\sigma_u^2 \le 0.7$ будет удовлетворять регулятор u=-2.33x и он обеспечит точность стабилизации $\sigma_x^2 = 0.128$. Таким образом, переход от традиционных пропорциональных регуляторов вида u=-kx к оптимальному управлению действительно может существенно улучшить точность стабилизации. В работе [45] показано, что улучшение точности связано с использованием той информации о возмущающем воздействии $\varphi(t)$, которая заключена в его спектре.

Мы привели простейший из алгоритмов синтеза. Другие алгоритмы можно найти в [26,29,37,46,65].

Обилие алгоритмов и публикаций связано с тем, что уж вскоре после первых работ по синтезу оптимальных систем стабилизации и слежения [36,34] обнаружилось, что некоторые оптимальные системы теряют устойчивость даже при малых отклонениях параметров от расчетных значений. Разумеется, это обстоятельство пугало практиков, сразу подрывало любое доверие к оптимальным системам и накрепко перекрывало возможности их практического применения. Несмотря на огромное число исследований, посвященных оптимальным системам, практическое их применение было большой редкостью. Продолжались упорные поиски все новых и новых методов синтеза оптимальных регуляторов, которые не приводили бы к опаснейшей потере устойчивости при неизбежных на практике малых вариациях параметров.

Перелом произошел в 1973 году. В начале года в журнале «Автоматика и телемеханика» [35] в последний раз вспыхнула дискуссия между авторами работы [29] и П.В.Надеждиным, который показал, что предложенный ими очередной алгоритм синтеза приводит, как и предыдущие алгоритмы, к системам, способным терять устойчивость при малых вариациях. Авторы работы [29] защищались (безуспешно) от этого обвинения. Но уже в том же 1973 году в монографии [40] было показано, что дело не в алгоритме, а в том, что у ряда объектов управления минимум критерия качества объективно лежит на границе устойчивости по некоторым из параметров системы и поэтому для получения работоспособной системы нужно изменить саму постановку задачи, ввести требования сохранения устойчивости при вариациях параметров, как новое дополнительное условие и для его реализации пожертвовать, если нужно, частью критерия качества.

Успеха удалось добиться потому, что в работе [40] впервые для некоторых объектов управления удалось построить оптимальные регуляторы в замкнутой форме, а не только в виде алгоритма, что и позволило сразу объяснить причину потери устойчивости.

Так, для объектов управления вида (44) при B(D)=1 и возмущающем воздействии со спектром (36) в [40] было доказано что оптимальный регулятор имеет вид

$$u_{опт} = \left[A(D) - \frac{G(D)}{K} \right] x \qquad (64)$$

где $K = \dfrac{A(\alpha)}{G(\alpha)}$, а при возмущающем воздействии со спектром (40) оптимальный регулятор имеет вид

$$u_{опт} = \left[A(D) - \frac{G(D)}{a + bD} \right] x \qquad (65)$$

где коэффициенты a и b вычисляются через вещественную и мнимую части комплексного числа

$$K_1 + jK_2 = \frac{A(\alpha - j\beta)}{G(\alpha - j\beta)}, \qquad (66)$$

причем $a = k_1 + \dfrac{\alpha}{\beta} k_2, b = \dfrac{k_2}{\beta}$. (Напоминаем, что Гурвицев полином G(D) получают из равенства

$A(D)A(-D)+m^2 = G(D)G(-D)$

И имеет ту же степень, что и полином A(D)).

Пусть теперь обратной связью (65) замкнут объект управления

$$A_1(D)x=u+\varphi(t) \qquad (67)$$

У которого старший коэффициент полинома $A_1(D)$ равен

$(1+\varepsilon_n)\,a_nD^n$ – то есть отличается от старшего коэффициента расчетного полинома на малое число ε_n. Характеристический полином замкнутой системы будет равен

$$(a+bD)\varepsilon_n a_n D^n+G(D) \qquad (68)$$

Его степень равна n+1, а знак его старшего коэффициента будет зависеть от знака малой ε_n , и тем самым может не совпадать со знаками остальных членов. Это означает, что в зависимости от знака вариации ε_n характеристический полином перестает быть Гурвицевым. Для объекта управления (44) при

B(D)=1 и возмущающем воздействии со спектром (40) оптимальная замкнутая система всегда может терять устойчивость при малой вариации старшего коэффициента и это связано с тем, что минимум критерия качества лежит на границе устойчивости или по старшему коэффициенту объекта управления, или по коэффициенту усиления b оптимального регулятора. На рис.5, приводившемся еще в работе [40] показана зависимость критерия качества от коэффициентов усиления регулятора. Оптимальное значение $b=b_{опт}$ соответствует одновременно и минимуму критерия и границе устойчивости.

Для получения систем управления, сохраняющих устойчивость при вариациях параметров, необходимо использовать методы регуляризации. Первый метод регуляризации был предложен еще в 1973 году в той же монографии [40]. Однако он был недостаточно совершенным. Более удобный метод регуляризации был предложен в монографии [42]. Он был основан на обнаруженной [42] связи между структурой регулятора (45), то есть степенями полиномов $W_1(D)$ и $W_2(D)$, и степенями p и q в аналитической аппроксимации спектра возмущающего воздействия (41), а также степенью n полинома A(D) и степенью m полинома B(D) в математической модели объекта управления (44).

Так, например, если $p \le n+q-1$, то для степени f полинома $W_1(D)$ выполняется неравенство

$$f \le n+q-1 \qquad (69)$$

а для степени l полинома $W_2(D)$ – неравенство

$$l \le m+q-1 \qquad (70)$$

Если $m+q-1 \le 2n-m+q-1$

То $f \le n+q-1$

$$l \le p \qquad (71)$$

и если, наконец, $p > 2n-m+q-1$, то

$$f \le m+p-n$$

$$l \le p \qquad (72)$$

Неравенства (69-72) выполняются почти всегда со знаком равенства), так неравенства возникает лишь в тех случаях, когда у полиномов $W_1(D)$ и $W_2(D)$ оказываются одинаковые корни) и позволяют довольно много сказать о структурах и свойствах оптимального регулятора еще до его вычисления. Эти неравенства позволили сразу установить критерий возможности потери устойчивости замкнутой оптимальной системой при вариациях ее параметров, опубликованной в [42]: если выполняется неравенство

$$p \geq m+q-1 \qquad (73)$$

то при вариациях параметров устойчивость сохраняется, если оно нарушается, то потеря устойчивости возможна. Позднее Л.Н.Волгин в [15] предложил назвать неравенство (73) критерием Ю.П.Петрова.

Критерий (73) открывает простой путь к построению систем управлению, не теряющих устойчивости пи вариации параметров: ведь степени p и q аналитической аппроксимации спектра (41) находятся в наших руках и их всегда можно выбрать так, чтобы критерий Ю.П.Петрова оказался выполненным. Разумеется, удовлетворение дополнительного требования несколько ухудшает степень приближения аппроксимирующей кривой к экспериментальным точкам и приводит к неизбежной потере, жертве критерия качества. Однако можно добиться того, чтобы расхождение между экспериментальными данными и аппроксимирующей кривой происходило за пределами полосы частот, существенной для системы (существенная полоса – это та область частот ω, внутри которой модуль частотной характеристики замкнутой системы еще не является пренебрежимо малым). При таком выборе потеря критерия качества, неизбежная для удовлетворения дополнительного требования сохранения устойчивости при вариациях параметров становится минимальной.

После опубликования монография [40] в 1973 году и монография [42] в 1977 году наступил перелом в развитии теории синтеза оптимальных систем управления: она пошла по другому пути. Поиски алгоритма синтеза систем, доставляющих минимум функционалам типа (50) и одновременно свободных от потери устойчивости при вариациях параметров объекта управления прекратились. Вместо этого стали искать методы регуляризации [1,42,56,71,73], способные придать оптимальной системе дополнительное свойство сохранения устойчивости при вариациях параметров за счет некоторого ухудшения критерия качества.

К сожалению, наиболее популярными методами регуляризации стали методы, основанные не введении составных функционалов вида

$$J = \left\langle u^2 \right\rangle + m^2 \left\langle x^2 \right\rangle + k_1 \left\langle x'^2 \right\rangle + \ldots + k_n \left\langle (x^{(n)})^2 \right\rangle, \qquad (74)$$

где только первые два числа имеют физический смысл (качество стабилизации и слежения отражает второй член, располагаемый ресурс управления – первый член, а остальные вводятся для регуляризации). Использование критериев качества вида (74), разумеется, позволяет получить системы управления, сохраняющие устойчивость при вариациях параметров, но неизбежная жертва в критерии качества может при этом оказаться слишком большой. В этом отношении гораздо удобнее метод регуляризации, предложенный в [42], позволяющий добиться минимальной жертвы критерия качества за счет изменения аналитической аппроксимации спектра за пределами полосы частот, существенных для данной системы с целью выполнения критерия Ю.П.Петрова (73). При этом ухудшение критерия качества будет меньше, чем при использовании методики, преложенной, например, в публикациях [56.71.73]. К сожалению, монографии [42] и [10] остались мало известными широкому кругу специалистов по системам управления. Предложенные в них методы используют мало. Основное внимание уделялось изучению переводов зарубежных авторов.

Так же остались почти не замеченными выполненные в 1985-87 годах [1,45] работы по созданию систем управления, удовлетворяющих комплексу технических требований. Действительно, минимум среднеквадратичной погрешности стабилизации или слежения не может быть единственным критерием качества реальной системы. Она должна обязательно быть гибкой, удовлетворять комплексу признаков – таких как удобство реализации, устойчивость регулятора, как отдельно взятого звена, малая чувствительность к неточно известным старшим коэффициентам системы, хорошие переходные процессы и т.п. Методы синтеза, предложенные в работах [26,29,34,36,65,69] не обладали гибкостью. Они позволяли обеспечить минимум среднеквадратичного критерия, но оставалось открытым - а как обеспечить выполнение дополнительных, но важных технических требований. Без их выполнения система работать не будет. Поэтому не практике редко использовались результаты теории синтеза оптимальных систем. Предпочитались методы проектирования более примитивные, но обладающие гибкостью.

В работах [42] и [10] были разработаны и описаны гибкие методы синтеза, позволяющие проектировать системы, удовлетворяющие комплексу технических требований. Это позволило использовать методы теории синтеза оптимальных систем управления уже не только для теоретических оценок, но и для создания реальных систем, действительно позволивших улучшить качество стабилизации и слежения. Некоторые результаты использования подобных систем описаны в монографиях [45,62], статьях [11.17.18.32].

Резкое снижение спроса на наукоемкую. Продукцию в России, начавшееся в 1988-89 годах, задержало практическое использование описанных в [1,42,45] методов повышения качества систем стабилизации и слежения.

Обратим внимание на еще один результат поворота, произошедшего после опубликования монографий [40,42]. Освободившись от гипноза поисков алгоритма синтеза, совмещающих минимум среднеквадратичного критерия качества с сохранением устойчивости при вариациях параметров, в США обратили внимание на то, что спектр возмущающего воздействия часто не известен нам, или не может существенно изменяться с течением времени. В этих условиях управление, оптимальное для конкретного спектра, может оказаться совсем не подходящим для реальных условий эксплуатации.

Вернемся к уже рассмотренному нами простому объекту управления (60). Пусть критерием качества является функционал (50) при $m^2=1$. Оптимальное управление для спектра (36), как было показано, имеет вид (61), а замкнутая система имеет вид (62). Пусть мы замкнули объект управления регулятором (61), оптимальным для спектра (36) при $\alpha=1$, пришло возмущающее воздействие со спектром $S_\varphi=\delta(\omega-10)$. Тогда, как нетрудно рассчитать, регулятор (61) обеспечит значение критерия качества (50) равное 0,258, в то же время как регулятор, оптимальный для спектра $S_\varphi=\delta(\omega-10)$ и обеспечил бы значение того же критерия, равное 0,01 – то есть в 25,8 раз меньше.

Такое различие в качестве управления, разумеется, связано с тем, что модуль частотной характеристики замкнутой оптимальной системы (62) быстро убывает с ростом частоты ω. Если бы удалось найти управление, для которого модуль частотной характеристики был бы пологим, мало зависел бы от частоты ω (а в пределе был бы постоянным для всех частот) то такое управление было бы равномерно-оптимальным для всех спектров возмущающих воздействий.

Основываясь на этой простой идее и используя методы, так называемой «H^∞ оптимизации», американские исследователи, начиная с 1981 года, развернули интенсивные исследования по равномерной оптимизации (первой работой по этой направлению считается статья Зеймса, опубликованная в 1981 году – смотри обзор [7]). В термине «H^∞ оптимизация» буква H связана с фамилией Харди (Hardy), с чьим именем связывают понятие «пространство Харди» с соответствующей метрикой. Более подробно о «пространствах Харди» и о методике «H^∞ оптимизации» рассказано в обзорах [7.60].

Нужно прямо сказать, что как обзорные статьи, так и большинство работ по «H^∞ оптимизации» читаются трудно и законченного, ясного преставления о предмете, особенно для учащихся, не оставляют.

В настоящем учебном пособии мы не будем рассматривать методики «H^∞ оптимизации» более подробно уже потому, что в задачах синтеза оптимальных систем управления сам принцип стремления к пологой частотной характеристике – даже в предельном случае, когда модуль частотной характеристики постоянен для всех частот - в действительности не является плодотворным. Покажем это на примере.

Пример 2.

Задан объект управления

$$(2D+1)x=u+\varphi(t) \qquad (75)$$

с критерием качества

$$J=\sigma_x^2+\sigma_u^2 \qquad (76)$$

(то есть $m^2=1$) и пусть $\sigma_\varphi^2=1$. Но спектр возмущающего воздействия $\varphi(t)$ может быть любым. Рассмотри управление

$$u=Dx \qquad (77)$$

Нетрудно проверить, что оно реализует идеал «H^∞ оптимизации». Зависимость критерия качества (76) для объекта управления (75), замкнутого регулятора (77) от ω вырождается в постоянную величину, на зависящую от $S_\varphi(\omega)$. Действительно, замкнув объект (75) регулятором (77) получаем уравнения замкнутой системы:

(D+1)x=φ

(D+1)u=Dφ (78)

откуда следует, что

$$J = \sigma_x^2 + \sigma_u^2 = \int_0^\infty S_\varphi \frac{1+\omega^2}{\omega^2+1} d\omega = \int_0^\infty S_\varphi d\omega \qquad (79)$$

и не зависит от спектра возмущающего воздействия S_φ.

Если же мы замкнем объект управления (75) регулятором

u=-x то уравнение замкнутой системы примут вид

(D+1)x=0.5φ

(D+1)u=-0.5φ (80)

и, следовательно,

$$J = \sigma_x^2 + \sigma_u^2 = 0.25 \int_0^\infty S_\varphi \frac{d\omega}{\omega^2+1} \le 0.25 \qquad (81)$$

Таким образом, хотя регулятор u= -x и не обеспечивает постоянства частотной характеристики, он обеспечивает для любых спектров возмущающих воздействий значение критерия качества (76) более чем в четыре раза лучше, чем регулятор (77), идеальный с точки зрения «H^∞ оптимизации».

Между тем в монографии [40] уже в 1973 году (то есть значительно раньше американских исследований на ту же тему) уже рассматривалась проблема управления при произвольных, заранее не известных спектрах возмущающих воздействий и был предложен другой и более плодотворный путь к ее решению: сперва следует отыскать наиболее неблагоприятное возмущающее воздействие, построить для него оптимальное управление и найти значение критерия качества. Если удастся доказать, что при том же управлении и любом другом спектре возмущающего воздействия значение критерия качества не будет больше, чем то, что соответствует наихудшему возмущению, то это значение будет гарантированным и, причем наименьшим из всех, которые можно гарантировать.

Возвращаясь к рассмотренному примеру 2, отметим, что для него гарантированным уровнем критерия качества (и при этом наименьшим из возможных) является $J=0.25$, а регулятор $u= -x$ является гарантирующим регулятором (доказательство приведем в следующем разделе). Подобный регулятор дает все то, что требуется для управления при возмущающих воздействиях с неизвестным спектром.

Метод построения гарантирующих регуляторов для важного частного случая объектов управления вида (44) – при $B(D)=const$ и $A(D)$ – Гурвицевом был найден и опубликован еще в 1973 году в [40].

Успех был предопределен тем, что в [40] удалось во-первых, найти наихудшие спектры возмущающих воздействий (или оказались спектры в виде δ - функций Дирака), а во-вторых, несколько позже в [41] было впервые показано, что для таких спектров оптимальный регулятор не единственен и среди множества оптимальных регуляторов можно найти и регулятор гарантирующий. Собственно, опираясь на методику, уже изложенную в [40] и с учетом результата, опубликованного в [41], вполне можно было полностью решить проблему гарантирующего управления для любых объектов управления вида (44), но автор монографии [40] после 1973 года был отвлечен на другую тематику, а никем другим методика, изложенная в [40], в течение 20 лет не была подхвачена. Даже после того, как результаты, полученные в [40] с рядом уточнений публиковалась еще раз в [42] затем в [1,43]. Они все же не привлекли внимания и, по-видимому, остались почти неизвестными в кругу исследователей по теории управления. Они остались неизвестными даже тогда, когда публикации работ по «H^{∞} оптимизации» привлекли повышенное внимание к проблеме управления при неизвестных спектрах возмущающих воздействий. Во всяком случае, в обзорах [7.60], появившихся в авторитетных российских научных журналах, приоритет в решении этой важной проблемы был безосновательно отдан не российским, а американским исследователям, хотя, как уже указывалось, монография [40] вышла на 8 лет раньше первой статьи Зеймса по H^{∞} управлению, опубликованной в 1981 году [7].

В следующем разделе мы покажем, каким образом основываясь на методике, предложенной в [40] можно решить проблему управления при неизвестных спектрах возмущающих воздействий (то есть, проблему гарантирующего управления) в общем виде, для любых объектов вида (44).

§4.Синтез гарантирующих управлений.

Рассмотрим объект управления вида (44) с критерием качества

$$J = m^2\sigma_x^2 + \sigma_u^2 \tag{82}$$

где множитель Лагранжа m^2 будем пока считать величиной заданной, и изложим методы синтеза регулятора (обратной связи) вида (45), который гарантировал бы наименьшее значение критерия (82) для возмущающих воздействий $\varphi(t)$ с любыми спектрами $S_\varphi(\omega)$, подчиненными только нормирующему условию $\int_0^\infty S_\varphi(\omega)d\omega = \sigma_\varphi^2 = 1$.

В предыдущем разделе мы уже показали, что критерий (82) можно свести к виду (50) и абсолютный минимум функционала (50) может обеспечить регулятор (53). Замкнув объект управления (44) регулятором (53), мы получим уравнение замкнутой системы (54). Хотя характеристические полиномы этих уравнений не Гурвицевы, мы можем – применяя формально формулы (34) - вычислить средние квадраты частных решений уравнений (54), а конкретно - тех решений, которые остаются ограниченными при $t\to\infty$. Применяя к уравнению (54) методику вычисления σ_x^2, σ_u^2 через интеграл (34), получаем сперва σ_x^2, σ_u^2, а затем и минимальное значение критерия качества (82):

$$J_{абс\,\min} = \int_0^{\infty} S_{\varphi} \frac{m^2 d\omega}{|A(j\omega)|^2 + m^2 |B(j\omega)|^2} \qquad (83).$$

(Отметим, что в монографии [40] формула (83) выводилась другим путем - через вычисление σ_x^2, σ_u^2 на экстремалях функционала (82), этот путь является более громоздким, но зато он не требует допущения об обязательной линейности оптимального регулятора).

Именно формула (83) является, как увидим далее, ключом к синтезу гарантирующих регуляторов. Эти регуляторы не были синтезированы еще в 60-х годах только потому, что формула (83) недооценивалась: считалось, что минимальное значение (83) критерия качества (82) не имеет практического смысла, поскольку оно не достижимо для устойчивых систем с обратной связью, так как движение объекта управления (44), замкнутого обратной связью (53) – не устойчиво. Однако в работе [41] было открыто, что оптимальный регулятор для вырожденных спектров может быть не единственным, а значение (83)- достижимы. Неожиданность результат, полученного в [41] заключалась в том, что из формулы (50) казалось бы, неопровержимо следовало, что если функция W(jω) интеграла (50) изменится, отклонится от значения $W_{опт}$ (jω), соответствующего оптимальному регулятору, то и значение интеграла изменится и перестанет быть оптимальным.

На самом деле это рассуждение верно только для обычных спектров $S_{\varphi}(\omega)$, зависящих от ω непрерывно. Если от S_φ является вырожденной δ - функцией Дирака, например,

$S_\varphi = \delta(\omega-\beta)$, то значение интеграла (50) зависит только от значения функции $W(j\omega)$ в единственной точке $\omega=\beta$. Если ррегуляторы $u_1= -W_1(D)x$, $u_2= -W_2(D)x$ различны, но функции $W_1(j\omega)$,$W_2(j\omega)$ совпадают хотя бы в одной точке $\omega=\beta$, то и значения интеграла (50) для обеих регуляторов совпадут. А в это означает, что помимо регулятора (53), не обеспечивающего устойчивость обеспечивающий и поэтому значение (83) может быть достижимо и для устойчивых систем с обратной связью. То же самое справедливо и для спектров, являющихся суммой δ - функций, то есть для воздействия $\varphi(t)$, разлагающихся в ряд Фурье. Из этого факта вытекает любопытное следствие: пусть, например, периодические возмущающее воздействие является суммой трех гармоник с частотами ω_1 ω_2 ω_3. Для того чтобы некоторый регулятор $u= -W(D)x$, обеспечивающий устойчивость замкнутой системы, доставлял бы еще и абсолютный минимум критерию качества (82) достаточно, чтобы равенство

$$\frac{m^2+\left|W(j\omega)\right|^2}{\left|A(j\omega)+B(j\omega)\right|W(j\omega)^2}=\frac{m^2}{\left|A(j\omega)^2+m^2\right|B(j\omega)^2}$$

выполнялось всего в трех точках, при $\omega=\omega_1;\omega=\omega_2;\omega=\omega_3$. Дробно-рациональную функцию $W(j\omega)$, обеспечивающую выполнение этого равенства в трех точках (хотя и не легко) вычислить. Отсюда следует, что для периодических возмущающих воздействий или отслеживаемых сигналов можно синтезировать регулятор (обратную связь), обеспечивающую абсолютный минимум критерия качества (82). Доказательство этой возможности в общем виде, для любого числа гармоник, дано в публикации [75].

