Петров Ю. П., Петров Л.Ю.

Неожиданное в математике
и его связь с авариями и катастрофами последних лет

Санкт-Петербург
1999

Аннотация

В книге излагаются недавно полученные автором неожиданные результаты, относящиеся к самому казалось бы традиционному разделу математики — преобразованию уравнений, изучаемому еще в средней школе.

Оказалось, что применение привычных, традиционных преобразований к проверке устойчивости математических моделей технических устройств, используемых во всех проектно-конструкторских организациях в России и за рубежом, может стать источником ошибок и причиной опасных аварий.

Есть основания полагать, что некоторые из знаменитых аварий последних лет имели под собой именно эту причину.

В книге излагаются основы уточненных преобразований, позволяющие уменьшить аварийность и уточнить наши представления о связи между математической моделью и физической реальностью.

Книга рассчитана на широкие круги читателей — инженеров, преподавателей математики и физики, студентов технических, математических и физических специальностей ВУЗов.

Работа выполнялась при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 98-01-01045.

Предисловие

Мы привыкли к тому, что в математике не бывает неожиданностей, — во всяком случае, в ее элементарных разделах, которые изучаются в средней школе. Прочитав эту небольшую книгу, читатели убедятся, что это не так, что неожиданные интересные результаты могут возникать в самых казалось бы привычных и традиционных разделах ее — например, в разделе о преобразованиях уравнений.

Со средней школы мы привыкли к тому, что можно переносить члены из левой части уравнения в правую с изменением знака, что можно умножать и делить все члены на число, отличное от нуля и т. п. Все привыкли к этим преобразованиям, все широко ими пользуются, но до последних лет никто не догадывался, что и в этих привычных со школы преобразованиях могут открыться неожиданные сюрпризы.

Дальнейшее изложение рассчитано на инженеров, студентов, учителей — на всех тех, кто знаком с простейшими дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Как раз при преобразованиях дифференциальных уравнений и встретились те интересные новые неожиданные явления, о которых автор хочет рассказать читателю.

Следует сразу отметить, что речь пойдет не просто о математических курьезах. Рассказанное в книге имеет серьезные практические приложения, связанные с авариями и катастрофами, с предотвращением их.

Автору хотелось бы, чтобы читатель отнесся к рассказанному в книге очень серьезно. Жертвой аварии, жертвой катастрофы может стать каждый. И если есть возможность уменьшить вероятность аварий, то этой возможностью надо воспользоваться. В книге рассказано, как это можно сделать.

§ 1. Дифференциальные уравнения и их преобразования

Мы в дальнейшем будем вести речь только о самых простых дифференциальных уравнениях — об уравнениях с постоянными коэффициентами. Они широко встречаются в приложениях. Так, например, уравнение

$$\frac{dx}{dt} = kx \qquad (1)$$

описывает изменение численности населения в стране, где рождаемость и смертность каждый год постоянны, не зависят от времени. Коэффициент k в уравнении (1) пропорционален разности между рождаемостью и смертностью. Решением уравнения (1) является функция

$$x = c_1 e^{kt} . \qquad (2)$$

В этом легко убедиться, подставив функцию (2) в уравнение (1). Поскольку для функции (2) будет $\dot{x} = c_1 k e^{kt}$, то после подстановки уравнение (2) превратится в тождество, что и является свидетельством того, что функция (2) действительно будет решением. (Напомним, что решением дифференциального уравнения называется функция, подстановка которой в уравнение обращает его в тождество.)

В общее решение дифференциального уравнения входят произвольные постоянные $c_1;\ c_2 \dots\ c_n$. Количество произвольных постоянных равно порядку уравнения — т. е. порядку входящих в него производных. Уравнение (1) является уравнением первого порядка и в его решение входит одна произвольная постоянная. Для того, чтобы решение стало полностью определенным, необходимо, чтобы помимо самого дифференциального уравнения были заданы начальные условия — значения функции $x\ (t)$ и ее производных при $t\ =\ 0$. Число необходимых начальных условий равно порядку уравнения. Для уравнения первого порядка (1) достаточно одного начального условия.

Пусть, например, мы приняли за начальный момент времени 1996 год и предположим, что в этом году население интересующей нас страны равно десяти миллионам, т. е. 10^7. Тогда из формулы (2) мы находим, что $c_1=10^7$ и население страны будет с течением времени расти по экспоненте: $x = 10^7 e^{kt}$.