Используя формулу (83) легко найти наихудший спектр S_φ возмущающего воздействия $\varphi(t)$, для которого достигает наименьшего значения функция

$$M = \left|A(j\omega)\right|^2 + m^2\left|B(j\omega)\right|^2 \qquad (84)$$

для этого спектра интеграл (83) достигает своего максимального значения

$$\max_{\varphi}\min_{u} J = \frac{m^2}{\left|A(j\beta)\right|^2 + m^2\left|B(j\beta)\right|^2} \qquad (85)$$

Заметим, что если попытаться найти функцию $S_\varphi(\omega)$, доставляющую максимум функционалу (83) обычными методами вариационного исчисления, через уравнение Эйлера, то мы не получим правильного решения. Это связано с тем, что уравнение Эйлера, как известно, является необходимым условием максимума функционала только в том случае, если у функционала (83) максимум существует, но достигается на функции $S_\varphi = \delta(\omega-\beta)$, лежащей за пределами класса кусочно-гладких функций. Однако для сравнительно простого функционала (83) уже сам вид подынтегрального выражения сразу показывает, что максимум будет достигаться именно на функции

$S_\varphi = \delta(\omega-\beta)$.

Из формул (50) и (84) непосредственно вытекает важное следствие: для того, чтобы регулятор был гарантирующим и реализовал бы наименьшее из возможных гарантированное значение критерия качества (82), он должен удовлетворять двум условиям:

1. Он должен быть оптимальным для спектра

$S_\varphi = \delta(\omega-\beta)$, где β - значение частотыω, при котором достигает наименьшего значения функция (84).

2. Для функции (51) должно выполняться неравенство

$$F(\omega=\beta)\geq F(\omega\neq\beta) \tag{86}$$

То есть верхняя грань функции (51) должна достигаться на частоте β.

Действительно, при выполнении этих двух условий регулятор (45) обеспечит критерию качества (82) значение (85), а неравенство (86) гарантирует, что для всех других спектров критерий (82) не превысит значения (85). Таким образом, - и в этом коренное отличие излагаемой теории от подхода, основанного на методах «H^∞ управления» – на самом деле нет никакой необходимости стремиться к постоянству функции (51). Даже лучше, если она будет резко неравномерной – лишь бы ее наибольшее значение достигалось на частоте $\omega=\beta$.

Отметим, что поскольку δ - функция Дирака может быть пределом различных непрерывных функций, то гарантирующих регуляторов может быть много. Так, например, спектры:

$$S_1 = \frac{2}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}, S_2 = \frac{4}{\pi}\frac{\alpha^3}{(\alpha^2+\omega^2)^2} \quad (87,88)$$

при $\alpha \to 0$ одинаково переходят в $S_p=\delta(\omega)$. Следовательно, если для некоторого объекта управления (44) функция (84) достигает наименьшего значения при $\omega=0$, то и регулятор, оптимальный для функции (87) и регулятор, оптимальный для функции (88) в пределе, при $\alpha \to 0$, одинаково могут быть гарантирующими – лишь бы выполнялось неравенство (86).

Пример 3.

Рассмотрим объект управления

$$(D+1)x=u+\varphi(t) \quad (89)$$

с критерием качества (82) при $m^2=3$. Для возмущающего воздействия со спектром (87) оптимальный регулятор будет иметь вид:

$$u = -\left(\frac{1}{1+\alpha}D + \frac{3+2\alpha}{1+\alpha}\right)x \quad (90)$$

(что нетрудно установить, воспользовавшись алгоритмом синтеза оптимального регулятора, приведенным в п.3, а также в [45]). В пределе, при $\alpha \to 0$, он перейдет в регулятор

$$u=-(D+3)x \quad (91)$$

Для спектра (88), как можно установить на основе того же алгоритма, оптимальный регулятор имеет вид:

$$u=-\left[\frac{6+6\alpha+\alpha^2+(3+2\alpha)D+D^2}{2+2\alpha+\alpha^2-D}\right]x \qquad (92)$$

и в пределе при $\alpha\to 0$ переходит в регулятор

$$u=-\left(\frac{6+3D+D^2}{2-D}\right)x \qquad (93)$$

Таким образом, и регулятор (91) и совершенно отличный от него регулятор (93) оба являются оптимальными для спектра

$S_\varphi = \delta(\omega)$, соответствующего возмущающему воздействию в виде постоянной силы, $\varphi(t)=1$.

Замкнув объект управления (89) регулятором (91) получим следующее уравнение замкнутой системы:

$$(D+2)x=0.5\varphi, \qquad (94)$$

а, замкнув тот же объект регулятором (93) получим уравнение другой замкнутой системы:

$$(D+2)x=0.25(2-D)\varphi. \qquad (95)$$

Оба уравнения соответствуют устойчивым замкнутым системам, поэтому по обычным правилам вычислить σ_x σ_u и критерий качества (82) при $m^2=3$ для $\varphi(t)=1$. Для обоих регуляторов (91) и (93) получим одинаковые значения: σ_x = 0,25 и σ_u = 0,75. $J=3\sigma_x^2+\sigma_u^2=0.75$

Сопоставление с вычислением по формуле (83), показывает, что значение J=0,75 для объекта управления (89) и $S_{\varphi} = \delta(\omega)$ является абсолютным минимумом. Таким образом, оба регулятора – и (91) и (93) – обеспечивают устойчивость замкнутой системы и абсолютный минимум критерия качества.

Теперь остается проверить выполнение неравенства (86). Подставим в формулу (51) значения $A(j\omega)$; $B(j\omega)$; $W(j\omega)$, соответствующие объекту управления (89) и регулятору (91), получим:

$$F(\omega) = \frac{12+\omega^2}{16+4\omega^2} \qquad (96)$$

функция (96) достигает максимума при $\omega=0$, и, следовательно, регулятор (91) является гарантирующим. Такая же проверка подтверждает, что регулятор (93) также является гарантирующим, поэтому есть возможность выбора. Предпочтительное выбрать регулятора (91), поскольку он проще, а, кроме того, для регулятора (93), соответствующего спектру (82) и его пределу при $\alpha \to 0$ не выполняется критерий Ю.П.Петрова (73) и поэтому замкнутая им система будет терять устойчивость при сколь угодно малых отклонениях параметров объекта управления или регулятора от расчетных значений.

Помимо регулятора (91) и (93) для объекта управления (89) и спектра $S_{\varphi} = \delta(\omega)$ гарантирующими будут также регуляторы

$$u = -3x \qquad (97)$$

$$u = -3(D+1)x \qquad (98)$$

(о методах отыскания таких регуляторов будет сказано несколько позже) и многие другие, так что выбор гарантирующих регуляторов достаточно богат. Помимо простоты реализации при выборе регулятора следует учитывать также скорость затухания функции (51) при отклонении ее аргумента от $\omega=0$. Чем быстрее это затухание, тем меньше будет среднее значение критерия качества (82) при приходе возмущающих воздействий с различными спектрами.

Мы убеждаемся, что в отличие от подхода, используемого в теории «H^{∞} оптимизации», на самом деле правильнее стремиться не к постоянству функции (51), а наискорейшему убыванию ее – лишь бы максимум функции (51) приходился на частоту

$\omega=\beta$, соответствующую наихудшему спектру

$S_{\varphi} = \delta(\omega-\beta)$.

Рассмотрим теперь алгоритм приближенного построения гарантирующих управлений для объектов управления вида (44) с критерием качества (82).

Первый шаг – находим частоту $\omega=\beta$, при которой достигает наименьшего значения функция (84).

Второй шаг – в классе функций вида (44) и для начала - при умеренных значениях p и q – находим спектр с резко выраженным максимумом на частоте $\omega=\beta$ и близкий к нулю для всех остальных значений в полосе частот, существенных для данной системы. При этом можно пользоваться программным обеспечением, разработанным для отыскания аналитических аппроксимаций спектров в известных алгоритмах синтеза оптимальных регуляторов, оптимальных для полученных экспериментально спектров S_φ . При выборе p и q необходимо следить за выполнением критерия Ю.Петрова,(73).

Третий шаг – для найденного спектра находим оптимальный регулятор вида (45).

Четвертый шаг – для найденного регулятора вида (45) проверяем выполнение неравенства (86). Если оно не выполнено – возвращаемся ко второму шагу и выбираем спектр вида (41) с другими значениями p и q, не обязательно с резким максимумом при $\omega=\beta$, и повторяем расчет до тех пор, пока неравенство (86) не будет выполнено.

Недостаток данного алгоритма – нельзя заранее сказать, сколько циклов расчета потребуется для его завершения. Не доказано даже, что для любых объектов управления вида (44) число циклов всегда будет конечным.

Поэтому очень полезно выделить такие классы объектов управления, для которых гарантирующее управление можно синтезировать сразу и без поисков.

1.первый класс – это объекты управления вида (44), у которых полином A(D) – Гурвицев, а полином B(D) является постоянной величиной, которую без потери общности (изменением масштаба) можно привести к значению единица.

Для этого класса одним из гарантирующих будет регулятор

$$u = -\frac{m^2}{|A(j\beta)|^2} A(D)x \tag{99}$$

Регулятор (99) был найден еще в 1973 году [40] чисто вариационными методами. Сперва были построены уравнения экстремалей функционала (82). Затем, исключая функцию φ(t) из уравнений (54) определили, что абсолютный минимум функционала (82) доставляет регулятор (53) и этот минимум равен интегралу (83). Кстати, при этом не использовалось допущение о том, что регулятор, доставляющий минимум, должен отыскиваться в классе линейных регуляторов вида (45). Регулятор (53), как было показано в [40], доставляет абсолютный минимум среди любых регуляторов – и линейных, и нелинейных. Далее отыскивался спектр, доставляющий максимум интегралу (83) и было показано что этот спектр имеет вид

$S_\varphi = \delta(\omega-\beta)$ и поэтому наиболее неблагоприятным возмущающим воздействием является гармоническое колебание

$$\varphi(t) = \sqrt{2}\sin(\beta t + \theta)\,, \tag{100}$$

и в частном случае, при β=0, постоянная сила φ(t)=1.

Далее пользуясь тем, что для функции (100) оператор дифференцирования эквивалентен операции умножения на число jβ на основе второго из уравнений (54) сразу получали оптимальное управление (по возмущению) для спектра $S_\varphi = \delta(\omega-\beta)$:

$$u_{опт} = -\frac{m^2}{|A(j\beta)|^2 + m^2}\varphi(t) \qquad (101)$$

и наилучшее из гарантируемых значение критерия качества (82)

$$\left[m^2\sigma_x^2 + \sigma_u^2\right]_{гар} = \frac{m^2}{|A(j\beta)|^2 + m^2} \qquad (102)$$

(Напоминаем, что рассматривается класс объектов, в котором

B(D)=1). Далее исключая φ(t) из уравнений (44) и (101) получали оптимальную обратную связь (регулятор «по отклонению») вида (99). Затем непосредственно проверялось, что для любого другого спектра критерий (82) будет меньше, откуда и вытекало, что регулятор (99) является гарантирующим (точнее – одним из гарантирующих).

Применяя формулу (99) к примеру 3 (объект управления (84) относится к первому классу) получим уже упоминавшийся гарантирующий регулятор (98).

Однако регулятор (99), найденный в 1973 году не удобен в реализации, поскольку в него входят идеальные производные функции x(t), порядок которых равен порядку объекта управления, но не единственность оптимальных (а значит и гарантирующих) регуляторов, а тем самым и возможность синтеза удобных для реализации гарантирующих регуляторов была установлена несколько позже, в 1974 году, [41].

Работа [41] не встретила поддержки и отклика и второй важный класс объектов управления, для которых гарантирующее управление строится без поиска, был открыт только через 20 лет, в 1999 году, [43].

3. Во второй класс входят те из объектов управления вида 944), у которых функции $|A(j\omega)|^2 u |B(j\omega)|^2$ достигают наименьшего значения при ω=0. Важность этого класса определяется тем, что у очень многих (можно условно сказать – у большинства) объектов управления функции $|A(j\omega)|^2 u |B(j\omega)|^2$ достигают минимума при ω=0 и к тому же очень часто возрастают монотонно с ростом частоты (не резонансные объекты). В частности, функции $|A(j\omega)|^2 u |B(j\omega)|^2$ будут возрастать монотонно с ростом ω у всех тех объектов управления, у которых все корни полиномов A(D) и B(D) вещественны (действительно, при вещественных корнях функцию $|A(j\omega)|^2$, например, можно представить в виде произведения

$$|A(j\omega)|^2 = a_n^2(\lambda_1^2 + \omega^2)....(\lambda_n + \omega^2) \qquad (103)$$

где $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ – корни полинома A(D), каждый из сомножителей имеет минимум при ω=0 и возрастает с ростом ω монотонно, а произведение монотонно возрастающих функций также возрастает с ростом аргумента монотонно.

Для объектов с монотонно возрастающими $|A(j\omega)|^2 u |B(j\omega)|^2$ функция (84) всегда достигает наименьшего значения при $\omega=0$, наиболее неблагоприятным возмущающим воздействием является постоянная сила.

Поэтому, если полином

$$A(D) + m^2 \frac{a_0}{b_0} B(D) \qquad (104)$$

является Гурвицевым (в формуле (104) a_0 и b_0 - члены нулевой степени полиномов

$A(D) = a_0 + a_1D + \ldots + a_nD^n$ и

$B(D) = b_0 + b_1D + \ldots + b_mD^m$

То гарантирующим может быть совсем простой пропорциональный регулятор:

$$u = -\frac{m^2 b_0}{a_0} x \qquad (105)$$

давно и успешно применяющийся в технике автоматического управления (именно на основе (105) находились гарантирующие регуляторы $u= -x$ и $u = -3x$ для объектов управления (75) и (89), рассматривавшихся в примерах 2 и 3 и относящихся ко второму классу). Действительно, для регулятора (105) функция (51) принимают вид

$$F = \frac{m^2 + \dfrac{m^4 b_0^2}{a_0^2}}{\left| A(j\omega) + \dfrac{m^2 b_0}{a_0} B(j\omega) \right|^2} \qquad (106)$$

и регулятор (105) будет гарантирующим, если только знаменатель дроби (106) достигает наименьшего значения ω=0.

Таким образом, во второй класс входят объекты управления вида (44), у которых полином (104) – Гурвицев, а функция (84) и знаменатель дроби (106) достигает наименьшего значения при ω=0. Для объектов управления второго класса наихудшим возмущающим воздействием является постоянная сила, а гарантирующим является регулятор (105).

Таким образом, простой и давно применяемый в технике пропорциональный регулятор (105) является гарантирующим для весьма широкого класса объектов управления. Этим и объясняется его удивительная живучесть: его начали применять еще в 18 веке и широко применяют до настоящего времени.

Гарантированное (и одновременно – наименьшее из гарантируемых!) значение критерия качества (82) для объектов управления второго класса будет равно:

$$\left[m^2 \sigma_x^2 + \sigma_u^2 \right]_{гар} = \frac{m^2}{a_0^2 + m^2 b_0^2} \qquad (107)$$

3.третий класс объектов управления, для которых гарантирующий регулятор синтезируется без поиска –

это те объекты вида (44), у которых полином B(D) - Гурвицев, полином - тоже Гурвицев, функция $\left|B(j\omega)\right|^2$ возрастает с ростом ω монотонно, а функция

$$\left|A(j\omega)+\frac{m^2 b_0^2}{a_0}\right|^2 \tag{108}$$

достигает наименьшего значения при ω=0. Для этого класса объектов управления одним из гарантирующих будет регулятор

$$u=-\frac{m^2 b_0^2}{a_0 B(D)}x \tag{109}$$

Действительно, в этом случае замкнутая система будет описываться уравнением

$$\left[A(D)+\frac{m^2 b_0^2}{a_0}\right]x=\varphi(t) \tag{110}$$

функция (51) примет вид

$$F=\frac{m^2+\dfrac{m^4 b_0^4}{a_0^2\left|B(j\omega)\right|^2}}{\left|A(j\omega)+\dfrac{m^2 b_0^2}{a_0}\right|^2} \tag{111}$$

и будет достигать наибольшего значения при ω=0: наиболее неблагоприятным возмущающим воздействием будет постоянная сила. φ(t)=1, гарантированным (и наименьшим гарантированным) значением критерия качества (82) будет значением критерия качества (82) будет значение (107).

Пример 4.

Примером объекта управления, относящегося к третьему классу может служить следующий объект второго порядка

$$(D^2+3D+1)x=(D+1)u+\varphi(t) \qquad (112)$$

с критерием качества (82) при $m^2=1$. Для этого объекта полинома B(D) и $A(D)+\frac{m^2 b_0^2}{a_0}=D^2+3D+2$ - Гурвицевы, функция (108) принимает вид

$$\left|A(j\omega)+\frac{m^2 b_0^2}{a_0}\right|^2=\omega^4+5\omega^2+4 \qquad (113)$$

и достигает минимума при ω=0. Функция $\left|B(j\omega)\right|^2=1+\omega^2$ возрастает с ростом ω монотонно, поэтому одним из гарантирующих будет регулятор

$$u=-\frac{1}{D+1}x \qquad (114)$$

Наиболее неблагоприятным возмущающим воздействием будет постоянная сила, а гарантированным значением критерия качества (82) при $m^2=1$ будет 0,5.

Помимо рассмотренных трех классов объектов управления, для которых гарантирующий регулятор синтезируется непосредственно, без поиска среди регуляторов, оптимальных для наихудшего возмущающего воздействия, безусловно, существуют и другие. Поиск таких классов должен быть продолжен. Это – интересная тема для научной работы.

Отметим теперь, что рассмотренную нами задачу синтеза гарантирующего управления, можно рассматривать и как задачу отыскания оптимальной стратегии «игроков» в дифференциальной игре двух лиц: конструктора гарантирующего регулятора против природы. Природа «выбирает» возмущающее воздействие, которое может оказаться и наиболее неблагоприятным для данного объекта управления, а конструктор синтезирует регулятор, который обеспечит наилучшее из гарантированных значение критерия качества при любом из «выборов» природы.

Дифференциальные игры рассмотрены, например, в [4.55]. Известно, как редко удается получить решение дифференциальной игры в конечной форме, обычно удается указать только алгоритм получения решения, который можно реализовать лишь после длительных вычислений.

Изложенный нами материал позволяет добавить новые конечные решения к ранее известным. Для первого класса объектов управления наиболее неблагоприятным для конструктора «выбором» природы (его можно условно назвать «наилучшей стратегией природы») является выбор спектра $S_\varphi=\delta(\omega-\beta)$ наилучшей стратегией конструктора является выбор регулятора (99). «Цена игры» выражается формулой (102).

Для второго класса объектов управления наиболее неблагоприятный «выбор» природы – это спектр $S_\varphi=\delta(\omega)$, наилучшая стратегия конструктора – выбор регулятора (105), «цена игры» выражается формулой (107).

Полученные нами результаты допускают простое обобщение на возмущающие воздействия, не имеющие конечного среднеквадратичного значения. Разумеется, у реальных воздействий средние квадраты конечны. Однако для упрощения расчета часто используют идеализированные воздействия типа «белого шума», а, кроме того, при расчете следящих систем, как было показано в п.1, при сведении их к системам стабилизации используют расчетные возмущающие воздействия

$\varphi(t)=\varphi_1(t)-A(D)z(t)$

где $\varphi_1(t)$ – реальные возмущающее воздействие, а $z(t)$ - отслеживаемое движение (смотри в п.1 формулу (19)). Даже если $\varphi_1(t)$ и $z(t)$ имеют конечные средние квадраты, средний квадрат $\varphi(t)$ может быть бесконечным.

Подобные процессы с бесконечными значениями среднего квадрата (будем обозначать их $\varphi_\delta(t)$), можно подставить в виде
$\varphi_\delta(t)=C(D)\varphi(t)$, где $C(D)=C_kD^k+\ldots+C_0$ – полином от оператора дифференцирования $D=d/dt$. А средний квадрат $\varphi(t)$ равен единице, $\sigma_\varphi^2=1$. Поэтому матема-

тическую модель объекта управления, при возмущающих воздействиях с бесконечным среднеквадратичным значением можно записать в виде:

A(D)x=B(D)u+C(D)φ(t) (115)

Где $\sigma_\varphi^2 = 1$(обобщенное уравнение (44), которое можно считать частным случаем (115) при C(D)=1).

Заменяя во всех выкладках, приведенных в предыдущих разделах (44) на более общее уравнение (115), убедимся, что интеграл (50) запишется в форме:

$$J = m^2\sigma_x^2 + \sigma_u^2 = \int_0^\infty S_\varphi(\omega)\left|C(j\omega)\right|^2 \frac{m^2 + \left|W(j\omega)\right|^2}{\left|A(j\omega) + B(j\omega)W(j\omega)\right|^2} d\omega$$

(116)

Формула (83) для абсолютного минимума примет вид:

$$J_{абс\min} = \int_0^\infty S_\varphi(\omega) \frac{\left|C(j\omega)\right|^2 m^2}{\left|A(j\omega)\right|^2 + m^2\left|B(j\omega)\right|^2} d\omega \qquad (117)$$

и поэтому наиболее неблагоприятным спектром возмущающего воздействия будет спектр $S_\varphi=\delta(\omega-\beta)$, где β - то значение частоты ω, при котором достигает наибольшего значения функция

$$M_1 = \frac{\left|C(j\omega)\right|^2 m^2}{\left|A(j\omega)\right|^2 + m^2\left|B(j\omega)\right|^2} \qquad (118)$$

(обобщение формулы (84)).

Дальнейшие расчеты для объекта управления (115) идут так же, как и для объекта (44) но при C(D)≠1 мы можем столкнуться с тем, что наихудшего спектра не удается отыскать даже в классе обобщенных δ - функций Дирака. Приведем пример.

Пример 5.

Рассмотрим движения корабля вокруг его центра масс под действием руля. Оно будет описываться уравнением

$(a_2D^2+a_1D)y=u+\varphi(t)$ (119)

где y – курс судна корабля (то есть угол между диаметральной плоскостью и направлением на север). a_1 и a_2 – постоянные коэффициенты, причем a_1 равен моменту инерции относительно центра масс, а коэффициент a_2 отражает демпфирующее состояние воды, u – момент, создаваемый рулевой установкой, а $\varphi(t)$ - момент сил от ветра и морского волнения, сбивающий корабль с курса. В дальнейшем рассмотрим случай $\varphi=0$ – то есть движения корабля на тихой воде. Обозначим через z(t) курс, задаваемый капитаном с учетом внешней обстановки и пусть x = y-z. Задачей рулевой установки является обеспечение наихудшего отслеживания задаваемого капитаном курса, то есть, обеспечение малости функции x(t) и ее среднеквадратичного значения σ_x^2. Относительно переменной x уравнение (119), учитывая, что y = x+z, примет вид:

$(a_2D^2+a_1D)x=u-(a_2D^2+a_1D)z$ (120)

(то есть в нашем случае C(D)= - A(D) и B(D)=1). Функция (118) примет вид:

$$M_1=\frac{m^2\omega^2(a_1^2+a_2\omega^2)}{\omega^2(a_1^2+a_2\omega^2)+m^2} \qquad (121)$$

и будет монотонно возрастать с ростом частоты от $M_1=0$ до $M_1(\infty)=m^2$. Следовательно, в данном случае наихудший спектр лежит за пределами класса обобщенных δ - функций Дирака, это обстоятельство вполне соответствует физическому смыслу: чем выше частота функции $z(t)=\sin\beta t$, тем труднее ее отследить. Однако все это отнюдь не мешает решению задачи, мы просто устанавливаем, какую максимальную частоту β_{max} еще позволяют отследить ограничения на максимальной момент рулевой установки и спектр $S_\varphi=\delta(\omega-\beta_{max})$ будет наихудшим из спектров, имеющих физический смысл. В дальнейшем среди регуляторов, оптимальных для этого спектра по уже описанной методике ищем гарантирующий.

§5. Множители Лагранжа и построение разделяющей кривой.

В предыдущем разделе мы рассмотрели синтез оптимального регулятора, оптимальной обратной связи при заданном значении множителя Лагранжа m^2.

Однако, этот множитель, как правило, изначально не задан, а подлежит определению, исходя из заданного нам ограничения на ресурс управления

$$\sigma_u \le n_0 \qquad (122)$$

Покажем, каким образом это можно сделать.

Поскольку наихудшим возмущающим воздействием является гармоническое колебание

$$\varphi(t)=\sqrt{2}\sin(\beta t+\theta) \qquad (123)$$

(в частном случае, при β=0, постоянная сила, $\varphi(t)=1$), то, подставляя функцию (123) в линейные дифференциальные уравнения оптимальной замкнутой системы (54) и вычисляя средние квадраты ограниченных частных решений $x(t)$ и $u(t)$, которые будут гармоническими функциями той же частоты β, но с другой амплитудой и фазой, после несложных вычислений получим:

$$\sigma_x \frac{|A(j\beta)|}{|A(j\beta)|^2 + m^2|B(j\beta)|^2} \tag{124}$$

$$\sigma_u \frac{m^2|B(j\beta)|}{|A(j\beta)|^2 + m^2|B(j\beta)|^2} \tag{125}$$

Уравнения (124) и (125) можно рассматривать как параметрические уравнения некоторой кривой на плоскости, где по оси Ох отложено значение σ_x, а по оси Оу – значение σ_u, а m^2 играет роль параметра. Строят эту кривую следующим образом: задавшись некоторым значением m^2, по формуле (84) ищут величину частоты $\omega=\beta$, доставляющей наименьшее значение функции (84). Затем вычисляют $|A(j\beta)|$ и $|B(j\beta)|$ и соответствующими им значения σ_x и σ_u, получая тем самым одну точку кривой. Задаваясь другими значениями m^2 находят другие точки кривой и строят ее по точкам. В настоящем разделе для начала мы будем ограничиваться теми объектами управления вида (44), у которых A(D) и B(D) - Гурвицевы полиномы. Для таких объектов крайняя левая точка кривой, соответствующая $\sigma_u=0$, лежит на оси ординат $\sigma_x = 1/|A(j\beta)|, \sigma_u = 0$, а крайняя правая, соответствующая $\sigma_x=0$ лежит на оси абсцисс: $\sigma_x = 0, \sigma_u = 1/|B(j\beta)|$.

Приведем пример построения кривой (пример 5).

Рассмотрим объект управления

$$(D^2+D+1)x=(D+1)\,u + \varphi(t) \tag{126}$$

для которого функция (84) принимает вид

$$M=\omega^4-\omega^2+1+m^2(1+\omega^2) \tag{127}$$

Взяв производную $\frac{dM}{d\omega^2} = 2\omega^2 - 1 + m^2$ и приравняв ее к нулю, получаем значения β, соответствующие наименьшему значению функции (127). Вычислив β для ряда значений m^2, вычисляем по формулам (124)-(125) приведенные в таблице точки кривой:

m^2	0	0.2	0.4	0.6	0.8
β	0.707	0.632	0.548	0.448	0.316
σ_x	0	0.217	0.341	0.43	0.471
σ_u	1.155	0.878	0.725	0.629	0.556

m^2	1	4	∞
β	0	0	0
σ_x	0.5	0.8	1
σ_u	0.5	0.2	0

Сама кривая показана на рис.5.

Значение этой кривой и подобных ей кривых, удовлетворяющих уравнениям (124)-(125), заключается в том, что эти кривые являются разделяющими: ниже их лежат значения σ_x, которые заведомо нельзя гарантировать для произвольных спектров возмущающих воздействий (поскольку σ_x и σ_u в формулах (124) и (125) соответствуют абсолютному минимуму функционала (82) и вычисляются на его экстремалях). Построив разделяющие кривые (а построение их не представляет никаких затруднений)) мы получаем простое решение одной из важнейших задач проектирования: по заданному ресурсу управления σ_u определить, какая точность стабилизации или слежения σ_x достижима при этом ресурсе и какая точность заведомо не достижима для возмущающих воздействий с неизвестным или переменным спектром. Не меньшее значение имеет и обратная задача: определить, какой ресурс управления σ_u необходим для обеспечения заданной точности σ_x при неизвестном или переменном спектре возмущающих воздействий.

До появления уравнений разделяющих кривых (впервые опубликованных в 1995 году в [43]) проектировщикам приходилось проводить каждый раз целую серию громоздких расчетов оптимального управления для различных спектров возмущающих воздействий, стараясь выделить из них спектр наихудший. При этом не было никакой гарантии, что действительно удалось нащупать спектр, близкий к наихудшему и приходилось брать излишний запас, снижающий реальную точность управления.

С появлением разделяющих кривых исполнилась заветная мечта проектировщиков: они получили очень простой метод, позволяющий еще на стадии эскизного проектирования быстро и точно определить – какая точность стабилизации или слежения достижима при заданном ресурсе управления, и какой ресурс необходим для достижения заданной точности.

В этом и заключается важнейшая роль разделяющих кривых, определяемых уравнениями (124)-(125), которые, безусловно, станут важнейшим инструментом проектирования систем управления.

Кроме того, с помощью этих кривых легко определяются числовые значения множителей Лагранжа m^2: если заданным является ограничение на ресурс управления, то есть неравенство (122), то достаточно провести перпендикуляр к оси Ох через точку $\sigma_u=n_0$. точке пересечения этого перпендикуляра с разделяющей кривой соответствует искомое значение множителя Лагранжа m^2 в функционале (82), поскольку он же является параметром в уравнениях (124)-(125). Получив значение m^2 , мы можем синтезировать гарантирующий регулятор (обратная связь), основываясь на формулах (99),(105) и (109) из п.4.

Точно так же, если заданными являются требования к точности управления и они заданы неравенством

$$\sigma_x \le k_0 \tag{128}$$

то, проведя прямую, параллельную оси абсцисс через точку

$\sigma_x=k_0$, в точке пересечения ее с разделяющей кривой получаем искомое значение множителя Лагранжа m^2 , которое позволяет – основываясь на формулах (99), (105) и (109) – синтезировать гарантирующее управление.

Пример 6.

Для объекта управления (126) задан ресурс управления $\sigma_u \le 0.5$. требуется найти значение точности управления (величину σ_x), которую можно гарантировать при заданном ресурсе управления для возмущающих воздействий с любым спектром и синтезировать регулятор, реализующий гарантию.

Первым этапом решения является построение разделяющей кривой. Она была построена при решении примера 5 и показана на рис.6 (для решения примера 6 достаточно, разумеется, построить только небольшой участок разделяющей кривой вблизи значения σ_u=0,5). Рис.6 показывает, что значение σ_u =0,5 соответствует m^2=1. Функция (84) для объекта управления (126) при m^2=1 принимает вид:

$$M=\omega^4+2 \qquad (129)$$

И достигает наименьшего значения при ω=0.

Следовательно, наихудшим возмущающим воздействием является в данном случае постоянная сила, $\varphi(t)$=1. Полином (104) принимает вид

$$D^4 + 2D + 2$$

И является Гурвицевым. Функция (106) принимает вид:

$$F = \frac{2}{\omega^4 + 2} \qquad (130)$$

и ее знаменатель достигает наименьшего значения при ω=0. Следовательно, объект управления (126) при m^2=1 относится ко второму классу и гарантирующим будет регулятор (обратная связь)

$$u= -x \qquad (131)$$

Он гарантирует, что при любом возмущающем воздействии $\varphi(t)$, подчиненном только условию $\sigma_\varphi \le 1$ будет гарантировать точность управления $\sigma_x \le 0,5$.

Пример 7.

Пусть для того же объекта управления (126) задана необходимая точность управления $\sigma_x \leq 0,5$. Требуется определить множитель Лагранжа m^2, найти ресурс управления, необходимый для обеспечения заданной точности и синтезировать регулятор, гарантирующий эту точность для любого возмущающего воздействия.

Решение 3. Первый этап – построение разделяющей кривой. Поскольку она уже построена (рис.6), то сразу устанавливаем, что необходимый для гарантии заданной точности ресурс управления равен σ_u=0.5 и множитель Лагранжа m^2=1. Далее строим функции (84) и (106) – они в данном случае имеют вид (129) и (130) – так же, как и в примере 6, устанавливаем, что рассматриваемый нами объект управления при найденном значении множителя Лагранжа m^2=1 относится ко второму классу и гарантирующим является регулятор (131).

Отметим, что для ряда частных случаев разделяющая кривая превращается в прямую линию и строится совсем просто, по любым своим двум точкам: разделяющая кривая будет прямой линией во всех тех случаях, когда наименьшее значение функции (84) достигается на одном и том же значении частоты ω для всех m^2 . действительно, в этом случае можно исключить m^2 из уравнений (124)-(125) и мы получаем:

$$\sigma_x = \frac{1}{|A(j\beta)|}\left(1 - |B(j\beta)|\sigma_u\right) \qquad (132)$$

то есть, в этом случае при гарантирующем управлении σ_x зависит от σ_u линейно. В частности, разделяющая кривая будет прямой, если:

1. Полиномы A(D) и B(D) имеют только вещественные корни.
2. Полином B(D)=1, а полином A(D) - Гурвицев (для этого случая линейность зависимости σ_x от σ_u была обнаружена и доказана еще в 1973 году, в [40]).

   Разделяющие кривые позволяют разобраться еще в одной тонкости, возникающей при синтезе оптимальных и гарантирующих управлений: мы уже установили, что (при Гурицевых полиномах A(D) и B(D)) крайняя правая точка разделяющей кривой соответствует

$\sigma_x = 0, \sigma_u = {}^{1}\!\big/\!{|B(j\beta)|}$. Что будет, если заданный ресурс управления σ_u , определяемый неравенством (122), окажется больше, чем $\sigma_u = {}^{1}\!\big/\!{|B(j\beta)|}$?

При внимательном рассмотрении ответ очевиден: гарантирующим будет любое управление
u = - W(D)x, в котором W(D) - Гурвицев полином с большими коэффициентами, достаточно большими для того, чтобы характеристический полином замкнутой системы

$$A(D) + W(D)B(D)$$

Был Гурвицевым, а величина σ_x , определяемая интегралом (48), была бы достаточной для практических целей точности, близка к нулю (поскольку регулятор с очень большими коэффициентами усиления не удобен в реализации, то не стоит стремиться за счет увеличения коэффициентов полинома W(D) слишком близко приближаться к идеальному равенству σ_x=0, достижимому при W(D)$\to\infty$. При управлении u = - W(D)x с большим коэффициентами в полиноме W(D) будет $\sigma_x\approx 0$. Поскольку при ресурсе управления σ_u большем, чем $\sigma_u = 1/|B(j\beta)|$ гарантирующее управление строится очень легко, без всяких затруднений, то этот случай назвать тривиальным, а гарантирующее управление u = - W(D)x, где W(D) – полином с очень большими коэффициентами, можно назвать тривиальным гарантирующим управлением.

Однако, к анализу гарантирующего управления нужно подходить внимательно. Если неравенство (122) заменить равенством $\sigma_u=n_0$ и решать задачу синтеза формально, как изопараметрическую задачу вариационного исчисления (а это, к сожалению, иной раз делается), то можно получить ошибочный ответ.

Пример будет приведен в следующем пункте.

§6.Разделяющие кривые для неустойчивых без управления и не минимально фазовых систем.

Не устойчивыми без управления будут объекты вида

$$A(D)x=B(D)u+\varphi(t) \qquad (132)$$

В которых полином A(D) – не Гурвицев. Что касается «не минимально фазовые системы», то это возникло на заре теории автоматического управления и было связано с поведением амплитуд и фаз частотных характеристик. Сейчас это уже не актуально и мы будем называть не минимально фазовыми просто те объекты вида(132), у которых полином B(D) – не Гурвицев. Нетрудно проверить, что это определение эквивалентно ранее используемому [9.66].

Полный анализ оптимальных систем управления при заданном спектре возмущающего воздействия для неустойчивых без управления и не минимально фазовых систем был впервые выполнен в [14] и в монографии [1].

Было показано, что все объекты управления можно разделить на четыре типа:

1. Устойчивые без управления и минимально фазовые (когда A(D) и B(D) – оба Гурвицевы.)
2. Не устойчивые без управления, но минимально фазовые (A(D) – не Гурвицев, B(D) – Гурвицев).
3. Устойчивые без управления, но не минимально фазовые (A(D) – Гурвицев, B(D) – не Гурвицев).
4. Не устойчивые без управления и не минимально фазовые (A(D) и B(D) - не Гурвицевы).

   Опираясь на эту классификацию и на результаты, полученные в [14,1], мы исследуем гарантирующее управление и характер разделяющих кривых для всех четырех типов объектов управления. Первый тип уже был рассмотрен в предыдущем разделе. Прейдем к исследованию второго типа и начнем с простейшего случая – объектов управления вида (132) при B(D)=1 и не Гурвицевом полиноме A(D).

Покажем, что в этом случае не существует никаких гарантирующих управлений кроме тривиальных – то есть если в неравенстве (122) $n_0<1$, то никаким регулятором, никакой обратной связью гарантировать ничего нельзя, а при $n_0\geq1$ гарантирующее управление тривиально (то есть, реализуется регулятором u= - W(D)x, где W(D) - любой Гурвицев полином с очень большими коэффициентами: при этом $\sigma_x=0$).

Доказательство будем вести отдельно для двух возможных случаев: не Гурвицев полином A(D) имеет либо

А. Хотя бы один положительный или равный нулю корень α_1

Б. Хотя бы одну пару комплексных корней с положительной вещественной частью: $\gamma_{1,2} = \alpha \pm j\beta$

Начнем со случая А и рассмотрим возмущающее воздействие с корреляционной функцией $k_\varphi(\tau) = e^{-\alpha_1 \tau}$, то есть показатель экспоненты равен (с обратным знаком) корню α_1 полинома A(D).

В монографии [40] было доказано, что при таком возмущающем воздействии оптимальное управление имеет вид (64), где $k = \dfrac{A(\alpha)}{G(\alpha)}$ и, следовательно, при $\alpha=\alpha_1$ будет k=0. А поскольку процессы, протекающие в объекте управления (132), замкнуто регулятором (64) будут описываться уравнениями

$$G(D)x = k\varphi$$
$$G(\alpha)u=[kA(D)-G(D)]\varphi \qquad (133)$$

То при k=0 будет $\sigma_x=0$, $\sigma_u=1$. Но поскольку управление (64) оптимально, то никакое другое управление не сможет обеспечить меньшего значения σ_u.

Таким образом, при возмущающем воздействии с корреляционной функцией $k_\varphi(\tau) = e^{-\alpha_1 \tau}$ при $\sigma_u<1$ нельзя обеспечить даже устойчивости замкнутой системы, а значит при $\sigma_u<1$ ничего гарантировать нельзя. При $\sigma_u\geq 1$, как уже было ранее показано, гарантирующее управление тривиально.

Теперь проведем доказательство для случая Б и рассмотрим возмущающее воздействие со спектром (40), для которого оптимальный регулятор имеет вид (65), а –коэффициенты a и b вычисляются по формуле (66). Из этой формулы следует, что если параметры α и βспектра (40) сов падают с вещественной и мнимой частью, корня $\gamma_2 = \alpha \pm j\beta$ полинома A(D), то a=b=0. А поскольку процессы в объекте управления (132), замкнутом регулятором (40) будут описываться уравнениями

$$G(D)x = (a+bD)\varphi$$

$$G(D)u=[(a+bD)A(D)-G(D)]\varphi \qquad (134)$$

То при возмущающем воздействии со спектром (40) при α и β, соответствующих корню $\gamma_2 = \alpha \pm j\beta$ у нас будет $\sigma_x=0$, $\sigma_u=1$ и снова при $\sigma_u<1$ ничего гарантировать нельзя. Наше утверждение доказано.

Для обоих случае А и Б разделяющая кривая вырождается в единственную точку $\sigma_x=0$, $\sigma_u=1$ на оси абсцисс. Заметим, что если ресурс управления задан в форме равенства, $\sigma_u=n_0$ и $n_0>1$, то, решая формально изопараметрическую задачу вариационного исчисления и, вычисляя σ_x и σ_u по формулам (122)-(123) можно получить неверный ответ.

Пример 8.

Рассмотрим простой объект управления

$$(D-1)x=u+\varphi(t) \qquad (135)$$

не устойчивый без управления с ресурсом управления $\sigma_u=2$. Требуется найти регулятор, гарантирующий наилучшую точность управления, наименьшее возможное значение критерия качества σ_x.

Поскольку для объекта управления (135) полином A(D) имеет только вещественные корни, функция (84) для любых m^2 достигает минимума при $\omega=0$, наихудшим возмущающим воздействием следует признать $\varphi(t)=1$, гарантирующим регулятором может быть регулятор вида (105), то есть

$$u= -m^2x \qquad (136)$$

замкнутая система имеет вид

$$(D+m^2-1)x=\varphi \tag{137}$$

и при $m^2>1$ – устойчива. При $\varphi(t)=1$ имеем:

$$\sigma_x = \frac{1}{m^2-1}; \sigma_u = \frac{m^2}{m^2-1} \tag{138}$$

и заданному ресурсу управления $\sigma_u=2$ соответствует $m^2=2$, то есть регулятор u= -2x, который обеспечит $\sigma_x=1$.

Однако это значение отнюдь не является наименьшим из гарантируемых. Наименьшее из гарантируемых является значение $\sigma_x=0$ и оно может быть гарантировано, например, регулятором (136) при $m^2\to\infty$ (при этом $\sigma_u\to 1$). На практике достаточно взять регулятор u = - 1002x, который обеспечит $\sigma_x<0{,}001$. При этом будет $\sigma_u=1{,}001$ – то есть имеющийся ресурс управления не будет превышен. Этот пример подчеркивает важность сформулированного в [42] правила решения вариационных задач при наличии ограничений в форме интегральных неравенств. Сперва нужно проверить, не существует ли решения вариационной задачи без учета этого неравенства, когда оно выполняется автоматически (в примере 8 таким решением будет, например, функция W(jω) = -1002) и только если такого решения не существует, следует заменить в интегральном неравенстве знак неравенства на знак равенства и использовать обычное правило решения изопараметрических задач вариационного исчисления при наличии ограничений в форме интегральных равенств (отметим, что неравенство (122) является неравенством интегральным, поскольку σ_u выражается через интеграл (49), включающий в себя функцию W(jω), которую мы ищем).

Во многих задачах синтеза гарантирующего управления и без детального анализа ясно, что без полного использования ресурса управления, без перехода неравенства (122) в равенство, гарантирующего управления не построить, но о необходимости подобной проверки надо помнить.

Перейдем теперь к исследованию разделяющих кривых для объектов управления минимально фазовых, но не устойчивых без управления в более общем случае, когда $B(D)\neq const$, а полином $A(D)$ имеет один положительный корень α_1.

Путь к построению разделяющей кривой открывает простая формула для минимального ресурса управления, необходимого для обеспечения устойчивости замкнутой системы при возмущающем воздействии со спектром $S_\varphi(\omega)$. Эта формула была выведена автором совместно с Е.И.Веремеем в 1978 году , [14] и опубликована в [1], ее можно записать в виде:

$$\sigma_{u\,\min} = \sqrt{2\pi\alpha_1}\,\frac{S_1(\alpha_1)}{|B(D_1)|} \qquad (139)$$

В данной формуле $S_1(j\omega)$ это результат факторизации спектра возмущающего воздействия S_φ, то есть – разложение его на два комплексно-сопряженных множителя:

$$S_\varphi(\omega)=S_1(j\omega)S_1(-j\omega) \qquad (140)$$

Для вычисления σ_{umin} в выражении для $S_1(j\omega)$ вместо аргумента $j\omega$ подставляется значение положительного корня полинома $A(D)$ - корня α_1. Поскольку, как мы уже установили, при $B(D)=1$ имеет место равенство

$$\sigma_{u\,\min} = \sqrt{2\pi\alpha_1}\,S_1(\alpha_1) = 1 \qquad (141)$$

то при $B(D)\neq 1$ будет выполняться равенство

$$\sigma_{u\,\min} = \frac{1}{|B(\alpha_1)|} \qquad (142)$$

При $\sigma_u<\sigma_{umin}$ ничего гарантировать нельзя – даже устойчивости замкнутой системы. Таким образом, для рассматриваемых нами объектов управления физический смысл имеет не вся разделяющая кривая, описываемая уравнениями (124)-(125), а только та ее часть, которая лежит правее точки с абсциссой (142).

Пример 9.

Рассмотри объект управления

$$(D-1)x=(D+1)u+\varphi(t) \qquad (143)$$

для которого функция (84) имеет вид:

$$M=(1+\omega^2)+m^2(1+\omega^2) \qquad (144)$$

и при любых m^2 достигает наименьшего значения при $\omega=0$. Следовательно, наиболее неблагоприятным возмущающим воздействием будет постоянная сила, $\varphi(t)=1$ и разделяющая кривая будет прямой линией

$$\sigma_x=1-\sigma_u \qquad (145)$$

Однако не вся разделяющая кривая (145) будет иметь физический смысл. У объекта управления (143) полином A(D) имеет положительный корень α_1, и поскольку B(1)=1+1=2, то σ_{umin}=0,5. Таким образом, разделяющая кривая имеет физический смысл только для $\sigma_u \geq 0,5$. На абсциссе $\sigma_u=0.5$, соответствующей значению $m^2=1$, лежит крайняя левая точка разделяющей кривой. При $\sigma_u<0.5$ ничего гарантировать нельзя. Физический смысл имеют только те точки разделяющей кривой, которые соответствуют $m^2\geq 1$ и $\sigma_u\geq 0.5$.