Примером уравнения второго порядка может служить уравнение колебаний маятника

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0, \qquad (3)$$

где x — отклонение маятника от положения равновесия, a и b — параметры, зависящие от момента инерции маятника и от трения в точке подвеса.

Воспользовавшись обозначением Коши для оператора дифференцирования: $\frac{d}{dt} = D,$ уравнение (3) можно записать в виде:

$$(D^2 + aD+b)x=0. \qquad (4)$$

В дальнейшем мы будем широко пользоваться этим обозначением для оператора дифференцирования: $D = \frac{d}{dt}$.

Общее решение уравнение (4) имеет вид

$$x = e^{-\frac{a}{2}t}(c_1 \sin\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}t + c_2 \cos\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}t). \qquad (5)$$

В него входят две произвольные постоянные c_1 и c_2, определяемые из начальных условий: $x(0) = x_0; \dot{x}(0) = x_1$. Начальными условиями являются значения самой функции $x(t)$ и ее производной $\dot{x}$ при $t=0$. Решение (5) показывает, что при $a > 0$ и $b > \frac{a^2}{4}$ законом движения маятника являются постепенно затухающие колебания с частотой $\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}$ зависящей от параметров a и b.

Дифференциальное однородное уравнение с постоянными коэффициентами произвольного, n-го порядка может быть записано в виде:

$$(a_n D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots a_0)x = 0. \qquad (6)$$

Его решения зависят от так называемого характеристического полинома:

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0. \qquad (7)$$

Мы убеждаемся, что для получения характеристического полинома достаточно вместо оператора дифференцирования подставить, например, букву λ и мы получим полином n-ой степени, имеющий n корней: λ_1; λ_2; ... λ_n.

Если все эти корни вещественны и различны, то общее решение уравнения (7) запишется в виде

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots c_n e^{\lambda_n t}. \qquad (8)$$

Если среди корней полинома (7) имеются комплексные, то они могут входить только сопряженными парами:

$$\lambda_{i,i+1} = \alpha \pm j\beta,\ j = \sqrt{-1}, \qquad (9)$$

Каждой паре комплексных сопряженных корней будет в общем решении соответствовать член вида:

$$e^{\alpha_i t}(c_i \sin\beta_i t + c_{i+1}\cos\beta_i t). \qquad (10)$$

Мы убеждаемся, что если все корни характеристического полинома имеют отрицательные вещественные части, то любое решение, при любых начальных условиях, будет с течением времени стремиться к нулю. Если среди корней характеристического полинома есть кратные корни, то в решении могут появиться члены вида

$$c_i t^m e^{\lambda_i t},$$

но общий вывод останется без изменения: если все корни характеристического полинома имеют отрицательные вещественные части, то любое решение уравнения (6) обязательно стремится к нулю с течением времени.

Обратимся теперь к преобразованиям уравнений. Простейшими преобразованиями являются, например, переносы членов из левой части в правую и наоборот, с соответствующими изменением знака, деление всех членов уравнения на одно и то же число, не равное нулю. Понятно, что при таких преобразованиях решения уравнений не изменяются. Вообще при преобразованиях можно пользоваться только равносильными (или эквивалентными) преобразованиями, а эквивалентными называются преобразования, не изменяющие решений. Все решения преобразованного уравнения должны совпадать со всеми решениями уравнения исходного (см. Математическая энциклопедия, том 4, стр. 800, издательство “Советская энциклопедия”, 1984).

Помимо простейших эквивалентных преобразований (переноса членов, умножения или деления на число не равное нулю) при исследовании дифференциальных уравнений широко применяют такое преобразование как почленное дифференцирование. Оно тоже является эквивалентным преобразованием.

Рассмотрим, например, уравнение

$$\dot{x} + x = 0 \qquad (11)$$

с начальным условием $x(0) = 0$. Общее решение уравнения (11) имеет вид

$$x = c_1 e^{-t}. \qquad (12)$$

Начальному условию $x(0) = 0$ удовлетворяет единственное решение $x = 0$, из которого, в частности, следует, что $\dot{x}(0) = 0$. Если мы продифференцируем все члены уравнения (11), то придем к уравнению

$$\ddot{x} + \dot{x} = 0. \qquad (13)$$

Порядок уравнения повысился и мы должны добавить еще одно начальное условие, условие для первой производной, для $\dot{x}(0)$. Конечно, это условие нужно выбирать не произвольно, а выбрать то условие для $\dot{x}(0)$, которое в исходном уравнении (11) выполнялось автоматически. Мы убедились, что в исходном уравнении было $\dot{x}(0) = 0$. Это равенство и следует считать вторым начальным условием для уравнения (13). Характеристическим полиномом уравнения (13) будет полином

$$P_2(\lambda) = \lambda^2 + \lambda \qquad (14)$$

с корнями $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$ и поэтому общее решение уравнения (13) имеет вид

$$x = c_1 + c_2 e^{-t}. \qquad (15)$$

Начальным условиям $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ удовлетворяет единственное решение $x = 0$ — то есть то же, что и у уравнения (11). Мы убедились, что при правильном назначении дополнительных начальных условий почленное дифференцирование является эквивалентным преобразованием.