Для объекта управления (143) гарантирующим может быть, например, регулятор оптимальный для спектра (36) при $\alpha\to 0$. Действительно, при $\alpha\to 0$ спектр (36) переходит в $S_\varphi=\delta(\omega)$, что соответствует возмущающему воздействию $\varphi(t)=1$, наиболее неблагоприятному для объекта (143). Оптимальный регулятор для спектра (36) и объекта управления (143) с критерием качества (82) имеет вид:

$$u = \frac{D + \frac{1}{m^2} + \alpha \frac{1+m^2}{m^2}}{D+1} x \tag{146}$$

(оптимальность регулятора (146) можно проверить, проведя расчет по алгоритму, приведенному в учебном пособии [45]). В пределе, при $\alpha \to 0$, регулятор (146) переходит в регулятор

$$u = \frac{D + \frac{1}{m^2}}{D+1} x \tag{147}$$

вычисляя функцию (51) для объекта управления (143), замкнутого регулятором (147), получаем следующее выражение для функции

$$F = \frac{m^2}{1+m^2} \left(m^2 + \frac{\frac{1}{m^2} + \omega^2}{1+\omega^2} \right) \tag{148}$$

и убеждаемся, что при $m^2 \geq 1$ она не возрастает с ростом частоты от значения, соответствующего $\omega=0$ и поэтому регулятор (147) при $m^2 \geq 1$ является гарантирующим.

На рис.7 штрих пунктиром показаны зависимости σ_x и σ_u для объекта управления (143) при возмущающих воздействиях с корреляционной функцией $k_\varphi(\tau) = e^{-\alpha_1 \tau}$ для различных α, а сплошной линией показана – разделяющая кривая.

Перейдем теперь к построению разделяющих кривых для тех объектов управления, у которых полином A(D) – Гурвицев, но B(D) – не Гурвицев (то есть, устойчивых без управления, но не минимально фазовых). Отдельного исследования для этих объектов производить не надо, поскольку уже сама симметричность объекта управления (132) по отношению к полиномам A(D) и B(D) и переменным x и u указывает на то, что разделяющие кривые будут теми же, что и у рассматриваемых ранее объектов управления, где A(D) – не Гурвицев, а B(D) - Гурвицев, но с заменой σ_x на σ_u (это означает, что произойдет их зеркальное отражение относительно прямой, расположенной под углом 45 градусов к оси абсцисс).

В частности, если полином B(D) имеет один положительный корень, то разделяющая кривая будет заканчиваться в своей крайней правой точке с ординатой

$$\sigma_{x\min} = \frac{1}{|A(\beta_1)|} \tag{149}$$

Значение $\sigma_x < \sigma_{x\min}$ нельзя гарантировать при любом ресурсе управления σ_u . Так, например, при возмущающем воздействии с корреляционной функцией $k\ \varphi = e^{-\beta_1 \tau}$ даже при оптимальном управлении нельзя обеспечить $\sigma_x < \sigma_{x\min}$ – это легко проверить, пользуясь формулами, приведенными в [45].

Пример 10.

Требуется построить разделяющую кривую для объекта управления

$$(D+1)x=(D-1)u+\varphi(t) \tag{150}$$

у которого полином B(D) имеет положительный корень $\beta_1=1$ и $A(\beta_1)=2$, поэтому $\sigma_{x\min}=0.5$. поскольку уравнение (150) получается заменой переменной x на переменную u и переменной u на переменную x, то и разделяющая кривая для объекта (150) может быть получена из разделяющей кривой для объекта (143) ее зеркальным отражением относительно прямой, проходящей под углом 45 градусом к оси абсцисс. Разделяющая кривая показана на рис.8 сплошной линией. Она кончается в точке $\sigma_x=\sigma_{xmin}=0{,}5$, соответствующей $m^2=1$. Физический смысл имеют только точки разделяющей кривой, соответствующие $m^2\leq 1$. Штрих пунктирной кривой на рис.8 показана зависимость σ_x от σ_u для объекта (150) при возмущающем воздействии с корреляционной функцией $k_\varphi = e^{-\tau}$ и при оптимальном управлении. Эта зависимость также заканчивается в точке $\sigma_x=\sigma_u=0.5$. значений $\sigma_x<0.5$ нельзя гарантировать при любом ресурсе управления. Чтобы подчеркнуть это, на рис.8 разделяющая кривая дополнена справа от своей крайней правой точки пунктирной прямой с уравнением $\sigma_x=0{,}5$.

Перейдем теперь к рассмотрению объектов управления вида (132), у которых оба полинома A(D) и B(D) – не Гурвицевы. Такие объекты являются не устойчивыми без управления и не минимально фазовыми. Они соединяют в себе все особенности ранее рассмотренных объектов: для них разделяющая кривая начинается справа от оси ординат в точке с абсциссой $\sigma_u=\sigma_{umin}$ и заканчиваются в точке с ординатой $\sigma_x=\sigma_{xmin}$. Если полином A(D) имеет один положительный корень α_1, а B(D) - один положительный корень β_1, то σ_{xmin} и σ_{umin} вычисляются по простым формулам (142) и (149). Для случая, когда A(D) или B(D) имеют комплексные корни с положительными вещественными частями ясных результатов пока нет. Это – интересная тема для научной работы.

Пример 11.

Рассмотрим объект управления

$(D^2-3D-2)x=(D-1)u+\varphi(t)$ (151)

в котором полином A(D) имеет один положительный корень $\alpha_1=3{,}5616$, а полином B(D) - один положительный корень $\beta_1=1$. Для объекта управления (151) функция (84) имеет вид

$M=\omega^4+13\omega^2+4 + m^2 (1+\omega^2)$ (152)

и достигает наименьшего значения для всех m^2 при $\omega=0$. Следовательно, наиболее неблагоприятным возмущающим воздействием будет постоянная сила $\varphi(t)=1$ со спектром $S_\varphi=\delta(\omega)$.

Разделяющая кривая описывается уравнениями

$$\sigma_x = \frac{2}{4+m^2};\sigma_u = \frac{m^2}{4+m^2} \quad (153)$$

вытекающими из формул (124)-(125). Исключая m^2 из уравнений (153), получаем, что разделяющая кривая является прямой линией и описывается формулой

$\sigma_x=0{,}5(1+\sigma_u)$ (154)

Но только часть разделяющей кривой имеет физический смысл. Крайняя левая точка разделяющая кривая вычисляется по формуле (142) для $\alpha_1=3{,}5616$. Получаем $\sigma_{umin}=0.3904$, что соответствует $m^2=2.5616$. Крайнюю правую точку вычисляем по формуле (149) для $\beta=1$. Получаем $\sigma_{xmin}=0.25$, что соответствует $m^2=4$. Разделяющая кривая (очень короткая) показана на рис.9. справа от своей крайней правой точки $\sigma_{xmin}=0.25$ она дополнена пунктирной прямой $\sigma_x=0.25$, поскольку значений $\sigma_x<0.25$ для системы (151) получить невозможно.

Объект управления(151) интересен тем, что для него при критерии качества (82) и $m^2=1$ методами

«H^{∞} оптимизации» было найдено управление u=Dx, оптимальное для спектра

$$S_{\varphi} = \frac{4}{\pi} \frac{\omega^2 + 1}{\omega^4 + 14\omega^2 + 1} \qquad (155)$$

и обеспечить для этого спектра значение $\sigma_x^2 = 0.125; \sigma_u^2 = 0.125$ и значение критерия качества (82) при m^2=1, равное 0,25. Поскольку при замыкании объекта (151) регулятором (обратной связью) u=Dx уравнения замкнутой системы принимают вид:

2 (D+1)x=φ

2 (D+1)u=Dφ (156)

Но, используя формулы (32)-(34), получаем:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{4}\int_0^\infty S_\varphi \frac{d\omega}{\omega^2+1}; \sigma_u^2 = \frac{1}{4}\int_0^\infty S_\varphi \frac{\omega^2 d\omega}{\omega^2+1} \qquad (157)$$

и, следовательно,

$$J = \sigma_x^2 + \sigma_u^2 = \frac{1}{4}\int_0^\infty S_\varphi \frac{\omega^2+1}{\omega^2+1} d\omega = 0.25 \qquad (158)$$

Таким образом, регулятор u=Dx обеспечит одно и то же значение критерия качества (82) при $m^2=1$, равное 0,25 для любого спектра возмущающего воздействия $S_p(\omega)$. Следовательно, с точки зрения теории «H^∞ оптимизации» регулятор u=Dx является идеальным; он действительно гарантирует значение критерия качества (82) при $m^2=1$, равное 0,25 для любого спектра возмущающего воздействия, и это значение является наименьшим из гарантируемых (иначе регулятор не мог бы быть оптимальным для спектра(155)). При фиксированном m^2 все правильно.

Однако нужно учитывать, что критерий (82) при фиксированном значении множителя Лагранжа m^2 является почти всегда только промежуточным критерием, полуфабрикатом. Реально нам нужно, как уже указывалось, определить – какое значение ресурса управления σ_u может гарантировать нам при любом спектре возмущающего воздействия заданную точность управления – например, значение $\sigma_x^2 = 0.125$. Подставляя в интегралы (157) спектр (155), получаем: $\sigma_x^2 = 0.125; \sigma_u^2 = 0.125$. Если считать спектр (155) «наихудшим» для объекта управления (151), то тогда при любом другом спектре для обеспечения устойчивости замкнутой системы при произвольных спектрах возмущающих воздействий требуется, как мы уже установили ресурс управления σ_{umin}=0.3904 и значит $\sigma_{u\min}^2 = 0.1524$.

Впрочем, и основания для признания спектра (155) «наихудшим» не очень сильны: они сводятся к тому, что при этом спектре для обеспечения минимума критерия (82) при $m^2=1$ требуется управление u=Dx оптимальной для этого спектра, а для других спектров то же значение критерия (82), равное 0,25 может быть обеспечено тем же регулятором u=Dx, не оптимальным для всех других спектров, кроме спектра (154). А это значит, что оптимальные регуляторы для этих спектров могут обеспечить критерию (82) при $m^2=1$ значение меньшее, чем 0,25. Этого недостаточно для признания спектра (155) наихудшим.

Приведенный пример высвечивает главный недостаток синтеза, основанного на методах «H^∞ оптимизации»: для заданного коэффициента m^2 в критерии качества (82) еще можно после громоздких вычислений найти управление, обеспечивающее постоянство (или приближенное постоянство) функции (51). Но функция постоянная при одном значении множителя Лагранжа, перестает быть постоянной при другом его значении, а это значит, что все громоздкие вычисления нужно еще многократно повторить, прежде чем будет найдено значение m^2 соответствующее заданному ресурсу управления (так, например, регулятор u=Dx для объекта управления (151) при $m^2=1$ действительно обеспечивает постоянство функции (51): при $m^2=1$ будет

$$F = \frac{1+\omega^2}{4(1+\omega^2)} = 0.25$$

для всех ω при $m^2=10$ получим функцию

$$F = \frac{10+\omega^2}{4(1+\omega^2)} \qquad (159)$$

очень далекую от F=const).

Вариационные методы решения задачи о гарантирующем управлении гораздо проще и удобнее. Разделяющие кривые, которые строят по формулам (124)-(125), позволяют предельно просто решить главную часть задачи, то есть, определить, какой ресурс управления σ_u необходим для обеспечения заданной точности управления σ_x. Несколько сложнее решается вторая задача – определить, какой ресурс достаточен для обеспечения заданной точности σ_x и построить регулятор, который эту точность реализует и гарантирует. Если рассматриваемый объект управления относится к одному из трех классов перечисленных в §4, для которых гарантирующий регулятор синтезируется по элементарным формулам (99),(105),(109), то все просто. Если нет – то необходим перебор среди регуляторов, оптимальных для спектра $S_\varphi=\delta(\omega-\beta)$ и не доказано, что этот перебор всегда заканчивается через конечное число шагов.

Следующий пример покажет, что среди не устойчивых без управления и не минимально фазовых объектов управления могут быть и такие, для которых не только отдельные участки разделяющей кривой (как в примерах № 8-11), но и вся кривая в целом может не иметь физического смысла.

Пример 12.

Рассмотрим объект управления

$$(D-1)x = (D-2)u + \varphi(t) \qquad (160)$$

у которого полиномы A(D) и B(D) имеют только вещественные корни и поэтому $\beta=0$, а наихудшим спектром будет $S_\varphi=\delta(\omega)$, а разделяющая кривая является прямой линией, соединяющей точки $\sigma_u=0$, $\sigma_x=1$ и $\sigma_x=0$, $\sigma_u=0.5$. используя формулы (142) и (149), находим, что $\sigma_{umin}=1$ и $\sigma_{xmin}=1$. Поскольку в данном случае σ_{umin} больше, чем наибольшее значение σ_u на разделяющей кривой, то имеет место особый случай – вся разделяющая кривая в целом не имеет физического смысла и ответ на вопрос о гарантирующем управлении заключается в следующем: если ресурс управления $\sigma_u<1$, то ничего гарантировать нельзя. Если $\sigma_u\geq1$, то можно гарантировать только $\sigma_x\geq1$. Значений $\sigma_x<1$ нельзя гарантировать при любом ресурсе управления (рис.10). Конечно, гарантия очень скромная. Но для не минимально фазовых систем эффективность любого управления ограничена. Причину этого удобно раскрыть как раз на примере объектов управления (150), (151) и (160), у которых полином A(D) имеет один положительный корень. Посмотрев внимательно на правые части уравнения (150), (151) и (160), мы убеждаемся, что воздействие на переменную x(t) самого управления u(t) и воздействие на его производной Du противоположны по знаку. Отсюда следует, что при возмущающем воздействии в спектре которого заметную роль играют высокие частоты, действие управления и его производной взаимно компенсируются, что не позволяет при любом σ_u получить достаточно эффективное уменьшение среднего квадрата переменной x(t) и добиться осуществления неравенства $\sigma_x<\sigma_{xmin}$.

§7. Алгоритм синтеза гарантирующих управлений.

На основе утверждений, сформулированных и доказанных в предыдущих разделах, а также в монографиях [40.42.1.45] можно коротко сформулировать следующий алгоритм построения разделяющих кривых синтеза гарантирующих управлений и гарантирующих регуляторов для объектов управления вида (132) при $\sigma_\varphi=1$:

1. Исследуя корни полинома A(D) и B(D) устанавливаем – Гурвицевы они или нет, имеют ли они одни вещественные или же имеют и комплексные корни.
2. Задавшись числом m^2, вычисляем - на какой частоте $\omega=\beta$ достигает наименьшего значения функция (84).
3. Повторяя эти вычисления для серии значений m^2, вычисляем по точкам функции (124)-(125) и строим

на плоскости с осями σ_x и σ_u зависимость σ_x от σ_u – разделяющую кривую. Для каждого заданного σ_u ниже разделяющей кривой лежат значения σ_x, которые заведомо не могут быть гарантированы для произвольного спектра возмущающих воздействий.

Для каждой заданной точности σ_x слева от разделяющей кривой лежат значения σ_u заведомо недостаточные для обеспечения заданной точности при произвольном спектре возмущающих воздействий.

Если оба полинома A(D) и B(D) имеют одни вещественные корни, то разделяющая кривая является –прямой линией и достаточно по формулам (124)-(125) вычислить любые две ее точки и провести через них прямую. Если A(D) и B(D) имеют комплексные корни, то разделяющей может быть и прямая и кривая линии.

4. Если A(D) и B(D) оба Гурвицевы, то построение разделяющей кривой на этом заканчивается. Если нет, то, пользуясь формулами(142) и (149) отсекаем те участки разделяющей кривой, которые не имеют физического смысла, то есть $\sigma_u<\sigma_{umin}$ и $\sigma_x<\sigma_{xmin}$.

Пользуясь разделяющей кривой, по заданному ресурсу управления σ_u находим значение множителя Лагранжа m^2 и в дальнейшем ведем синтез гарантирующего управления для этого значения.

5. Для синтеза регулятора (обратной связи) реализующей гарантию, следует прежде всего проверить, не относится ли рассматриваемый объект управления к одному из рассмотренных в п.4 классов, для которых синтез реализуется просто.

А). Если полином (104) – Гурвицев, а функция (84) и знаменатель дроби (106) достигают наименьшего значения при $\omega=0$, то одним из гарантирующих будет простой пропорциональный регулятор (105). Наиболее неблагоприятным возмущающим воздействием будет постоянная сила φ(t)=1.

Б). Если B(D)=const, а полином A(D) – Гурвицев, то одним из гарантирующих будет регулятор (99).

В). Если полиномы B(D) и - Гурвицевы, а функция $\left|B(j\omega)\right|^2$ возрастает монотонно и вместе с (108) достигает наименьшего значения при ω=0, то одним из гарантирующих будет регулятор (109), а наиболее неблагоприятный возмущающим воздействием будет постоянная сила φ(t)=1.

6. если рассматриваемый объект управления не относится ни к одному из этих классов, то спектр $S_\varphi=\delta(\omega-\beta)$ приближенно аппроксимируют одной из дробно-линейных функций

$$S_\varphi = \frac{a_0 + a_1\omega^2 + ... + a_p\omega^{2p}}{b_0 + b_1\omega^2 + ... + b_q\omega^{2q}} \qquad (161)$$

Начиная с малых значений p и q, синтезируют по известным алгоритмам регулятор u= -W(D)x, оптимальный для этой аналитической аппроксимации и проверяют – выполняется ли для функции (52) неравенство (86). Если нет – продолжают расчет, увеличивая p и q в формуле (161) и следя, чтобы выполнялось неравенство Ю.Петрова (73).

Использование данного алгоритма уже иллюстрировалось примерами №2,№12.

Если неравенство (86) не выполнено и максимум функции (51) достигается при $\gamma \neq \beta$, но $F(\gamma)$ не слишком превосходит F(β), то можно оставить найденный регулятор как гарантирующий критерию качества $J = m^2\sigma_x^2 + \sigma_u^2$ значение $J \le F(\gamma)$.

§8. Гарантирующее управление при учете погрешностей измерения.

В предыдущих разделах мы предполагали, что выход объекта управления, функция x(t), измеряется точно. Это допущение приемлемо, если нет, то необходимо считаться с погрешностью измерения, которая обычно является стационарной случайной функцией времени $\psi(t)$, не зависящей от x. Поэтому реально измеряемый выход системы y(t) является суммой двух функций: $y=x+\psi$, где x – не известное нам истинное значение, а ψ - погрешность измерения. В функцию $\psi(t)$ включаются также различные погрешности, помехи и наводки в цепи обратной связи. Реальный регулятор (обратная связь) будет иметь вид:

$$u= - W(D)y \qquad (162)$$

где $y=x+\psi$, а функция $\psi(t)$ является стационарным случайным процессом с известным среднеквадратичным значением σ_ψ, или с оценкой $\sigma_\psi \le \sigma_{\psi max}$, но неизвестным спектром. Такая постановка задачи связана с тем, что оценку среднеквадратичного значения погрешности получить гораздо легче, чем оценку спектра (в частности, оценка среднеквадратичной погрешности часто проводится в паспорте измерительного прибора).

При наличии заметных погрешностей измеряется чаще всего именно они определяют предельную точность систем стабилизации и слежения (ограничения на управление в этом случае не существенны). Поэтому за критерий качества следует выбрать величину σ_x, а величину B(D)u можно принять за новое управление (если B(D) – Гурвицев полином, то такая замена вполне допустима). Это позволяет систему управления общего вида (132) свести к более простой системе

$A(D)x=u+\varphi(t)$ (163)

(то есть к случаю $B(D)=const$, который затем простым изменением масштаба сводим к $B(D)=1$).

Для системы (163) рассмотрим следующие вопросы:

1.какие спектры возмущающих воздействий и погрешностей измерения наиболее неблагоприятны, наиболее опасны?

2.какие значения σ_x могут быть гарантированы для любых спектров возмущающих воздействий и погрешностей измерения?

При решении этих вопросов будем опираться на получение еще в [42] формулу для абсолютного минимума критерия σ_x^2 для объекта управления (163), замкнутого линейной обратной связью (162). Учитывая, что $y=x+\psi$, уравнение замкнутой системы можно записать в виде:

$[A(D)+W(D)]x= -W(D)\psi+\varphi$ (164)

(поскольку $W(D)y=W(D)x+W(D)\psi$). Если характеристический полином дифференциального уравнения (164) Гурвицев, то, используя формулы (33)-(34) и учитывая, что управляющие воздействия и погрешности в измерениях, как правило, взаимно не коррелированны, получим:

$$\sigma_x^2 = \int_0^\infty \frac{S_\psi |W(j\omega)|^2 + S_p}{|A(j\omega)+W(j\omega)|^2} d\omega \qquad (165)$$

Определяя методами вариационного исчисления функцию $W_э(j\omega)$, доставляющую минимум интегралу (165), получаем:

$$W_э(j\omega) = -\frac{1}{A(-j\omega)} \frac{S_\varphi}{S_\psi} \qquad (166)$$

(поскольку интеграл (165) не зависит от производной искомой функции $W(j\omega)$, то достаточно взять производную от подынтегрального выражения в интеграле (165) и приравнять ее к нулю: получим формулу (166); анализ достаточных условий подтверждает, что выражение (166) доставляет минимум функционалу (165)).