Точно так же эквивалентным преобразованием будет ум-ножение правой и левой частей дифференциального уравнения на любой полином $B(D) = b_m D^m + \ldots b_0$ от оператора дифференцирования. Так, умножив уравнение (11) на операторный полином $D + 2$, получим уравнение $(D^2 + 3D + \;\; + 2)x = 0$, характеристический полином которого имеет корни $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$. Общее решение уравнения имеет вид $x = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t}$. Начальным условиям $x(0) = 0$ и $\dot{x}(0) = 0$

удовлетворяет только решение $x = 0$ — то же, что и у уравнения (11), что еще раз подтверждает, что умножение на полином от оператора дифференцирования при правильном назначении дополнительных начальных условий является преобразованием эквивалентным.

Широко используются эквивалентные преобразования, сводящие одно уравнение к системе уравнений более низких порядков, или сводящие систему уравнений к одному уравнению. Так, если в уравнении (3) обозначить $x = x_1$, а $\dot{x} = x_2$ то уравнение (3) перейдет в систему двух уравнений первого порядка:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -bx_1 - ax_2 \end{aligned}\right\}. \qquad (16)$$

Если продифференцировать первое из уравнений (16), то получим $\ddot{x}_1 = \dot{x}_2$. Подставив теперь во второе из уравнений (16) вместо x_2 и $\ddot{x}_1$ равные им величины $(x_2 = \dot{x}_1;\ \ddot{x}_1 = \dot{x}_2)$, мы вернемся относительно $x_1 = x$ к уравнению (3).

В общем случае любую систему нескольких дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами различных порядков можно свести к так называемой нормальной форме Коши, к форме n уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + \ldots a_{1n}x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + \ldots a_{nn}x_n \end{aligned}\right\}. \qquad (17)$$

Систему (17) часто записывают в векторно-матричной форме

$$\dot{x} = Ax, \qquad (18)$$

где x — n-мерный вектор переменных $x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n$, A — матрица коэффициентов a_{ji}.

Запись в форме Коши очень удобна потому, что для вычисления характеристического полинома в этом случае могут быть использованы общие формулы линейной алгебры, для вычислений по которым давно разработано хорошее программное обеспечение. Действительно, из линейной алгебры известно, что характеристический полином уравнений (17) и (18) равен определителю (детерминанту) матрицы $\lambda E - A$, где E — единичная матрица. Определитель матрицы вычисляется на ЭВМ по стандартным программам. Поэтому преобразование к нормальной форме Коши (17) или (18) является широко используемым преобразованием.

§ 2. Устойчивость решений

Для многих практических приложений важно не только уметь вычислить решение уравнения, но и оценить его устойчивость. Вернемся к простому уравнению (1), имеющему общее решение (2). Начальному условию $x(0) = 0$ удовлетворяет решение $x = 0$. Однако начальные условия в практических задачах очень редко могут быть известны точно. Как правило, неизбежны небольшие погрешности. Если эти погрешности нарастают с течением времени, то решение не устойчиво. Так, если мы приняли, что $x(0) = 0$, а на самом деле $x(0) = 10^{-4}$, то уже при $kt = 10$ истинное значение $x(t)$ будет равно не нулю, а $x = 2{,}2$. Погрешность будет экспоненциально возрастать и быстро станет недопустимой. Поэтому исследование устойчивости очень важно.

Для линейных систем с постоянными коэффициентами существуют простые методы проверки устойчивости без нахождения самих решений. Действительно, характер решений линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами или системы таких уравнений целиком определяется характеристическим полиномом. Если у всех корней характеристического полинома вещественные части отрицательны, то любое решение $x(t)$ будет стремиться к нулю при $t \to \infty$, а значит и разность между решениями, отвечающими разным начальным условиям тоже будет стремиться к нулю и все решения будут устойчивыми (точнее — асимптотически устойчивыми).

В 1895 году немецкий математик А. Гурвиц (1859–1919) нашел условия, которым должны удовлетворять коэффициенты полинома (7) для того, чтобы все его корни имели отрицательные вещественные части. Полиномы, у которых все корни имеют отрицательные вещественные части, называют гурвицевыми полиномами.

Так, например, полиномы второй степени

$$a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 \qquad (19)$$

будут гурвицевыми, если все их коэффициенты положительны (для определенности старший коэффициент полинома всегда приводят к положительному значению). Для полиномов третьей степени

$$a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 \qquad (20)$$

положительности коэффициентов уже не достаточно для того, чтобы полином (20) был гурвицевым; необходимо и достаточно, чтобы дополнительно выполнялось еще и неравенство

$$a_2 a_1 > a_3 a_0 \,. \qquad (21)$$

Для полиномов выше третьей степени необходимые и достаточные условия гурвицевости сложнее. Их можно найти в учебниках по теории автоматического управления. Удобно пользоваться очень простым необходимым (но не достаточным!) условием: полином любой степени может быть гурвицевым только тогда, когда все его коэффициенты положительны, среди них нет ни одного отрицательного, или равного нулю.

Отметим теперь, что для линейных систем с постоянными коэффициентами устойчивость решений не зависит от начальных условий: либо все решения при любых начальных условиях устойчивы, либо нет. Поэтому для линейных систем часто говорят не об устойчивости решения, а об устойчивости системы. Устойчивая система — это та, у которой решения, удовлетворяющие любым начальным условиям, устойчивы.

У нелинейных систем все сложнее. Там решение, удовлетворяющее одному начальному условию, может быть устойчивым, удовлетворяющее другому начальному условию — неустойчивым. Поэтому для нелинейных систем говорят только об устойчивости решений.

Первая неожиданность

При изучении устойчивости систем управления еще в 30-е годы столкнулись с первой неожиданностью: хотя умножение правой и левой частей уравнения на полином от оператора дифференцирования $D = \dfrac{d}{dt}$ является эквивалентным преобразованием, такое преобразование может изменить устойчивость. Для примера вернемся к уравнению (11) с начальным условием $x(0) = 0$. Оно имеет решение $x = 0$ и это решение устойчиво, поскольку характеристический полином уравнения (11) имеет вид $\lambda + 1$ и является гурвицевым. Умножим теперь уравнение (11) на операторный полином $D - 1$. Получим уравнение второго порядка

$$(D^2 - 1)x = 0, \qquad (22)$$

характеристический полином которого имеет корни $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = +1$ и общее решение имеет вид

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{t}. \qquad (23)$$

Начальным условиям $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ удовлетворяет единственное решение x=0, получающееся из формулы (23) при $c_1 = c_2 = 0$. Это решение совпадает с решением уравнения (11), что и должно было быть, поскольку умножение на операторный полином является эквивалентным преобразованием. Однако решение $x = 0$ уравнения (22) не устойчиво. Действительно, если начальные условия отклонились от нулевых даже на малые числа δ_1 и δ_2 и вместо $x(0) = 0$ и $\dot{x}(0) = 0$ имеем $x(0) = \delta_1; \dot{x}(0) = \delta_2$, то на основе формулы (23) найдем, что $c_1 = 0{,}5(\delta_1 - \delta_2)$; $c_2 = 0{,}5(\delta_1 + \delta_2)$ и следовательно,

$$x = 0{,}5(\delta_1 - \delta_2)e^{-t} + 0{,}5(\delta_1 + \delta_2)e^{t}. \qquad (24)$$

Мы убеждаемся, что даже при малых δ_1 и δ_2 различие между решением (24) и решением $x = 0$ будет неограниченно возрастать с течением времени.

Уже этот простой пример показывает, что даже после эквивалентных преобразований исследование преобразованной системы может не дать правильного ответа на вопрос об устойчивости. Однако в данном случае трудности были преодолены введением простого запрета: при исследовании устойчивости умножение на негурвицев операторный полином не допустимо (умножение на гурвицев полином от оператора дифференцирования допустимо и не влияет на суждение об устойчивости).

С гораздо более интересными и серьезными неожиданностями пришлось столкнуться при исследовании сохранения устойчивости при неизбежных на практике вариациях (малых изменениях) параметров и коэффициентов дифференциальных уравнений.