Подставив (166) в интеграл (165), найдем наименьшее возможное значение σ_x^2:

$$\sigma_{x\min} = \int_0^\infty S_\varphi S_\psi \frac{1}{\left|A(j\omega)\right|^2 S_\psi + S_\varphi} d\omega \qquad (167)$$

Теперь для решения вопроса о наихудшем спектре погрешности измерения (а точнее – о наихудшем сочетании спектров S_φ и S_ψ) достаточно решить методами вариационного исчисления задачу о поиске функции $S_\psi(\omega)$, доставляющей максимум интегралу (167) при учете условия

$$\sigma_\psi^2 = \int_0^\infty S_\psi(\omega) d\omega \qquad (168)$$

Сопоставляя, согласно правилу решения изопараметрических задач вариационного исчисления, вспомогательную функцию

$$L = \frac{S_\varphi S_\psi}{\left|A(j\omega)\right|^2 S_\psi + S_\varphi} + \lambda_0 S_\psi$$

где λ_0 – множитель Лагранжа (постоянное число), решая уравнение Эйлера $\partial L / \partial S_\psi = 0$ и определяя потом множитель Лагранжа λ_0 из условий (168), получим:

$$\frac{S_\psi}{S_\varphi} = \frac{\sigma_\psi^2}{\sigma_p^2} \frac{1}{\left|A(j\omega)\right|^2} \qquad (169)$$

где σ_p^2 - значение σ_x для объекта управления (163) при u=0, то есть при разомкнутой обратной связи (отсюда и индекс р). Подставив соотношение (169) в формулу (166), получаем следующее выражение для регулятора, оптимального при наиболее неблагоприятном сочетании спектров возмущающего воздействия и погрешности измерений:

$$u = -\frac{\sigma_p^2}{\sigma_\psi^2} A(D) y \tag{170}$$

замкнув объект управления (163) регулятором (170), убедимся, что поведение замкнутой системы описывается уравнением

$$A(D)x = \frac{\sigma_\psi^2}{\sigma_p^2 + \sigma_\psi^2}\varphi - \frac{\sigma_p^2}{\sigma_p^2 + \sigma_\psi^2} A(D)\psi \tag{171}$$

у которого характеристический полином совпадает с полиномом A(D) в формуле (163). Следовательно, если этот полином Гурвицев, то предположение, которое мы ввели при выходе формулы (165) выполнено и все дальнейшие преобразования и выкладки справедливы. Вычисляя значение σ_x^2 для замкнутой системы (171), получаем

$$\sigma_x^2 = \frac{\sigma_p^2 \sigma_\psi^2}{\sigma_p^2 + \sigma_\psi^2} \tag{172}$$

Формула (172) показывает, что при выборе обратной связи в виде (170) значение σ_x^2 возрастает при увеличении σ_p^2, для которой имеет место формула:

$$\sigma_p^2 = \int_0^\infty S_\varphi(\omega) \frac{d\omega}{\left|A(j\omega)\right|^2} \tag{173}$$

Величина σ_p^2 будет наибольшей и равной $\sigma_{p\max}^2$, тогда, когда $S_\varphi = \delta(\omega - \beta)$, где β - частота, при которой достигает наименьшего значения функция $\left|A(j\omega)\right|^2$. Имеет место простое соотношение:

$$\sigma_{p\max} = \frac{1}{\left|A(j\beta)\right|} \tag{174}$$

Учитывая, что σ_x^2 возрастает с ростом σ_p^2, можно записать:

$$\sigma_{x\text{гар}} = -\frac{\sigma_{p\max}\sigma_\psi}{\sqrt{\sigma_{p\max}^2 + \sigma_\psi^2}} \qquad (175)$$

где $\sigma_{x\text{гар}}$ – это гарантированное значение критерия σ_x, которое с помощью регулятора

$$u_{\text{гар}} = -\frac{\sigma_{p\max}^2}{\sigma_\psi^2} A(D)y \qquad (176)$$

можно гарантировать для любого, самого неблагоприятного сочетания спектров возмущающего воздействия и погрешностей измерения.

Отметим, что регулятор (176) является только одним из гарантирующих. Пользуясь изложенной ранее методикой можно искать другие гарантирующие регуляторы, более удобные в реализации, но обеспечивающие те же значения критерия качества (175).

Рассмотренную нами проблему можно рассматривать и как дифференциальную игру трех лиц, в которой первый «игрок», распоряжающийся спектром возмущающего воздействия и второй «игрок», распоряжающийся спектром погрешностей в измерении, могут вступать в коалицию против третьего «игрока» – конструктора регулятора. Получаем известную из теории игр [4] дифференциальную коалиционную игру трех лиц. Хотя в теории дифференциальных игр очень редко удается получить решения в замкнутой форме, для данной «игры» такое решение построено. Действительно, оптимальной стратегией первого «игрока» является выбор спектра $S_\psi=\delta(\omega-\beta)$. Оптимальной стратегией второго «игрока» является (на основании формул (164) и (174) выбор спектра $S_\psi = \sigma_\psi^2 \delta(\omega - \beta)$ и оптимальной стратегией третьего «игрока» (конструктора регулятора) является выбор регулятора

$$u_{гар} = -\frac{\sigma^2_{p\max}}{\sigma^2_{\psi}} A(D) y \qquad (177)$$

«Цена игры» в данном случае определяется формулой (175), определяющей гарантируемую точность управления.

На практике не менее часто встречается и несколько другая проблема гарантирующего управления, когда спектр возмущающего воздействия нам известен, и нужно определить наихудший спектр погрешности в измерениях и найти гарантирующий регулятор. В такой постановке проблема гарантирующего управления эквивалентна дифференциальной игре уже двух лиц: «игрока», выбирающего S_ψ , и конструктора регулятора. В этом случае оптимальная стратегия первого «игрока» выражается формулой (169), оптимальная стратегия конструктора определяется формулой (170), а цена игры гарантирующего точность управления – формулой (172).

Пример 13.

Задан объект управления

$(D+2)x=u+\varphi(t)$ (178)

и среднеквадратичная погрешность измерения $\sigma_\psi=0,2$. Требуется найти наихудшие спектры возмущающего воздействия и погрешности в измерениях, синтезировать гарантирующий регулятор и найти гарантированное значение σ_x.

Решение. Поскольку для объекта (178) будет $|A(j\omega)|^2 = 4+\omega^2$ и минимального значения квадрат модуля достигнет при $\omega=0$, то наихудшим спектром S_φ будет $\delta(\omega)$, наихудшим возмущающим воздействием будет постоянная сила, $\varphi(t)=1$. Следовательно, и наиболее опасной погрешностью в измерениях будет согласно формуле (165) статистическая ошибка, $\psi(t)=0.2$. Поскольку в данном случае σ_{pmax}=0.5, то гарантирующим будет определяемый по формуле (177) регулятор

u= -6.25(D+2)y (179)

и он гарантирует, согласно формуле (175), что $\sigma_x \le 0{,}186$.

Пример 14.

Для того же объекта управления (178) известен спектр возмущающего воздействия $S_\varphi = \frac{2}{\pi}\frac{2}{4+\omega^2}$ и по-прежнему среднеквадратичная погрешность измерения σ_ψ=0,2.

Требуется определить наиболее неблагоприятный спектр погрешности в измерениях S_ψ , синтезировать оптимальный регулятор и найти гарантированное значение точности управления.

Решение. В данном случае

$$\sigma_p^2 = \int_0^\infty \frac{4}{\pi}\frac{d\omega}{(1+\omega^2)^2} = \frac{1}{6} \qquad (180)$$

Наиболее неблагоприятным спектром погрешности измерения будет определяемый по формуле (169) спектр

$$S_\psi = \frac{0.96}{\pi}\frac{1}{(1+\omega^2)^2} \qquad (181)$$

Гарантирующим будет определяемый по формуле (17)) регулятор

u= -3.33(D+2)y (182)

и он гарантирует, что $\sigma_x \le 0{,}128$.

Как и следовало ожидать, если «игроки» распоряжающиеся спектрами S_φ и S_ψ могут вступать в коалицию, то «цена игры» возрастает.

Если спектр возмущающего воздействия фиксирован, равен $S_\varphi = \frac{2}{\pi}\frac{2}{4+\omega^2}$ и против конструктора регулятора один «игрок», выбирающий наиболее неблагоприятный спектр погрешностей измерения, то $\sigma_x \leq 0,128$. Если ж против конструктора регулятора играют два игрока, выбирающие спектры S_φ и S_ψ, наиболее неблагоприятные для конструктора и способные вступить в коалицию против него, то $\sigma_x \leq 0,186$.

Перейдем теперь к исследованию объектов управления вида (163), у которых A(D) - не Гурвицев полином. Такие объекты без управления не устойчивы и мы можем использовать результаты, уже полученные при исследовании подобных объектов в п.6, где мы убедились, что для подобных объектов гарантирующее управление сводится к тривиальному, к управлению $u= -W(D)x$, где W(D) - полином с большими коэффициентами и такой, что полином A(D)+W(D) – является Гурвицевым.

При учете погрешностей измерения гарантирующим будет регулятор

$$u= -W(D)y \qquad (183)$$

где W(D) - полином с теми же свойствами. Чем больше коэффициенты этого полинома, тем ближе гарантированное значение критерия качества приближается к предельному:

$$\sigma_{x\text{гар}}=\sigma_\psi \qquad (184)$$

Итак, для систем, не устойчивых без управления гарантированное значение σ_x выражается формулой (184). Ее можно рассматривать как предельный случай формулы (175). Действительно, если полином A(D) в уравнении (163) не Гурвицев, то σ_p не существует и можно считать, что $\sigma_p \to \infty$ (действительно, если у Гурвицевого полинома A(D) один из корней стремится к мнимой оси, а затем переходит в правую полуплоскость комплексного переменного, то по мере приближения корня к мнимой оси σ_p^2 возрастает, а в момент перехода корня в правую полуплоскость что $\sigma_p \to \infty$). Но при что $\sigma_p \to \infty$ формула (175) переходит в формулу (184).

На этом мы заканчиваем рассмотрение теории гарантирующих управлений. Изложенный материал показывает, что разработанный в Петербургском университете вариационный подход к синтезу гарантирующих управлений значительно проще и нагляднее, чем подход на основе теории «H^{∞} управления».

Действительно, при вариационном подходе к гарантирующему управлению предельно простое решение получает важнейшая проблема оценки гарантии, – то есть, оценки наивысшей точности стабилизации и слежения достижимой и гарантируемой при заданном ресурсе управления и любых спектрах возмущающего воздействия. Эта предельно достижимая точность легко вычисляется на основе построения разделяющей кривой, параметрические уравнения которой задаются простыми формулами (124)-(125). На основе той же разделяющей кривой легко решается вопрос о ресурсе управления σ_u , необходимом для гарантии заданной точности управления σ_x для любых спектров возмущающих воздействий.

Если объект управления относится к одному из трех, рассмотренных нами и широко распространенных на практике классов, описанных в п.4, то предельно простое решение получает и проблема синтеза управления, реализующего гарантию, проблема синтеза гарантирующего регулятора. Если объекты управления не относятся ни к одному из рассмотренных в §4 классов, то задача синтеза решается немного сложнее, но все же вполне доступно.

Не менее простое решение, выражаемое элементарной формулой (175), получает и проблема синтеза гарантирующего управления при учете погрешностей измерения, хотя с точки зрения теории игр мы имеем дело с очень трудной проблемой отыскания цены игры для дифференциальной коалиционной игры трех лиц. На основе вариационного подхода [42] эта проблема получила простое решение в виде конечной формулы.

Глава 2. Обеспечение устойчивости систем управления при вариациях параметров

§1. Параметрическая устойчивость.

Во второй главе мы переходим от изучения оптимального управления к проблемам устойчивости, параметрической устойчивости, эквивалентных преобразований и преобразований, сохраняющих корректность решаемых задач. В этой области совсем недавно были получены новые интересные результаты, причем получены они были на основе углубленного анализа задачи оптимального управления.

Поскольку параметры систем управления не могут оставаться идеально постоянными и почти всегда наблюдается их малые отклонения (вариации) от номинальных значений, то для успешной работы систем управления необходимо, чтобы они были не просто устойчивы, а сохраняли устойчивость при вариациях параметров.

Свойство системы сохранять устойчивость при вариациях параметров называют коротко параметрической устойчивостью.

Мы будем различать номинальные значения коэффициентов и параметров математической модели системы управления (будем обозначать их $a_н$) и проварьированные значения:

$$a_в=a_н(1+\varepsilon) \qquad (1)$$

где ε - числа, малые в сравнении с единицей (они могут быть и положительные и отрицательные). Числа ε, как правило, неизвестны нам и отражают неточность любого измерения параметра $a_н$, его неизбежный малый дрейф с течением времени и т.п. Величины $\varepsilon a_н$ будем называть вариациями параметров.

Принятое нами определение вариаций через равенства (1) говорит о том, что мы будем изучать влияние относительных изменений коэффициентов и параметров, а не абсолютных. Если номинальное значение какого-либо коэффициента равно нулю, то и вариация его тоже будет нулем. Нуль не варьируется. Случаи, когда коэффициент $a_н$=0 заменяется на не равную нулю величину (даже сколь угодно малую), мы рассматривать не будем. Нашему определению вариации этот случай не удовлетворяет.

В дальнейшем мы будем рассматривать почти исключительно линейные системы управления с постоянными коэффициентами (точнее – системы, в которых номинальные значения коэффициентов (значения $a_{iн}$) постоянны). Как известно, для таких систем решения для любых начальных условий либо устойчивы и устойчивы асимптотически (то есть при $t\to\infty$ будет $x_i(t)\to 0$), либо для любых начальных условий решения неустойчивы. Поэтому для линейных систем исследуют не устойчивость решений, а устойчивость системы в целом и различают системы устойчивые и системы не устойчивые. Для нелинейных систем решение может быть устойчивым для одних начальных условий и неустойчивым – для других. Поэтому для нелинейных систем исследуют устойчивость конкретного решения.

Исследование устойчивости линейных систем с постоянными коэффициентами затруднений не представляет: в математической модели системы управляющего воздействия рассматриваем как дополнительные переменные, оператор дифференцирования D=d/dt заменяем на число λ, затем вычисляем характеристический полином системы и его корни. Если все корни имеют отрицательные вещественные части, то система не устойчива.

Пример.

Объект управления

$$x_1'' + 4x_1' + x_1 = u \qquad (2)$$

замкнут регулятором

$u' + u = x_1$ (3)

Обозначив $u=x_2$, сведем систему (2)-(3) к виду:

$$\begin{cases} (D^2 + 4D + 1)x_1 = x_2 \\ (D+1)x_2 = x_1 \end{cases} \qquad (4)$$

Характеристический полином Δ системы (4) будет являться определителем полиномиальной матрицы системы (4):

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda^2 + 4\lambda + 1 & -1 \\ 1 & -(\lambda+1) \end{vmatrix} = -(\lambda^3 + 5\lambda^2 + 5\lambda) \qquad (5)$$

Характеристический полином (5) имеет нулевой корень: это говорит о том, что система управления (2)-(3) – неустойчива. Если же изменить знак в правой части уравнения регулятора (3) – то есть заменить положительную обратную связь на отрицательную, то характеристический полином примет вид

$\Delta = -(\lambda^3+5\lambda^2+5\lambda+2)$

и замкнутая система станет устойчивой.

Особенно просто проверяют устойчивость, если уравнения системы управления приведены к нормальной форме Коши:

$x' = Ax$ (6)

где x – n-мерный вектор переменных, A – квадратная, размера nxn матрица коэффициентов. В этом случае корни характеристического полинома системы (6) совпадают с собственными значениями матрицы A – то есть, совпадают с корнями определителя матрицы

$(A-\lambda E)$ (7)

где E – единичная матрица (то есть матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице, а все остальные элементы – нули). Следовательно, если система управления приведена к нормальной форме Коши, то для вычисления корней можно использовать хорошо разработанные методы вычисления собственных значений матриц и их программное обеспечение.

Поскольку в современных сложных системах управления порядок уравнений, описывающих систему, может быть велик, то уравнения системы всегда стараются привести к нормальной форме Коши, что позволяет использовать для вычисления корней характеристического полинома уже готовые стандартные программы. Приведение к нормальной форме Коши легко реализуется введением новых переменных. Так, например, если в системе (2)-(3) ввести новую переменную $x_2 = x_1'$ и обозначить $u=x_3$, то уравнения (2)-(3) могут быть записаны в нормальной форме

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 - 4x_2 + x_3 \\ x_3' = x_1 - x_3 \end{cases} \qquad (8)$$

и задача вычисления корней характеристического полинома системы (2)-(3) совпадает со стандартной задачей вычисления собственных значений матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Заметим еще, что поскольку в системах управления часто применяют регуляторы без производных, то в этих случаях вычисление корней характеристического полинома сводится к обобщенной задаче о собственных значениях матрицы А – то есть, вычислению определителей матриц

$$\left(A - \lambda\overline{E}\right) \qquad (9)$$

где $\overline{E}$ - не единичная, а квазиединичная матрица, то есть матрица, у которой на главной диагонали стоят r нулей и n-r единиц, а все остальные элементы – нули.

Так, если объект управления (2) замкнут не регулятором (3), а простым пропорциональным регулятором $u = -2x_1$, то вместо определителя системы (8) нужно будет вычислить определитель системы

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 - 4x_2 + x_3 \\ 0 = 2x_1 + 3 \end{cases} \tag{10}$$

этот определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -4-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 3 \tag{11}$$

имеет корни $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3$. Замкнутая система устойчива. В целом переход от единичной матрицы E к квазиединичной матрице $\overline{E}$ не вносит затруднений в вычисления.

Перейдем теперь к методике оценки параметрической устойчивости систем управления. Традиционная методика заключается в вычислении корней характеристического полинома замкнутой системы. Если эти корни лежат в левой полуплоскости комплексного переменного далеко от мнимой оси (то есть, их вещественные части велики по абсолютной величине и отрицательны), то традиционно делался вывод: замкнутая система параметрически устойчива и обладает хорошим запасом устойчивости при неизбежных в ходе эксплуатации вариациях параметров.

Этот вывод опирался на известную теорему о непрерывной зависимости корней полинома от его коэффициентов. Из этой теоремы следует, что если отклонения коэффициентов характеристического полинома от номинальных значений являются малыми, то и его корни изменятся мало, не смогут перейти из левой полуплоскости комплексного переменного в правую и система управления должна сохранить устойчивость. На этом соображении основывались расчеты параметрической устойчивости во всех проектно-конструкторских организациях как в России, так и за рубежом. При этом не учитывались особые случаи, о которых далее будет рассказано.

После 1978 года оживились расчеты параметрической устойчивости при не только малых, но и больших отклонениях параметров объекта управления или регулятора от номинальных значений. Расчеты велись следующим образом: сперва устанавливали, в какой мере отклонения реальных параметров системы управления влияют на коэффициенты ее характеристического полинома. Пусть, например, характеристический полином имеет степень n:

$$\Delta=a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+a_0 \qquad (12)$$

и каждый из его коэффициентов заключен в пределах

$$a_i-\Delta_{i1}\le a_i\le a_i+\Delta_{i2} \qquad (13)$$

Далее нужно установить: будут ли Гурвицевыми все полиномы вида (12), коэффициенты которых заключены в пределах (13). До 1978 года считали, что для этого нужно проверить 2^{n+1} полиномов, ибо таково число сочетаний полиномов с положительными и отрицательными вариациями каждого из его $n+1$ коэффициентов. В 1978 году в публикации[64] молодой ученик В.И.Зубова, сотрудник факультета Прикладной математики - процессов управления С.-Петербургского (тогда Ленинградского) университета В.Л.Харитонов доказал важную теорему, которая открыла путь к существенному сокращению вычислений: оказалось достаточным проверять не 2^{n+1} , а всего четыре особым образом составленных полинома.

Теорема В.Л.Харитонова получила широкую известность и заслуженное признание, однако, и она сводит вопрос о параметрической устойчивости к исследованию характеристического полинома. Всегда ли достаточно такое исследование? Неожиданно оказалось, что нет, недостаточно, поскольку обнаружилось существование систем управления с одним и тем же характеристическим полиномом, но различающихся по параметрической устойчивости.

§2. Неожиданности и парадоксы.

С неожиданностями и парадоксами при проверке параметрической устойчивости столкнулись в области синтеза оптимальных систем управления.

Еще в 1960 году А.М.Летов установил, что для линейных объектов управления, математической моделью которых является векторно-матричное уравнение:

$$x' = Ax + Bu \qquad (14)$$

(где x – n-мерный вектор, B – вектор-столбец, u – управление, скаляр) минимум квадратичного критерия качества доставляет линейный регулятор вида

$$u=kx \qquad (15)$$

где k – вектор-строка. Тот же самый регулятор доставляет минимум и среднеквадратичному критерию качества, если возмущающее воздействие на объект управления является «белым шумом». Методика выбора коэффициентов k_i в регуляторе (15), обеспечивающих устойчивость замкнутой системы и минимум критерия качества достаточно подробно изложена в [26.29.37.62]. Дополнительные расчеты показали, что регуляторы вида (15), обеспечивающие хорошие переходные процессы, обеспечивают и параметрическую устойчивость замкнутой системы. Однако на практике часть переменных $x_1;x_2….x_n$ объекта очень часто неизмерима и не может быть непосредственно использована в канале обратной связи. Вообще-то в этом нет ничего сложного: если мы хотим сохранить те же переходные –процессы в замкнутой системе, хотим сохранить то же значение критерия качества, то мы можем просто исключить не измеряемые переменные из регулятора (15) путем эквивалентных преобразований и заменить их на измеряемые переменные и их производные. Во «Введении» мы уже демонстрировали подобные преобразования на примере объекта управления (7) из «Введения» замкнутого регулятором (9). Если переменные x_2 и x_3 неизмеримы, то исключив их путем эквивалентных преобразований, придем к уравнениям (1)-(2), которые имеют те же решения (5), что и уравнения (7)-(9). В то же время система (1)-(2) в отличие от системы (7)-(9) не обладает параметрической устойчивостью – смотри «Введение».

Покажем теперь, что этот пример не единичен, что подобные примеры, когда эквивалентные системы, имеющие один и тот же характеристический полином, различаются по параметрической устойчивости, могут встречаться систематически.

Рассмотрим объект управления третьего порядка:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1 u \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2 u \\ x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3 u \end{cases} \tag{16}$$

с квадратичным критерием качества

$$J = \int_0^\infty (m^2 x_3^2 + u^2)dt \tag{17}$$

Известно, что минимум критерию (17) обеспечит регулятор вида

$$u = -k_1x_1 - k_2x_2 - k_3x_3 \tag{18}$$

в котором коэффициенты k_1, k_2, k_3 вычисляются по методике, изложенной, например, в [37.68]. замкнутая система, состоящая из объекта управления (16) и регулятора (18) параметрически устойчива. Пусть теперь x_1 и x_2 неизмеримы. Исключив x_1 и x_2 из уравнений (16) мы приведем их к виду

$$A(D)x_3=B(D)u \tag{19}$$

Где

$$A(D)=\begin{vmatrix} a_{11}-D & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-D & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-D \end{vmatrix} \tag{20}$$

и является полиномом третьей степени, а

$$B(D)=\begin{vmatrix} a_{11}-D & a_{12} & -b_1 \\ a_{21} & a_{22}-D & -b_2 \\ a_{31} & a_{32} & -b_3 \end{vmatrix} \tag{21}$$

и является полиномом второй степени. Определитель (21) отличается от определителя (20) тем, что в нем последний столбец заменен на столбец коэффициентов при управлении.