Действительно, хотя мы и говорили все время о дифференциальных уравнениях с постоянными коэффициентами, нужно учитывать, что в действительности идеально постоянных коэффициентов почти никогда нет. Коэффициенты дифференциальных уравнений зависят от параметров исследуемой системы, а в любой реальной системе параметры не могут оставаться идеально неизменными. Малые отклонения параметров, вариации их совершенно неизбежны.

Так, например, уравнение (3), решением которого служит функция (5), описывает колебания физического маятника. Коэффициент a зависит от момента инерции маятника, а следовательно, и от температуры окружающей среды: при изменении температуры вследствие теплового расширения изменяются линейные размеры маятника, а значит, и момент инерции. Коэффициент b в уравнении (3) зависит от величины трения в точке подвеса, но коэффициент трения зависит от температуры, от износа материала в точке подвеса. Следовательно, и коэффициент b тоже будет испытывать вариации, малые изменения.

Поэтому на практике обычно совершенно недостаточно, чтобы исследуемая система была просто устойчивой. Необходимо, чтобы она сохраняла устойчивость при неизбежных на практике вариациях параметров.

При исследовании сохранения устойчивости при вариациях параметров как раз и столкнулись недавно с очень интересными математическими неожиданностями.

§ 3. Математическая неожиданность

Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений

$$(D^3 + 4D^2 + 5D + 2)x_1 = (D^2 + 2D + 1)x_2 \qquad (25)$$

$$(D + 1)x_2 = (D^2 + 4D + 5)x_1 . \qquad (26)$$

Систему (25) — (26) можно, исключив, например, переменную x_2 путем эквивалентных преобразований, свести к одному уравнению относительно x_1:

$$(D^3 + 5D^2 + 7D + 3)x_1 = 0 . \qquad (27)$$

Характеристический полином системы (25) — (26)

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 7\lambda + 3, \qquad (28)$$

имеющий корни $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, является гурвицевым полиномом, и система (25)—(26) является устойчивой. Общее решение системы (25)—(26), как нетрудно проверить, имеет вид:

$$x_1 = c_1 e^{-3t} + (c_2 t + c_3) e^{-t}. \qquad (29)$$

Это еще раз подтверждает, что все решения системы (25)—(26), удовлетворяющие любым начальным условиям, являются устойчивыми.

Однако система (25)—(26) может терять устойчивость даже при сколь угодно малых вариациях некоторых своих коэффициентов. Так, например, если в уравнении (25) коэффициент при члене $D^2 x_2$ будет равен не единице, а 0,999, а остальные коэффициенты останутся неизменными, то характеристический полином примет вид:

$$P(\lambda) = -0{,}001\lambda^4 + 0{,}996\lambda^3 + 4{,}995\lambda^2 + 7\lambda + 3 \qquad (30)$$

и уже не будет гурвицевым, поскольку знак коэффициента при λ^4 противоположен знаку остальных коэффициентов. Полином (30) имеет большой положительный корень $\lambda_4 = 1001$ и поэтому в решении уравнения появляется очень быстро возрастающий член: $x_1 = c_1 e^{-3t} + (c_2 t + c_3) e^{-t} + c_4 e^{1001t}$. Точно так же устойчивость может потеряться и при сколь угодно малых вариациях некоторых других коэффициентов.

Важно отметить, что если коэффициент при члене $D^2 x_2$ будет не меньше, а больше единицы, если он, например, будет равен не 0,999, и 1,001 (а остальные коэффициенты системы (25)—(26) останутся неизменными), то характеристический полином системы примет вид

$$P(\lambda) = 0{,}001\lambda^4 + 1{,}004\lambda^3 + 5{,}005\lambda^2 + 7\lambda + 3 \qquad (31)$$

и будет гурвицевым, система сохранит устойчивость. Таким образом, **к потере устойчивости приводят только вариации вполне определенного знака.**

Внимательный читатель может сам проверить правильность вычисления характеристических полиномов (28), (30) и (31). Действительно, для системы двух дифференциальных уравнений вида

$$P_1(D)x_1 = P_2(D)x_2$$
$$P_3(D)x_2 = P_4(D)x_1,$$

где $P_1(D)...P_4(D)$ — полиномы от оператора дифференцирования $D = \dfrac{d}{dt}$, ее характеристический полином будет равен определителю:

$$\pm\begin{vmatrix} P_1(\lambda) & P_2(\lambda) \\ P_4(\lambda) & P_3(\lambda) \end{vmatrix},$$

т. е. будет равен $\pm\left[P_1(\lambda)P_3(\lambda)-P_2(\lambda)P_4(\lambda)\right]$ (двойной знак берется потому, что корни полинома не изменяются при изменении знака всех его членов; поэтому выбирают тот знак, при котором большинство членов положительны). Используя эту формулу, для системы (25) — (26) получаем следующее выражение для характеристического полинома:

$$(\lambda^2+2\lambda+1)(\lambda^2+4\lambda+5)-(\lambda^3+4\lambda^2+4\lambda+2)(\lambda+1).$$

Выполнив умножение и приведя подобные члены, получим формулу (28).