Найдем теперь регулятор, использующий только переменную x_3 (и, если надо, ее производные) и обеспечивающий – как и регулятор (18) – минимум критерия качества (17).

Используя формулы (69)-(72), приведенные в главе 1, мы устанавливаем, что оптимальный регулятор, доставляющий минимум критерию 67 имеет вид

$$W_1(D)x_3=W_2(D)u \tag{22}$$

Где полином $W_1(D)$ является полиномом второй степени, а $W_2(D)$ – первой (действительно, в нашем случае n=3, m=2, p=0, q=0;.используя формулы (69) и (70) находим степени полиномов $W_1(D)$ и $W_2(D)$).

Характеристический полином замкнутой системы (объекта управления (19) замкнут регулятором (22)) будет равен определителю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A(D) & -B(D) \\ W_1(D) & -W_2(D) \end{vmatrix} = W_1(D)B(D) - A(D)W_2(D)$$

(23)

а поскольку его степень должна быть равна трем, то это означает, что в произведениях $A(D)W_2(D)$ и $B(D)W_1(D)$ старшие члены (члены с четвертой степенью D) равны друг другу и взаимно сокращаются. Конкретной пример такого сокращения мы уже видели в системе (1)-(2) из «Введения». Полиномы A(D), B(D), $W_1(D)$ и $W_2(D)$ имели в ней значения

$A(D)=D^3+4D^2+5D+2$

$B(D)=D^2+2D+1$

$W_1(D)=D^2+4D+5$

$W_2(D)=(D+1)$

Произведения $A(D)W_2(D)$ и $B(D)W_1(D)$ являются полиномами четвертой степени, но члены, содержащей D^4, были равны; они сокращаюсь и характеристический полином становится полиномом третьей степени

$\Delta=B(D)W_1(D)-A(D)W_2(D)=D^3+5D^2+7D+3==(D+3)(D+1)^2$

(24)

имеющим три корня $D_1= -3, D_2=D_3= -1$, лежащих в левой полуплоскости далеко от мнимой оси. Следуя традиционным методам проверки параметрической устойчивости мы должны признать систему (1)-(2) из «Введения» параметрически устойчивой.

На самом деле это не так. Даже сколь угодно малые вариации параметров объекта управления или регулятора могут привести к тому, что сокращению старших членов в характеристическом полиноме не произойдет, его четвертый корень может оказаться положительным. Система (1)-(2) из «Введения» параметрической устойчивостью не обладает. Кроме того, мы теперь убедились, что не обладают параметрической устойчивостью и все системы, состоящие из объекта управления (19) и оптимального регулятора (22), обеспечивающего (как и регулятор (18)) минимуму критерия (17).

Необычность ситуации заключается в том, что система (1)-(2) из «Введения» эквивалентна системе (7)-(9), обладающей параметрической устойчивостью и эти системы переходят одна в другую после эквивалентных преобразований. Точно так же в общем случае система (16)-(18) параметрически устойчивая, эквивалентна системе (19)-(22) параметрически не устойчивой.

Таким образом, мы убедились в совершенно реальном (и не таком уже редком) существовании явления, которое долгое время казалось неожиданным и парадоксальным: эквивалентные преобразования способны изменить параметрическую устойчивость.

По-видимому, первый пример системы, изменяющей параметрическую устойчивость, привел в 1973 году в публикации [35] П.В.Надеждин, однако существо явления тогда, в 1973 году, еще совершенно не было понятно, несмотря на возникшую после публикации [35] дискуссию.

П.В.Надеждин считал, что после преобразований изменяется «грубость» системы, но это не так. Важное в теории управления, в теории колебаний и в других областях приложений понятие «грубые системы» было введено в [6]. «Грубыми» назывались там описываемые дифференциальными уравнениями системы, которые не меняют существенно своего поведения при вариациях параметров - с оговоркой, что эти вариации не меняют порядка дифференциальных уравнений, описывающих систему. Эта оговорка очень существенна. Если ее не делать, то вообще вряд ли можно найти пример «грубой системы», «грубого» объекта, – поскольку при вариациях параметров, приводящих к изменению порядка дифференциальных уравнений поведение системы обязательно меняется.

В последние годы вместо термина «грубость» стал использоваться английский термин «робастность» – от английского слова robust - то есть, «крепкий, здоровый». «Робастными» также называют системы, не изменяющие своего поведения при вариациях параметров с той же подразумеваемой оговоркой: эти вариации не должны изменять порядка дифференциальных уравнений системы. Если этой оговорки не делать, то вряд ли можно будет привести пример хотя бы одной робастной системы.

В то же время в системе (1)-(2) из «Введения» и в общем случае в системах (19)-(22) при вариациях параметров изменяется порядок. Это говорит о том, что в системах, подобных (19)-(22), происходит встреча с новым явлением, не вписывающимся в привычные схемы «грубых» и «не грубых», «робастных» и «не робастных» систем.

Суть неожиданности и парадоксальности нового явления заключается в том, что открылись новые черты в привычном, известном со средней школы и используемом на каждом шагу понятии эквивалентных преобразований. Это понятие оказалось совсем не таким простым, как кажется и нуждается в более углубленном изучении.

(Заметим, что с изменением параметрической устойчивости – и тоже не понимая еще сущности данного явления – столкнулись ранее при исследовании устойчивости по части переменных [23] ; поэтому материал настоящей главы можно рассматривать как продолжение и дальнейшее развитие исследований В.И.Зубова).

§3. Эквивалентные преобразования и эквивалентность в расширенном смысле.

Эквивалентные (их называют еще «равносильными») преобразования -–это известные еще со средней школы преобразования, не изменяющие решений поставленной задачи. Примеры эквивалентных преобразований: перенос членов уравнения из левой части в правую и обратно с изменением знака, умножение всех членов на число, не равное нулю, подстановка вместо любого члена равного ему выражения и т.п.

Когда в 70-х годах обнаружилось, что эквивалентные преобразования могут изменять параметрическую устойчивость, то это долгое время казалось неожиданным и не имеющим объяснения. Лишь позже, в монографиях [45] был поставлен вопрос: а что собственно, на самом деле означает утверждение: все решения некоторой системы – например, - простейшей системы:

$$x' + x = 0 \qquad (24)$$

параметрически устойчивы?

Ведь на самом деле это не суждение о системе (24), а суждение об ее окрестности (окрестности в пространстве коэффициентов и параметров), то есть суждение о семействе систем

$$(1+\varepsilon_1)x' + (1+\varepsilon_2)x = 0 \qquad (25)$$

где ε_1 и ε_2 малы в сравнении с единицей. Все решения системы (24) параметрически устойчивы тогда и только тогда, когда асимптотически устойчивы все решения семейства (25). Поэтому нет ничего удивительного в том, что эквивалентные преобразования, не меняющие решений самой преобразуемой системы, совсем не обязаны не менять свойств ее окрестности.

Здесь как раз и проявляется существенное различие между устойчивостью (для определенности в дальнейшем будем говорить об устойчивости линейной системы с постоянными коэффициентами) и параметрической устойчивостью: устойчивость – это свойство самой системы, параметрическая устойчивость – это свойство ее окрестности. Поэтому при проверке устойчивости можно пользоваться эквивалентными преобразованиями, при проверке параметрической устойчивости безоглядно делать это уже нельзя.

Это важное различие не замечалось так долго только потому, что оно проявляется редко. Чаще всего при эквивалентных преобразованиях параметрическая устойчивость сохраняется. Но «часто сохраняется» не означает «всегда сохраняется». Вы уже видели примеры, когда эквивалентные преобразования изменяли параметрическую устойчивость.

Для избежания ошибок в работах [51.53] было предложено ввести новое математическое понятие – понятие преобразований, эквивалентных в расширенном смысле.

Преобразования, эквивалентные в расширенном смысле, это те преобразования, которые:

-во-первых, - эквивалентны в обычном, классическом смысле, то есть не изменяют решений рассматриваемой задачи,

-во-вторых, не изменяют корректности решаемой задачи ив частном случае – не изменяют параметрической устойчивости преобразуемой системы. Мы далее покажем, что изучаемое нами явление изменения параметрической устойчивости при эквивалентных (в классическом смысле) преобразованиях уравнений являются частным случаем более общего явления – изменения корректности решаемой задачи в ходе преобразований, используемых при ее решении. О корректных и некорректных задачах будет рассказано в последующих разделах.

Рассмотренные примеры показывают, что существуют преобразования, эквивалентные в классическом смысле, но не в расширенном. В тоже время исследование корней характеристического полинома дает достоверный ответ, если характеристический полином был получен из исходных уравнений системы с помощью преобразований, эквивалентных в расширенном смысле.

§4. Гарантирует ли существование функции Ляпунова сохранение устойчивость при сколь угодно малых вариациях параметров?

Устойчивость линейных систем с постоянными коэффициентами проверяются по характеристическому полиному. Более общим методом исследования устойчивости, пригодным как для линейных, так и для нелинейных систем является второй метод Ляпунова, основанный на построении функции Ляпунова. Этот метод был разработан великим русским ученым А.М.Ляпуновым и опубликован в 1892 году в [31].

Второй метод Ляпунова подробно изложен, например, в [23] , поэтому мы напомним коротко самые основные положения. Пусть задана система уравнений в нормальной форме Коши:

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1;...x_n) \\ .... \\ x_n' = f_n(x_1;....x_n) \end{cases} \qquad (26)$$

где $f_i(x_1;\ldots x_n)$ – в общем случае нелинейные функции. Пусть система (26) имеет нулевое решение: $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$. Введем в рассмотрение функцию v переменных $x_1;x_2;\ldots x_n$, которая равна нулю, когда все x_i равны нулю и положительна при всех других значениях переменных. Примером может служить, например, функция $v = x_1^2 + ... + x_n^2$. Вычислим теперь полную производную по времени функции v на решениях системы (26) или (следуя терминологии, принятой в теории управления) вычислим производную функции v в силу системы (26). Для этого, пользуясь известной формулой для полной производной

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\ldots+\frac{\partial v}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$$

подставим вместо каждой из производных dx_i/dt ее значение из уравнений (26). Получим для производной в силу системы формулу

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\partial v}{\partial x_1}f_1(x_1;\ldots x_n)+\ldots+\frac{\partial v}{\partial x_n}f_n(x_1;\ldots x_n) \qquad (27)$$

Если функция v такова, что производная (27) для всех $x_i \neq 0$ отрицательна, то такую функцию называют функцией Ляпунова.

Если такая функция существует, то, как доказано А.М.Ляпуновым, нулевое решение системы (26) асимптотически устойчиво. Таким образом, если доказано существование функции Ляпунова, то вопрос об устойчивости решен. Найти функцию Ляпунова нелегко, поскольку общих методов отыскания ее в настоящее время не известно. Только для линейных систем доказано, что если характеристический полином системы Гурвицев, то функция Ляпунова обязательно существует в виде квадратичной формы переменных $x_1 \ldots x_n$. Поиску функции Ляпунова посвящено очень большое число исследований, поскольку отыскания такой функции решает сразу важнейший вопрос об устойчивости.

Однако фактически нас всегда интересует не просто устойчивость, а сохранение устойчивости при вариациях параметров. Поскольку вариации параметров, малый дрейф их неизбежен, то систему устойчивую, но теряющую устойчивость при сколь угодно малых вариациях параметров, по настоящему устойчивой считать нельзя.

Поэтому поставим вопрос: гарантирует ли существование функции Ляпунова сохранение устойчивости хотя бы при сколь угодно малых вариациях параметров? К сожалению, ответ на этот вопрос может быть только отрицательным. Действительно, рассмотрим систему (1)-(2) из «Введения». После приведения ее к форме Коши получим уравнения замкнутой системы (10). Поскольку характеристический полином замкнутой системы Гурвицев, то для системы (10) существует функция Ляпунова. В то же время исходная система (1)-(2) хотя и устойчива, но теряет устойчивость при сколь угодно малых вариациях некоторых параметров.

Таким образом, мы установили, что ни хорошие корни характеристического полинома, ни существование функции Ляпунова не гарантирует от потери устойчивости при сколь угодно малых вариациях параметров. Никакое исследование характеристического полинома или функции Ляпунова не может дать надежного ответа на вопрос о сохранении устойчивости, поскольку существуют системы с одним и тем же характеристическим полиномом, с одной и той же матрицей коэффициентов при записи в форме Коши, с одной и той же функцией Ляпунова, но различающиеся по свойству сохранения устойчивости при вариациях параметров. Это свойство может появляться и исчезать при эквивалентных (в классическом смысле) преобразованиях математической модели исследуемого объекта. Теории Ляпунова это не противоречит, все теоремы Ляпунова, разумеется, верны, но практическую применимость и первого и второго методов Ляпунова это недавно обнаруженное обстоятельство ограничивает. Для того чтобы теория устойчивости давала правильные ответы на важные для практики вопросы о сохранении устойчивости, она должна быть дополнена теорией преобразований, эквивалентных в расширенном смысле.

§5. Практические приложения.

Из материала, изложенного в §1-4, вытекают следующие выводы:

1. Никакое исследование характеристического полинома или матрицы коэффициентов нормальной формы Коши не может всегда, во всех случаях дать правильный ответ на вопрос о параметрической устойчивости исследуемой системы – поскольку существуют системы с одним и тем же характеристическим полиномом, одной и той же матрицей коэффициентов нормальной формы, но различающиеся по свойству параметрической устойчивости.

2. Существование у исследуемой нелинейной системы функции Ляпунова так же не гарантирует параметрической устойчивости, то есть сохранения устойчивости исследуемого решения при вариациях параметров.

3. Традиционные методы проверки параметрической устойчивости и запасов устойчивости без дополнительных расчетов, без проверки использованных преобразований на эквивалентность в расширенном

смысле не гарантируют правильного ответа, не страхуют от ошибок.

В то же время ошибки в расчетах параметрической устойчивости и расчетах запасов устойчивости гораздо опаснее, чем просто ошибка в расчетах устойчивости. Если неустойчивая система по расчету признана устойчивой, то это сразу выявится на испытаниях и неустойчивая система будет забракована. Гораздо опаснее, если система устойчива, но параметрически неустойчива, имеет малые запасы устойчивости по вариациям параметров, и поэтому может потерять устойчивость при малых отклонениях параметров от номинальных значений. Такая система вполне может успешно пройти испытания, после испытаний может быть установлена на ответственном объекте и будет неопределенно долгое время исправно работать, ничем не проявляя заложенную в ней опасность. Затем при неизбежном в ходе эксплуатации «дрейфе» параметров в совершенно непредвидимый момент времени устойчивость системы потеряется, и это сразу создаст аварийную ситуацию, которая может перерасти в аварию и даже катастрофу. Есть основания полагать, что некоторые из знаменитых катастроф последних лет имели под собой именно эту причину – ошибки в расчете параметрической устойчивости (более подробно различные аварии и катастрофы, связанные с ошибками расчета, с неверными оценками запасов устойчивости, рассмотрены в монографии [53]).

Таким образом, в отличие от устойчивости как таковой, параметрическую устойчивость трудно выявить на испытаниях. Нужно полагаться на расчет. (Иногда утверждается, что параметрическая устойчивость выявляется, если при испытаниях проводить «покачивание» всех параметров; однако возможны случаи, когда устойчивость теряется лишь при определенных сочетаниях положительных и отрицательных вариаций различных параметров; число таких сочетаний в сложных системах очень велико и «покачивание» параметров в этом случае не поможет).

Поэтому нужно с особым вниманием относиться к расчету параметрической устойчивости, к обоснованности и надежности методов расчета. Надо помнить, что надежность расчета не может быть гарантирована без проверки использованных преобразований на эквивалентность в расширенном смысле. Заметим, что в прежние годы, до широкого использования быстродействующих вычислительных машин, инженеры при анализе устойчивости использовали расчет «по реальным выходам» без преобразования уравнений к нормальной форме Коши и поэтому ошибок и связанных с ними аварий не возникало. При расчетах на программируемых вычислительных машинах желательно, разумеется, использовать стандартное программное обеспечение, которое составляется для стандартной формы записи уравнений, для нормальной формы Коши. К этой форме и стали преобразовывать уравнения систем управления, пользуясь для этого, разумеется, только эквивалентными (в классическом смысле) преобразованиями. То, что преобразования, эквивалентные в классическом, но не в расширенном смысле могут изменить параметрическую устойчивость исследуемых систем управления, было обнаружено совсем недавно [45.47.48.53].

Теперь, когда возможность опасных ошибок известна, избежать их можно различными методами:

1. Можно вычислять характеристический полином для уравнений, записанных в реально измеримых переменных на выходе объекта управления, не прибегая к преобразованию в нормальную форму.
2. Можно использовать методику проверки параметрической устойчивости, предложенную в учебном пособии [45] на стр.212-230.

3. Можно использовать несложный метод «матриц степеней», описанный в [53] на стр.74-79

4. Когда будет разработана теория преобразований, эквивалентных в расширенном смысле, можно будет просто проверить использованные преобразования на эквивалентность в расширенном смысле.

Подчеркнем, что если возможность изменения параметрической устойчивости при эквивалентных преобразованиях осознана, то избежать ошибки нетрудно. Опасна неожиданная для расчетчика встреча с преобразованием, эквивалентным в классическом смысле, но не в расширенном, опасно незнание, или нежелание учесть уж опубликованные предостережения о неполноте, недостаточности традиционных методов расчета. В наиболее авторитетном российском журнале по управлению, в «Автоматике и телемеханике» предостережения были опубликованы в 1994 году в [48], а до этого они три года обсуждались с редакцией журнала и опытными специалистами. После опубликования статьи [48] развернулась дискуссия [16.55] подтвердившая обоснованность предостережений, высказанных в [48].

Существование преобразований, эквивалентных в классическом смысле, но не в расширенном, было обнаружено так поздно потому, что свойства этих преобразований достаточно сложны и запутаны. Вернемся к объекту управления (16), замкнутому регулятором (18). Заменим оператор дифференцирования на число λ и запишем систему (16)-(18) в виде однородной линейной системы четырех алгебраических уравнений с четырьмя переменными x_1, x_2, x_3 и u:

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+b_1u=0\\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+a_{23}x_3+b_2u=0\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+(a_{33}-\lambda)x_3+b_3u=0\\ k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3+u=0\end{cases} \qquad (28)$$

Для отыскания показателей экспонент λ_1, λ_2, λ_3 образующие общее решение системы уравнений (16)-(18) достаточно составить определитель системы (28).

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & b_1\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & b_3\\ k_1 & k_2 & k_3 & 1\end{vmatrix} \qquad (29)$$

и найти его корни λ_1, λ_2, λ_3 . задача вычисления этих корней методом разложения определителя по минорам последней строки – корректна. Корни не меняются существенно при вариациях коэффициентов.

Если переменные x_1 и x_2 неизмеримы, то их надо исключить из системы (28) путем эквивалентных преобразований. Простейший способ исключения – исключение x_1 из первого уравнения системы (28) путем умножения первого из уравнений (28) на $-a_{21}$, второго – на a_{11}-λ и сложения и потом повторения аналогичных операций со вторым и третьим из уравнений (28), потом – с третьим и четвертым. После исключения x_1 и x_2 приходим относительно x_3 и управления u к уравнениями

$A(D)x_3=B(D)u$

$M(D)x_3=N(D)u$ (30)

Первое из уравнений (30) полностью совпадает с ранее полученным нами уравнением (19), где полиномы A(D) и

B(D) равны определителям (20) и (21), а второе из уравнений (30) может совпадать с ранее полученным нами другим способом уравнением (22), но может и не совпадать. В общем случае при $a_{31}\neq 0$ совпадения как раз нет. При $a_{31}\neq 0$ полином M(D) оказывается полиномом третьей степени, полином N(D) – второй степени. Характеристический полином системы (30) имеет вид

$$\Delta=B(D)M(D)-A(D)N(D) \qquad (31)$$

и является полиномом четвертой степени, поскольку члены с четвертой степенью D в произведениях B(D)M(D) и A(D)N(D) не равны друг другу и не сокращаются. Это говорит о том, что полином (31) имеет лишний корень λ_4, не являющийся собственным значением для системы (28). Только после исключения этого лишнего корня мы получим истинные собственные значения λ_1, λ_2, λ_3, причем при $a_{31}\neq 0$ задача вычисления собственных значений для системы (28) путем последовательного исключения переменных – корректна, при вариациях параметров системы (30) корни в общем случае, при $a_{31}\neq 0$ меняются мало.

Пример: система

$$\begin{cases} x_1' = x_2 + x_3 + u \\ x_2' = x_1 + x_3 + u \\ x_3' = x_1 + x_2 + 2u \\ u = -x_1 - x_2 - x_3 \end{cases} \qquad (32)$$

имеет характеристический полином

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2) = -(\lambda+1)^2(\lambda+2) \qquad (33)$$

с корнями λ_1= -2; λ_2=λ_3= -1.

Вычисляя полиномы, входящие в формулы (30), получаем:

$A(\lambda)= -\lambda^3+3\lambda+2$

$B(\lambda)= 2\lambda^2+2\lambda$

$M(\lambda)=\lambda^2+2\lambda +1$

$N(\lambda)= -(\lambda+1)$

Вычисляя полином (31), получаем

$$\Delta=\lambda^4+5\lambda^3+6\lambda^2+7\lambda+2=(\lambda+2)(\lambda+1)^3 \qquad (34)$$

и мы убеждаемся, что один корень λ_4= - 1 является лишним. После сокращения на множитель λ+1 получаем истинные корни λ_1, λ_2, λ_3.

При исследовании системы управления использование исключение измеряемых переменных описанным нами путем неудобно, поскольку мы приходим к уравнению объекта управления и регулятора (30), которые, хотя и записаны только в измеряемых переменных, но в замкнутой системе, построенной на основе математической модели(30),переходные процессы не будут совпадать с переходными процессами исходной системы (16)-(18) за счет появления лишнего корня в характеристическом полиноме. Поэтому в [35] был предложен другой метод исключений переменных: левую и правую части первого из уравнений (16) домножают на r_1+r_2D, второго - на s_1+s_2D, третьего – на t_1+t_2D, где все $r_1,r_2,\ldots t_2$ – подлежащие определению коэффициенты. После этого все три уравнения складываются, и к сумме прибавляется уравнение (18). В результате получалась зависимость между управлением, переменными x_1, x_2, x_3 и их производными, и в этой зависимости неизвестные пока коэффициенты $r_1,\ldots t_2$ выбирались так, чтобы обращались в нуль коэффициенты перед x_1 и x_1', перед x_2 и x_2'. Условия обращения в нуль этих коэффициентов давали систему уравнений, необходимых для определения $r_1,\ldots.t_2$. окончательно получались уравнения регулятора в виде:

$$W_1(D)x_3=W_2(D)u \qquad (35)$$

Где полиномы $W_1(D)$ и $W_2(D)$ совпадали с полиномами $W_1(D)$ и $W_2(D)$ в формуле (22), которые получались на основе методики синтеза оптимального регулятора, приведенной в главе 1.

Регулятор (35) обеспечивал в замкнутой системе те же переходные процессы, что и регулятор (18), но параметрической устойчивости (как мы уже убедились) он не обеспечивал.

Интересно отметить, что если в объекте управления (16) коэффициент a_{31} обращался в нуль, то оба метода исключения переменных приводили к одному и тому же регулятору (35), который обеспечивал те же самые переходные процессы, что и регулятор (18), но не обеспечивал параметрической устойчивости.

Иногда встречается редкий случай, когда в полиномах M(D) и N(D) в формулах (30) присутствует общий множитель, который можно сократить. Именно этот случай имеет место в системе (32): полиномы M(λ) и N(λ) можно сократить на λ+1 и мы получаем для системы (32) следующие уравнения объекта управления и регулятора, использующего только переменную x_3:

$$(D^3-3D-2)x_3=(2D^2+2D)u \qquad (36)$$

$$u=(D+1)x_3 \qquad (37)$$

Регулятор (37) обеспечивает в замкнутой системе те же самые переходные процессы, что и регулятор

$$u= -x_1-x_2-x_3,$$

но система (36)-(37) на этот раз параметрически устойчива.

Именно эта сложность и запутанность соотношений между преобразованиями, эквивалентными в классическом смысле и в расширенном объясняет столь позднее открытие различия между ними: первый исследователь использовал один способ исключения переменных и приходил к системе параметрически устойчивой, второй исследователь, используя другой метод исключения не измеряемых переменных, получал для тех же исходных уравнений систему параметрически устойчивую и ставил под сомнение результаты первого исследователя. Третий брал систему того же вида, но с другими значениями коэффициентов и снова получал параметрическую неустойчивость. Все это создало путаницу, которая была распутана совсем недавно [47.48.53].

Зато теперь есть возможность сформулировать четкие правила (они приведены в начале данного параграфа), гарантирующие надежность и достоверность расчетов параметрической устойчивости.

Продолжение исследований в этом направлении позволило получить гораздо более широкие результаты, касающиеся общей проблемы корректности задач прикладной математики. Об этом – в следующих разделах.

§6. Общая проблема изменения корректности при эквивалентных преобразованиях.

Изложенный в предыдущих разделах материал об изменениях параметрической устойчивости был рассмотрен на примерах, взятых из теории систем управления. Но значение его гораздо шире. Изменение свойства сохранения устойчивости при эквивалентных преобразованиях может происходить в дифференциальных уравнениях, встречающихся в самых различных областях приложений – в технике, физике, биологии, в банковском и страховом деле. Везде неучет различия между преобразованиями, эквивалентными в классическом смысле и в расширенном может привести к серьезным ошибкам.

Но дело не ограничивается дифференциальными уравнениями. Уточнение понятия эквивалентных преобразований играет важную роль в общей проблеме корректности математических задач, математических моделей.

Как известно, параметры и коэффициенты математических моделей реальных объектов чаще всего только приближенно отражают реальность. Малые отклонения расчетных параметров от действительных, вариации параметров, малый дрейф их почти всегда неизбежны. Поэтому в математике давно различают задачи корректные (или корректно поставленные), в которых малым изменениям параметров соответствуют малые изменения решений и задачи не корректные, где малым (и даже сколь угодно малым) изменениям параметров, а также начальных или граничных условий и т.п. могут соответствовать большие изменения решений. Практический смысл имеют чаще всего только решения корректных задач. Хотя некорректные задачи не являются абсолютно неразрешимыми, но они требуют совершенно особых (более сложных) методов решения (смотри, например, [61]), поэтому ошибки в различении корректных и некорректных задач очень опасны.

Простейший (хотя и весьма громоздкий) метод проверки корректности – это неоднократное повторение решения при немного измененных значениях коэффициентов и параметров. Если решения изменяются мало, то задача корректна.

Задача проверки устойчивости для систем, не обладающих параметрической устойчивостью является одним из примеров некорректных задач. Практического смысла такая проверка не имеет.

До последнего времени считалось, что корректные и некорректные задачи жестко отделены друг от друга. Недавно выяснилось, что на самом деле все сложней, что корректность может меняться в ходе решения задачи, при совершенно эквивалентных (в классическом смысле) преобразованиях уравнениях, а это, разумеется, затрудняет решение. Примеры, приведенные в §1-5, показали, что корректность может меняться при преобразованиях систем дифференциальных уравнений. Покажем теперь, что те же явления могут встречаться и при решениях простых алгебраических систем.

Пример.

Рассмотри следующую систему четырех однородных линейных уравнений с параметром λ:

$$\begin{cases} (2+\lambda)x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - \lambda x_2 = 0 \\ x_2 + (2+\lambda)x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad (38)$$

и поставим задачу – найти значения параметра λ, при которых система имеет ненулевые решения. Эти значения совпадают с корнями определителя системы (38):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2+\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2+\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Разлагая определитель, например, по минорам последнего столбца, нетрудно проверить, что эта задача корректна. Решениями являются числа $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ и при малых изменениях любых коэффициентов системы собственные значения изменяются мало.

Одним из возможных методов решения поставленных задач является последовательное исключение переменных. Если исключить x_1, x_2, x_3, то относительно x_4 придем к уравнению

$$M(\lambda)x_4 = 0 \qquad (39)$$

Где полином $M(\lambda)$ – полином третьей степени. Его корни будут искомыми значениями λ. Для системы (38) будет

$$M(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 7\lambda + 3 \qquad (40)$$

С корнями $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ – теми же самыми, что были найдены ранее.

Рассмотрим теперь более внимательно промежуточный этап, рассмотрим систему уравнений, получившуюся после исключения из системы (38) переменных x_1 и x_2:

$$\begin{cases}(\lambda^3+\lambda^2+5\lambda+2)x_3-(\lambda^2+2\lambda+1)x_4=0\\(\lambda^2+4\lambda+5)x_3-(\lambda+1)x_4=0\end{cases}\qquad(41)$$

Исключив из системы (41) x_3, получим

$$[(\lambda^2+4\lambda+5)(\lambda^2+2\lambda+1)-(\lambda^3+4\lambda^2+5\lambda+2)(\lambda+1)]x_4=0 \qquad (42)$$

Приведя подобные члены, мы получим уравнение (39) с тремя корнями $\lambda_1=-3$, $\lambda_2=\lambda_3=-1$, поскольку члены, содержащие λ^4, взаимно сократятся. Это говорит о том, что система (41) в отношении задачи о вычислении собственных значений эквивалентна (в классическом смысле) системе (38). Однако эквивалентности в расширенном смысле нет и задача вычисления значений λ, доставляющих ненулевые решения для системы (41) некорректна. Пока коэффициенты являются целыми числами все, разумеется, идет хорошо. Но при сколь угодно малых вариациях некоторых коэффициентов системы (41), вариация порядка ε, или при сколь угодно малых ошибках округления, тоже порядка ε, приводящих к вариациям коэффициентов, сокращения членов, содержащих λ^4 может не произойти, полином $M(\lambda)$ в уравнении (39) станет полиномом четвертой степени и помимо трех корней, отличающихся от ранее найденных $\lambda_1=-3$, $\lambda_2=\lambda_3=-1$ на малые величины, появляется большой четвертый корень λ_4, порядка $1/\varepsilon$. При $\varepsilon=0$ четвертый корень исчезает.

Системы (38) и (41) являются примерами систем, эквивалентных между собой в классическом смысле и не эквивалентных - в расширенном, и это может стать источником ошибок в вычислениях: даже при сколь угодно малых погрешностях округления мы можем получать не три, а четыре корня. Подчеркнем, что мы имеем здесь дело с новым явлением, несовпадением с хорошо известным ранее случаем не полностью эквивалентных преобразований уравнений, преобразований, добавляющих новые решения, новые корни, не зависящие от вариаций коэффициентов.

Нет, система (41) полностью эквивалентна системе (38), при ε=0 их решения тождественны, но корректность различна, а это является новым источником возможных ошибок. Разумеется, если причина возможных ошибок известна, то избежать их легко; но причину изменения корректности при некоторых преобразованиях нужно хорошо знать. Поэтому весьма полезным является определение, введенное нами ранее в п.3: преобразования, эквивалентные в расширенном смысле – это те, которые, во-первых, эквивалентны в классическом смысле, а во-вторых, – не изменяют корректности решаемой задачи.

Отметим теперь, что системы, подобные системе (38), не являются редким исключением. Действительно, рассмотрим системы линейных однородных уравнений вида:

$$(A-\lambda\overline{E})x=0 \qquad (43)$$

где A – квадратная размера nxn матрица, x – n-мерный вектор, $\overline{E}$ - квазиединичная матрица, то есть матрица, у которой не главной диагонали стоят сперва n-r единиц, затем r нулей, все остальные элементы – нули; λ - параметр и нужно найти значения λ, при которых система (43) имеет ненулевые решения. Эта задача является обобщением широко известной и важной проблемы нахождения собственных чисел матрицы A и переходит в нее, когда r=0. Квазиединичная матрица $\overline{E}$ переходит при r=0 в обычную единичную матрицу. Системы линейных однородных уравнений вида (43) встречаются, как мы уже видели, при решении систем линейных дифференциальных уравнений и систем управления, а также – при вычислении частот малых колебаний механических и электрических систем и в ряде других задач.

Одним из возможных методов решения поставленной нами обобщенной проблемы собственных чисел матриц является последовательное исключение переменных из системы (43). Исключив x_1, затем x_2 и x_3 и т.п., относительно последнего переменного x_n, придем к уравнению

$$M(\lambda)x_n=0 \quad (44)$$

Где $M(\lambda)$ – полином степени n-r, корни которого и будут решениями.

Однако уже при n=4 и r=1 при исключении x_1 и x_2 мы придем на этом пути при $a_{31}=0$ к системе двух уравнений, которая будет эквивалентна исходной в классическом смысле, но не в расширенном. Таким образом, системы, подобные системам (38) не являются редким исключением, а будут встречаться систематически. Еще более часто встречаются они для n>4 и r>1 – многочисленные примеры приведены в [53].

Отметим, что при r=0 (то есть в традиционной и хорошо изученной постановке задачи о собственных значениях) при последовательном исключении переменных нам не встретится систем, эквивалентных исходной в классическом смысле, но не в расширенном. Это и объясняет, почему ранее, в эпоху ручного счета, преобразования, не эквивалентные в расширенном смысле не были открыты: при ручном счете гораздо удобнее сперва исключить переменные, входящие только в уравнения, не содержащие параметра λ. После их исключения остается классическая, хорошо известная проблема собственных значений, соответствующая r=0, а в дальнейшем исключение переменных к неприятностям уже не приводит. В то же время для вычислительной машины важнее всего унификация. Она будет в системе (43) исключать переменные в порядке их индексов, столкнется при этом с системой, неэквивалентной исходной в расширенном смысле и может выдать ошибочный результат.

Вообще нужно иметь в виду, что переход к машинным вычислениям требует дополнительной проверки и ревизии традиционного математического аппарата. Алгоритм и программы, закладываемые в машину, должны быть безупречны, поскольку машина интуицией пока не обладает и неточностей алгоритма не исправит. Неточности, не замечаемые при ручном счете, могут стать источником ошибок при вычислениях на ЭВМ. Поэтому уточнение математических методов и подходов будет, безусловно, полезно. С этих позиций следует рассматривать и предложения, высказанные в [49.50.53] об уточнении понятия эквивалентных преобразований, о различении преобразований, эквивалентных в классическом смысле и в расширенном.

Следует отметить, что теория преобразований, эквивалентных в расширенном смысле, еще далека от завершения. Здесь большое поле для интересной исследовательской работы.

Обнаружение примеров изменения корректности при эквивалентных преобразованиях, используемых в ходе решения задачи, заставляет еще раз обратить внимание на обеспечение достоверности результатов расчета.

После того, как в 1902 году выдающийся французский математик Жак Адамар открыл существование целого класса некорректных задач, требующих особого подхода, особых методов решения, постепенно было признано, что перед решением любой прикладной задачи проверить – корректна задача или нет. если некорректную задачу решать как корректную, то ошибка почти неизбежна. Проверку корректности перед решением не всегда и не все производят, но необходимости такой проверки, по крайней мере, признана.

Обнаружение задач, способных менять корректность в ходе решения, осложняет подобную проверку: надо либо проверять корректность на каждом этапе, после каждого преобразования математической модели, либо – что, разумеется, проще – проверять произведенные преобразования на эквивалентность в расширенном смысле.

В работе [51] было предложено ввести в рассмотрение как отдельный класс задачи, способные изменять свою корректность при преобразованиях, используемых в ходе решения. Было предложено рассматривать эти задачи как особый, третий класс задач математики, физики и техники наряду с издавна известных классом корректных задач и известным с 1902 года классом задач некорректных.

В предыдущих изложениях мы уже привели примеры задач, относящихся к третьему классу. Число таких задач со временем, безусловно, будет расти, хотя вполне возможно, что в конечном счете их окажется много меньше, чем принадлежащих к первым двум классам. Однако для задач третьего класса особенно трудно гарантировать достоверность результатов расчета и поэтому третий класс заслуживает самого внимательного изучения – тем более что исследование задач этого класса только еще началось.

С задачами, относящимися к третьему классу, мы сталкиваемся и в известной важной проблеме непрерывной зависимости решений системы дифференциальных уравнений от параметров.

§7. Проблема непрерывной зависимости решений систем дифференциальных уравнений от параметров.

Поскольку, как уже неоднократно указывалось, любые коэффициенты и параметры математических моделей реальных систем и устройств почти всегда известны лишь с ограниченной точностью, то важнейшей теоремой, лежащей в основе всех практических приложений теории дифференциальных уравнений является теорема о непрерывной зависимости решений от параметров.

Наличие непрерывной зависимости является необходимым (хотя и недостаточным) условием того, что неизбежные на практике малые отклонения коэффициентов и параметров от номинальных значений не приведут к большим ошибкам в решениях.

Поэтому теорема о непрерывной зависимости решений систем дифференциальных уравнений от параметров приводится и доказывается во всех серьезных учебниках и курсах дифференциальных уравнений. Однако доказательство приводятся для систем дифференциальных уравнений, заданных в нормальной форме Коши. Поскольку другие формы записи системы дифференциальных уравнений почти всегда могут быть путем эквивалентных преобразований приведены к нормальной форме, то часто молчаливо допускалось, что теорема справедлива для любых систем дифференциальных уравнений.

На самом деле это не так. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с параметром m:

$$(D^3+4D^2+5D+2)x_1=(mD^2+2D+1)x_2$$

$$(D^2+4D+5)x_1=(D=1)x_2 \qquad (45)$$

которая является математической моделью системы управления электропроводом постоянного тока.

При m=1.0001 система (45) имеет общее решение (с точностью до первого знака):

$$x_1(t)=c_1e^{-3t}+(c_2t+c_3)e^{-t}+c_4e^{-1000t} \qquad (46)$$

при m=1 будет

$$x_1(t)=c_1e^{-3t}+(c_2t+c_3)e^{-t} \qquad (47)$$

при m=0.999 имеем

$$x_1(t)=c_1e^{-3t}+(c_2t+c_3)e^{-t}+c_4e^{1000t} \qquad (48)$$

Формулы (46)-(48) сразу показывают, что вблизи критического значения параметра m=1 малые изменения параметра приводят к очень большим изменениям решений даже на небольшом временном интервале $0 \leq t \leq T$. В точке m=1 имеет место разрыв непрерывности в зависимости решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$ от параметра m. Поэтому решение системы (45) вблизи значений коэффициента при D^2x_2 в первом уравнении, близких к единице, смысла не имеет: неизбежно малые отклонения реальных значений коэффициентов системы от номинальных приведут к большим ошибкам в решении. Ошибки могут быть велики даже для малых значений времени t, а с ростом t стремительно возрастает.

Для систем, не обладающих свойством непрерывной зависимости решений от параметров задача вычисления решения может быть некорректной. Если же мы будем решать систему путем преобразования ее к нормальной форме Коши, то может произойти встреча с задачей, относящейся к третьему классу, задачей, меняющей корректность в ходе решения.

Теперь заметим, что первичными, исходными уравнениями в математических моделях реальных систем чаще всего оказываются системы, состоящие из уравнений различных порядков, а совсем не нормальная форма Коши. Так, например, уравнения различных механических систем составляются, как известно, чаще всего на основе системы уравнений Лагранжа второго рода, которые являются системой, состоящей из уравнений второго порядка.

Для всех подобных систем непрерывность зависимости решений от коэффициентов и параметров надо проверять и проверять до приведения системы к нормальной форме Коши.

Из примера с системой (45) и из материала, изложенного в §1-6 следует, что в подобных системах непрерывная зависимость решений от параметров будет иметь место только в тех случаях, когда преобразование систем в нормальную форму Коши (для которой непрерывная зависимость доказана) является преобразованием, эквивалентным не только в классическом смысле, но и в расширенном.

Таким образом, знание свойств преобразования, эквивалентных в расширенном смысле, важно не только для тех, кто занимается расчетами систем управления, но и для всех тех, кто использует дифференциальные уравнения. Без учета этих свойств нельзя гарантировать достоверность результатов расчета.

Дополнение

Связь между вариациями коэффициентов и параметров в исходной и преобразованных системах.

При изучении математических моделей технических устройств и природных процессов нас интересует зависимость характеристик моделей от параметров - то есть различных элементов того или иного устройства или процесса. Изучая, например, электрический привод, мы рассматриваем влияние малых колебаний температуры на момент инерции вращающихся масс, на коэффициент трения и другие параметры приводы. В свою очередь эти изменения параметров, безусловно, влияют на различные характеристики привода. В уравнениях математической модели мы имеем дело с коэффициентами уравнений, которые являются некоторыми функциями от параметров реального объекта. Рассмотрим поэтому связь между малыми изменениями параметров и малыми изменениями коэффициентов математической модели.

Пусть некоторый коэффициент математической модели α_i является функцией от некоторого параметра α - то есть

$$\alpha_i=f_1(\alpha) \qquad (49)$$

Продифференцировав равенство (49), получаем

$$d\alpha_i = \frac{df_1(\alpha)}{d\alpha} d\alpha \qquad (50)$$

Если при рассматриваемом нами значении параметра $\alpha=\alpha_0$ производная $\frac{df_1(\alpha)}{d\alpha}$ существует, то из равенства (50) сразу вытекает, что если изменение параметра $d\alpha$ является сколь угодно малой величиной, то и изменение коэффициента α_i в уравнениях математической модели тоже является сколь угодно малой величиной. Случай не дифференцируемости функции $f_1(\alpha)$, отсутствия производной $\frac{df_1}{d\alpha}$, мы рассмотрим отдельно.

Для всех дифференцируемых в исследуемой нами точке $\alpha=\alpha_0$ функций $f(\alpha)$ из формулы (50) можно сразу сделать общий вывод: для того, чтобы исследовать влияние сколь угодно малых изменений любого параметра на поведение реального устройства или процесса достаточно исследовать поведение математической модели при сколь угодно малых изменениях всех ее коэффициентов. Если при сколь угодно малых изменениях любых коэффициентов модели изменение интересующих нас характеристик сколь угодно мало, то оно останется сколь угодно малым и при малых изменениях любых параметров реального устройства или процесса. Задачи расчета в данном случае корректны.

Теперь рассмотрим изменения коэффициентов и параметров при преобразованиях уравнений. При преобразованиях может изменяться и число коэффициентов, и их вид.

Так, если из уравнений системы управления:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 u \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 u \end{cases} \qquad (51)$$

исключить x_2, то мы придем к уравнению

$$\left[D^2 - (a_{11} + a_{22})D + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\right]x_1 = \left[b_1 D + (b_2 a_{12} - b_1 a_{22})\right]u$$

(52)

с новыми коэффициентами.

Однако в любом случае новые коэффициенты остаются некоторыми функциями старых коэффициентов, и если для старого коэффициента выполнялось равенство (50), то и для любого нового коэффициента α_2 будет выполняться равенство

$$d\alpha_2 = \frac{df_1(\alpha)}{d\alpha} d\alpha \qquad (53)$$

Если при рассматриваемом нами значении параметра $\alpha=\alpha_0$ существует и поэтому дифференцирование законно, то приходим к выводу: этом случае, если при сколь угодно малых изменениях любых коэффициентов преобразованной системы изменение интересующих нас характеристик сколь угодно мало, то оно будет малым и при малых изменениях любых параметров реального устройства или процесса. Задачи расчета характеристик этого устройства или процесса в данном случае корректна. Если же при сколь угодно малом изменении хотя бы одного коэффициента преобразованной системы характеристики модели изменились существенно, то уже нет уверенности в корректности рассматриваемой задачи.

Пример.

Уравнения электродвигателя, работающего на одни из конкретных исполнительных механизмов с переменным моментом сопротивления могут быть записаны в виде:

$$\begin{cases} x_1' = -\dfrac{k}{m}x_1 + \dfrac{1}{m}x_2 + \dfrac{1}{m}x_4 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = -x_2 - 2x_3 \end{cases} \qquad (54)\ (55)\ (56)$$

В этих уравнениях x_1 – отклонение частоты вращения от номинальной, k- коэффициент вязкого трения, m – механическая постоянная времени, x_2 – отклонение момента сопротивления от номинального значения. Уравнение (54) является уравнением равновесия моментов на валу двигателя, уравнение (55) и (56) описывают исполнительный механизм (ток якоря играет роль управления).

Пусть управляющее воздействие в канале обратной связи формируется в виде линейной комбинации всех переменных:

$$x_4 = -x_1 - 2x_2 - x_3 \qquad (57)$$

коэффициент вязкого трения k=2 и номинальное значение параметра m равно единице. Уравнения (54)-(57) при k=2 и m=1 будут уравнениями системы управления частотой вращения электропривода. Используя уравнение (57), можно исключить переменную x_4 и записать уравнения системы управления в нормальной форме Коши:

$$\begin{cases} x_1' = -\dfrac{3}{m}x_1 - \dfrac{1}{m}x_2 - \dfrac{1}{m}x_3 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = -x_2 - 2x_3 \end{cases} \qquad (58)$$

Согласно известной теореме дифференциальных уравнений, решения системы (58) зависят от параметра m непрерывно. Нетрудно проверить, что при m=1 решения системы (58) устойчивы и сохраняют устойчивость при отклонениях параметра m от значения m=1. Характеристический полином системы (58) имеет вид $\Delta = (m\lambda + 3)(\lambda + 1)^2$ и является Гурвицевым как при m=1, так и для всех m, удовлетворяющих неравенству $0<m<\infty$.

Теперь рассмотрим тот случай, когда переменные x_2 и x_3 непосредственно не измеримы и не могут быть непосредственно использованы в канале обратной связи. Если мы хотим сохранить те же переходные процессы, то нам достаточно исключить переменные x_2 и x_3 путем эквивалентных преобразований, и мы придем к уравнениям

$$[mD^3+(2+2m)D^2+(4+m)D+2]x_1=(D^2+2D+1)x_4 \qquad (59)$$

$$(D^2+4D+5)x_1=(D+1)x_4 \qquad (60)$$

с новыми коэффициентами. Нетрудно проверить, что при m=1 решения системы (59)-(60) совпадают с решениями системы (58), но зависимость решений от параметра m у системы (58) и у системы (59)-(60) – разная. При значении m=1 у системы (59)-(60) решения уже не зависят от параметра m непрерывно. Характеристический полином системы (59)-(60) имеет вид

$$\Delta=(1-m)\lambda^4+(4-3m)\lambda^3+(8-3m)\lambda^2+(8-m)\lambda \qquad (61)$$

хотя при m=1 характеристический полином (61) совпадает (как и должно быть у эквивалентных систем) с характеристическим полиномом системы (58) при m=1, но уже при m=1+ε, где ε - сколь угодно малое положительное число, он перестает быть Гурвицевым и в решении появляется экспоненциально возрастающий член очень быстро растущий при малых ε.

Ранее мы уже установили тот же факт непосредственным изучением поведения решений системы (59)-(60) для m=1 при вариациях ее коэффициентов. Этот пример наглядно подтверждает, что изучение уравнений, исследуя вариации их коэффициентов, – если, разумеется, использованные преобразования были эквивалентными не только в классическом смысле, но и в расширенном.

Если же проверки на эквивалентность в расширенном смысле не делать, то можно допустить грубые ошибки. Так, например, если систему (59)-(60) решать традиционным способом, приведением к нормальной форме Коши (а ведь все стандартное программное обеспечение приводится для формы Коши, поэтому приведения к нормальной форме Коши обычно не обойтись), то мы придем к совершенно неверным ответам на вопросы о непрерывной зависимости решений от параметра и о сохранении устойчивости замкнутой системы при сколь угодно малых отклонениях параметров системы от расчетных значений.

Теперь рассмотрим тот случай, когда функции, выражающие зависимость коэффициентов преобразованной системы от коэффициентов системы исходной не дифференцируемы при исследуемых значениях коэффициентов и параметров.

Пример: рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1'' = -x_2' - x_2 \\ x_2' = -m x_1'' + e^{-t} \end{cases} \tag{62}$$

с параметром m и нулевым начальными условиями: $x_1(0) = x_1'(0) = x_2(0) = x_2'(0) = 0$.

Систему (14) введением новой переменной $x_3=x_1'$ (то есть, вполне эквивалентным преобразованием) можно свести к нормальной форме Коши:

$$
\begin{aligned}
&x_1' = x_3 \\
&x_2' = \frac{m}{1-m}x_2 + \frac{1}{1-m}e^{-t} \qquad (63) \\
&x_3' = -\frac{1}{1-m}x_2 - \frac{1}{1-m}e^{-t}
\end{aligned}
$$

$x_1(0)=x_1'(0)=0$

Мы убеждаемся, что в преобразованной системе (63) появляются новые коэффициенты, причем при m=1 функциональная зависимость новых коэффициентов от старых меняет непрерывность и дифференцируемость.

Рассматриваемый пример показывает особенно простую причину потери непрерывной зависимости решений и системы (62) и эквивалентной ей системы (63) от параметра m при m=1: пусть мы изменили параметр m вблизи m=1 на малую величину – изменили от m=0.999 до m=1.001. При этом уравнения в форме Коши изменятся от уравнений

$$
\begin{cases}
x_1' = x_3 \\
x_2' = 999x_2 + 1000e^{-t} \\
x_3' = -1000x_2 - 1000e^{t}
\end{cases}
\qquad (64)
$$

до уравнений

$$
\begin{cases}
x_1' = x_3 \\
x_2' = -1001x_2 - 1000e^{-t} \\
x_3' = 1000x_2 + 1000e^{t}
\end{cases}
\qquad (65)
$$

Мы убеждаемся, что у системы (65) по сравнению с системой (64) коэффициенты изменились очень существенно. Неудивительно, что и решения систем (64) и (65) при одних и тех же начальных условиях очень быстро расходятся с возрастанием времени.

Таким образом, не дифференцируемость зависимости коэффициентов преобразованной системы от коэффициентов исходной системы, или от параметров, является еще одной причиной потери непрерывной зависимости решений от параметров. Но это – более простой случай, сравнительно легко обнаруживаемый при традиционных методах решения, при приведении уравнений к нормальной форме Коши. Так, если мы будем решать систему (62) приведением к форме Коши, то мы быстро обнаружим, что вблизи значения параметра m=1 коэффициенты формы Коши меняются очень сильно, и поэтому мы заранее должны ожидать, что при малых изменениях параметра m вблизи m=1 решения должны изменяться очень существенно и это справедливое ожидание уберегает от возможной ошибки (для простой системы (62) нетрудно получить решение в явном виде:

$$x_2 = e^{\frac{m}{1-m}t} - e^{-t},$$

которое сразу показывает, что на любом интервале времени $0<t<\infty$ непрерывной зависимости решения от параметра m вблизи m=1 заведомо нет).

Более опасным является случай непрерывной зависимости коэффициентов преобразованной системы от коэффициентов исходной системы. В этом случае традиционный путь решения – приведение к форме Коши для использования стандартных программ – может привести, как уже указывалось, к опасным ошибкам.

Литература

1. Абдуллаев Н. Д., Петров Ю.П. Теория и методы проектирования оптимальных регуляторов. Л., Энергоатомиздат. 1985. 240 с.
2. Абдуллаев Н. Д., Петров Ю. П. О корреляционных функциях и спектральной плотности мощности колебаний электрической нагрузки промышленных предприятий. Изв. Вузов, Энергетика, 1979, №6, с.101-104.
3. Абдуллаев Н. Д., Петров Ю. П. Синтез регуляторов возбуждения для синхронных машин с учетом случайного характера нагрузки. Электричество, 1981, №1, с. 64-65.
4. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М, Мир, Изд-во Москва, 1967,479 с.
5. Александров А. Г. Синтез регуляторов многомерных систем. М. Машиностроение, 1986,272 с.
6. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М. Наука, 1981, 568 с. (повторение издания 1937 г.)
7. Барабанов А. Е., Первозванский А. А. Оптимизация по равномерно-частотным показателям. (H^{∞} теория), обзорная статья. Автоматика и телемеханика. 1992, №9, с.3-32.
8. Бендат Д., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. М. Изд-во Мир,1971,408 с.
9. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического управления. М. Наука,1975.
10. Веремей Е. И. Частотный метод синтеза оптимального регулятора для линейных систем со скалярным возмущением. Изв. Вузов, Электромеханика, 1985,№ 10.
11. Веремей Е. И., Галактионов М. А., Петров Ю. П. Закон управления рулевой установкой судна, обеспечивающий стабилизацию на курсе при малом числе перекла-

док руля. Материал по обмену опытом НТО им. А. Н. Крылова, Л.,1977, вып.267,с.72-82.
12. Веремей Е. И., Еремеев В. В. синтез оптимальных систем с заданными модальными свойствами. Сборник: Оптимальное управление в механических системах. Л., 1983.
13. Веремей Е. И., Корчанов В. М. Фильтрация волновых помех в системах автоматической стабилизации движения судов. Вопросы судостроения. Сер. Судовая автоматика. 1983, вып. 28.
14. Веремей Е. И., Петров Ю. П. Предельные возможности оптимизации линейных систем управления. Вопросы механики и процессов управления. Саранск, 1978, вып.2.
15. Волгин Л. Н. Применение полиномиального исчисления к задачам теории автоматического управления. Известия АН СССР, Техническая кибернетика, 1987,№6, с.133-142.
16. Гайдук А. Р. К исследованию устойчивости линейных систем. Автоматика и телемеханика, 1977, №3, с. 153-160.
17. Галактионов М. А., Петров Ю. П. О возможности улучшения качества систем управления за счет измерения возмущающих воздействий. Изв. Вузов, Электромеханика, 1985,№6, с.59-61.
18. Галактионов М. А., Петров Ю. П. О построении оптимальных регуляторов при различном числе измеряемых фазовых координат. Изв. Вузов, Электромеханика, 1981, №1.
19. Гельфанд И. М., Фомин С. В. вариационное исчисление. 1961.
20. Дидук Г. А., Коновалов А. С., Орурк И. А., Осипов Л. А. (Под ред. Воронова А. А.) Анализ и оптимальный синтез на ЭВМ систем управления, М., 1984.

21. Жабко А. П., Прасолов А. В., Харитонов В. А. Сборник задач по стабилизации программных движений. Ленинград, 1989.
22. Зубов В. И. Теория оптимального управления. Л., Изд-во Судостроение, 1966, 352 с.
23. Зубов В. И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л., Машиностроение, 1974,335 с.
24. Зубов В. И. Лекции по теории управления. М., Наука, 1975,495 с.
25. Иванов А. П., Кирин Н. Е. Сопряженные задачи теории управления. Ленинград, 1988.
26. Квакернаак Х., Сиван Р. линейные оптимальные системы управления. М., Мир, 1977,650 с.
27. Кирин Н. Е. Методы оценивания и управления в динамических системах. Изд-во СПбГУ, 1993, 306 с.
28. Колосов Г. Е. Синтез оптимальных автоматических систем при случайных возмущениях. М., 1984.
29. Ларин В. Б., Науменко К. Н., Сунцев В. Н. Синтез оптимальных линейных систем с обратной связью. Киев. Наукомова думка. 1973, 150 с.
30. Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. Автоматика и телемеханика. 1960, №4-6.
31. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Собр. Сочинений. Т.2, изд-во АН СССР, 1956.
32. Марусева И. В., Петров Ю. П. Синтез оптимальных регуляторов для систем управления, не управляемых по Калману. Изв. Вузов. Электромеханика, 1981, №7, с. 749-751.
33. Марусева И. В., Петров Ю. П., Казаков А. Ю. Введение в основу автоматики и информации. М., Изд, «Прометей». 1981, с.155.
34. Меррием К. теория оптимизации и расчет систем управления с обратной связью. М., Мир, 1967,549 с.

35. Надеждин П. В. О потере грубости при элементарных преобразованиях дифференциальных уравнений управляемых систем. Автоматика и телемеханика, 1973, №1, с. 185-187.
36. Ньютон Д., Гулд Л., Кайзер Д. Теория линейных следящих систем. М., 1961.
37. Острем К. Ю. Введение в стохастическую торию управления. М., Мир, 1973, 320с.
38. Петров Ю. П. Оптимальные регуляторы судовых силовых установок. Л., Изд. «Судостроение», 1966, 118 с.
39. Петров Ю. П. Оптимальное управление электрическим приводом с учетом ограничений по нагреву. Л., Изд. «Энергия», 1971, 144 с.
40. Петров Ю. П. Оптимизация управляемых систем, испытывающих воздействие ветра и морского волнения. Л., Изд. «Судостроение», 1973, 214 с.
41. Петров Ю. П. О не единственности решения задачи синтеза оптимального регулятора. Изв. Вузов. Электромеханика, 1974, №2,с. 221-222.
42. Петров Ю. П. Вариационные методы теории оптимального управления. Л., Изд. «Энергия». Издание второе, 1977, 280 с.
43. Петров Ю. П. Вариационные методы синтеза гарантирующих управлений. Санкт-Петербург, СПбГУ,1955, 54 с.
44. Петров Ю. П. Синтез устойчивых систем управления, оптимальных по среднеквадратичным критериям качества. Автоматика и телемеханика. Обзорная статья. 1983, №7, с. 5-24.
45. Петров Ю. П. Синтез оптимальных систем управления при не полностью известных возмущающих силах. Учебное пособие. Изд-во Ленинградского университета, 1987, 289 с.

46. Петров Ю. П. Соответствует ли направленность курса теории автоматического управления современным требованиям? Изв. Вузов, Электромеханика, 1991, №3, с. 111-116.
47. Петров Ю. П. О скрытых опасностях, содержащихся в традиционных методах проверки устойчивости. Изв. Вузов. Электромеханика, 1991, №11, с. 106-109.
48. Петров Ю. П. Устойчивость линейных систем при вариациях параметров. Автоматика и телемеханика. 1994, № 11, с. 186-189.
49. Петров Ю. П., Червяков В. В. Системы стабилизации буровых судов. Второе дополненное издание. Л., СПбГУ, 1997, 261 с.
50. Петров Ю. П. Три очерка по истории оптимизации и оптимального управления. С.-Петербург, СПбГУ, 1998, 53 с.
51. Петров Ю.П. третий класс задач физики и техники – промежуточных между корректными и некорректными. (Конспект курса лекций). СПб., СПбГУ, 1998, 30 с.
52. Петров Ю. П. Построение H^{∞} управления и гарантирующего управления как решение дифференциальной игры трех лиц. Дифференциальные уравнения. 1998, том 34, №3.
53. Петров Ю.П., Петров Л. Ю. Неожиданное в математике и его связь с авариями и катастрофами последних лет. СПб., СПбГУ, Первое издание, 1999, второе дополненное, 2000, 120 с.
54. Петросян Л.А., Кузьмина Т. И. Бескоалиционные дифференциальные игры. Изд. Иркутского университета, 1989, 148 с.
55. Подчукаев В. А. К проблеме грубости. Сборник «Аналитические методы синтеза регуляторов». Саратов, 1997, с. 206-225.

56. Подчукаев В. А. Анализ грубости свойства асимптотической устойчивости регулируемых систем. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1985, №6, с. 131-137.
57. Понтрягин Н.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961, 391 с.
58. Прасолов А. В. Математические модели управления. Л., 1991.
59. Солодовников В.В. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. М., 1960.
60. Серебряков Г.Г., Семенов А. В. Методы H^{∞} теории управления (Обзор). Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1989, №2, с. 3-16.
61. Тихонов А.Н. Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М., Наука, 1979, 285 с.
62. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М. Наука. 1979, 285 с.
63. Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В. А. Адаптивное управление динамическими объектами. М., 1981, 447 с.
64. Харитонов В. Л. Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства линейных дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения. 1978, №11, с. 2086-2088.
65. Цейтлин Я. М. Проектирование оптимальных линейных систем. М., Машиностроение, 1973, 240 с.
66. Цыпкин Я. З. Основы теории автоматических систем. Наука. 1977, 569 с.
67. Цыпкин Я. З., Поляк Б. Т. Робастная устойчивость при комплексных возмущениях параметров. Автоматика и телемеханика. 1991, №8.
68. Чаки Ф. Современная теория управления (пер. с венгерского) М., 1975.
69. Чанг Ш. Синтез оптимальных систем автоматического регулирования. М., Машиностроение, 1964, 440 с.

70. Чеголин П. М. Автоматизация спектрального и корреляционного анализа. М., Энергия, 1969.
71. Честнов В. Н. О возможной неустойчивости управляемых систем и синтез регуляторов с учетом параметрических возмущений. Межвузовский сборник «Аналитические методы синтеза регуляторов». Отв. редактор А. Г. Александров, Саратов, 1984.
72. Честнов В.Н. Частотный метод анализа грубости систем, описываемых дифференциальными уравнениями. Межвузовский сборник «Аналитические методы синтеза регуляторов». Отв. редактор А.Г. Александров. Саратов, 1985.
73. Якубович В.А. Оптимизация и инвариантность линейных стационарных систем управления. Автоматика и телемеханика. 1948, №8.
74. Якубович В. А., Якубович Е. Д. Эквивалентные обратные связи в линейных стационарных системах управления. Автоматика и телемеханика. 1984, №2.
75. Якубович В. А. Линейно-квадратичная задача оптимального гашения колебаний при неизвестном гармоническом внешнем возмущении. Доклады Российской академии наук. Том 333. 1993, №2.

Рецензия

на рукопись учебного пособия Ю. П. Петрова «Синтез систем управления».

Рукопись профессора Петрова Ю. П. содержит изложение взгляда автора на ряд проблем автоматического регулирования. Рассматриваются линейные системы с постоянными коэффициентами и аддитивно входящей случайной возмущающей функцией. Ю. П. Петров работает в этой области достаточно давно и ссылается на свои работы, опубликованные с 1966 года по настоящее время, в количестве 20 наименований. Безусловно, опыт исследователя и его мнение о приоритетах перворезультатов весьма поучительны и интересны, однако, представление материала, как учебного пособия требует более внимательного отношения к методической стороне и должно ориентироваться на своего слушателя, а именно, студента-математика университета. С этой точки зрения я попробую проанализировать представленную мне Ю. П. Петровым рукопись.

1. Во Введении описывается пример преобразований управляемой системы уравнений, которое негрубую систему сводит к грубой. На основании этого примера делается вывод о некорректности классической теории эквивалентных преобразований. По-моему мнению в рассмотренном примере использовано не эквивалентное преобразование координат и поэтому вывод автора несколько скороспел.
2. Во втором параграфе изучается решение линейного дифференциального уравнения (например (30)), в котором неоднородность является стационарным случайным процессом. Следует иметь ввиду, что если $\varphi(t)$ есть реализация процесса, являющегося белым шумом, то почти для любой реализации $\varphi(t)$ уравне-

ние (30) просто не имеет решения, поэтому предварительно должны быть изложены соответствующие определения и теоремы.

3. Учебное пособие ориентировано на студентов университета, однако, в нем отсутствует анализ современного состояния вопроса и существующая проблематика в этой интенсивно развивающейся области науки. Автор приводит в литературе 75 наименований, однако ссылается лишь на 43, из них 20 работ автора.
4. В работе имеются некоторые опечатки, в том числе отсутствуют все рисунки.

Резюмируя вышесказанное, считаю необходимым скорректировать план учебного пособия.

Профессор кафедры теории управления Жабко А.П.

Отзыв

на рукопись пособия профессора Петрова Ю. П. «Синтез систем управления».

Особенность данного пособия состоит в том, что в нем излагаются новейшие достижения науки последних лет, но излагаются настолько ярко и просто, что они вполне доступны студентам.

Пособий, соединяющих новизну научных результатов с простотой и доступностью изложения очень немного, и поэтому пособие, безусловно, рекомендуется к изданию в издательстве СПбГУ в 1997 году.

Хорошо известно, что после классических результатов по синтезу оптимальных систем управления при известных спектрах возмущающих воздействий, внимание ученых в последние десятилетия было сосредоточено на синтезе при неизвестных спектрах, но простых и обозримых результатов получить не удавалось. В недавних работах (1990-1994 гг.) автором пособия профессор Петровым Ю. П. был предложен новый и очень простой подход. Оказалось, что синтез при неизвестных спектрах может быть даже проще традиционных методов, и именно его целесообразность класть в основу преподавания.

Во второй части пособия рассмотрена проблема сохранения корректности при преобразованиях уравнений. Она также основана на результатах исследований профессора Петрова Ю. П.,, выполненных в 1990-1995 гг. Результаты Ю. П. Петрова являются продолжением и дальнейшим развитием исследований устойчивости по части переменных. Введенное автором пособия понятие эквивалентности в расширенном смысле позволяет избегать ошибок в расчетах, которые могут стать источником аварий. Поэтому эти результаты (тем более что они просты и легко усваиваются) весьма полезно изложить студентам и использовать в преподавании.

Рассмотренное учебное пособие может найти широкое применение и за пределами СПбГУ.

Член-корреспондент РАН Зубов В.И,

Рецензия

на рукопись учебного пособия Ю. П. Петрова «Синтез систем управления».

Рецензируемое учебное пособие вводят в учебный процесс новые важные научные результаты последних лет, изложенные настолько просто, что они вполне доступны для студента.

В рецензируемом учебном пособии рассмотрен фундаментальный для математического и физического образования вопрос об эквивалентных преобразованиях математических моделей природных процессов и технических объектов, которые студенты и выпускники ВУЗа пользуются на каждом шагу. Показано, что привычные и повсеместно используемые эквивалентные в классическом смысле преобразования могут при исследовании сохранения устойчивости с учетом вариаций параметров приводить к опасным ошибкам. Обосновывается необходимость введения нового математического понятия – эквивалентности в расширенном смысле. Новое понятие уточняет привычные представления об эквивалентности и предохраняет от ошибок.

В рецензируемом учебном пособии профессора Петрова Ю. П. рассмотрена проблема синтеза систем управления при неизвестных спектрах возмущающих воздействий. Синтез систем при заданных спектрах давно вошел в учебный процесс, однако, спектры возмущающих воздействий часто не известны нам или ж могут меняться с течением времени, и поэтому основное внимание многочисленных исследователей в нашей стране и за рубежом в последние два десятилетия было обращено на проблему синтеза систем при неизвестных спектрах.

Эта проблема долгое время, несмотря на большое количество исследований и публикаций, не имела сколько-нибудь обозримого решения.

В 1992-93 годах профессор Петров Ю. П. обнаружил, что решение существует и, причем настолько простое и компактное, что его можно сразу ввести в учебный процесс. В рецензируемом пособии приведены уравнения разделяющих кривых, которые позволяют очень легко установить - какое качество управления достижимо при любом спектре возмущающего воздействия и какое – не достижимо.

Рецензируемое учебное пособие вводит в учебный процесс самые недавние научные достижения и будет способствовать повышению качества обучения. Вводимый в учебный процесс материал излагается ясно, прозрачно, сопровождается многочисленными примерами и вполне доступен для студента. Учебное пособие профессора Петрова Ю. П. «Синтез систем управления», безусловно, рекомендуется к опубликованию.

Зав. кафедрой ПМ, РГПУ им. Герцена д.п.н. И. В. Марусева.

Оглавление