Если в уравнении (25) коэффициент при члене D^2x будет равен не единице, а 0,999, то характеристический полином будет равен

$$(0{,}999\lambda^2+2\lambda+1)(\lambda^2+4\lambda+5)-(\lambda^3+4\lambda^2+5\lambda+2)(\lambda+1).$$

Выполнив умножения, приведя подобные члены и заменив D на λ, получим формулу (30). Если же в уравнении (25) коэффициент при члене D^2x_2 равен не единице, а 1.001, то после аналогичных вычислений придем к формуле (31).

Теперь преобразуем систему(25) — (26) к форме Коши. Для этого достаточно ввести новые переменные x_3 и x_4. Определим новые переменные равенствами:

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= \dot{x}_1+2x_1-x_2 \\ x_4 &= \dot{x}_3 \end{aligned}\right\}. \qquad (32)$$

Относительно новых переменных уравнение (25) перейдет в систему трех уравнений первого порядка, т. е. примет форму Коши:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1+x_2+x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -x_3-2x_4 \end{aligned}\right\}. \qquad (33)$$

Правильность перехода от (25) к (33) легко проверить обратным преобразованием. Исключив из (33) переменные x_3 и x_4, получим снова уравнение (25). Тем самым еще раз подтверждается эквивалентность уравнений (25) и (33).

Теперь преобразуем уравнение (26). Преобразования будут заключаться только в разбивке членов и переносе их из одной части равенства в другую с изменением знака. Эквивалентность таких преобразований никаких сомнений не вызывает. Получим:

$$\left[(D^2+2D)x_1 - Dx_2\right] + \left[(2D+4)x_1 - 2x_2\right] + x_1 + x_2 = 0\,. \quad (34)$$

Сопоставляя (34) с равенствами (32), убеждаемся, что первой квадратной скобке соответствует переменная x_4, второй квадратной скобке соответствует $2x_3$. Окончательно уравнение (26) преобразуется к виду:

$$x_2 = -x_1 - 2x_3 - x_4\,. \quad (35)$$

Мы убеждаемся, что относительно новых переменных уравнение (26) переходит в дифференциальное уравнение нулевого порядка, т. е. в не содержащее производных соотношение между переменными. Уравнения (33)—(35) эквивалентны уравнениям (25)—(26). Это можно еще раз проверить, вычислив характеристический полином системы уравнений (33)—(35). Легко убедиться, что он останется тем же, что у системы (25)—(26), и по-прежнему будет иметь вид (28). Система (33)—(35) устойчива и эквивалентность ее системе (25)—(26) сомнений не вызывает.

И вот здесь нас ожидает неожиданность: если мы будем давать малые изменения любым коэффициентам системы (33)—(35) и будем проверять новые системы на устойчивость, то неизменно будем убеждаться в том, что все они устойчивы.

Система (33)—(35) сохраняет устойчивость при вариациях (малых изменениях) любых своих коэффициентов, хотя система (25)—(26) этим свойством не обладает.

Подчеркнем еще раз — системы уравнений (25)—(26) и (33)—(35) эквивалентны между собой, их характеристические полиномы тождественны, множества решений одни и те же, а по свойству сохранения устойчивости при вариациях параметров они отличаются разительно. В этом и заключается неожиданность.

Обнаружение этого неожиданного результата имеет большое практическое значение. Ведь до самого последнего времени об устойчивости различных объектов и систем и о сохранении устойчивости при неизбежных малых отклонениях параметров и коэффициентов судили, разумеется, по преобразованным уравнениям. Без эквивалентных преобразований ни одно исследование обойтись не может. Но если свойство сохранения устойчивости при вариациях коэффициентов может появляться и исчезать при эквивалентных преобразованиях уравнений, то это говорит о том, что традиционные методы проверки устойчивости и ее сохранения не полны, могут давать неверные ответы, а неверный ответ в таком серьезном вопросе, как устойчивость, может быть причиной аварий, в том числе и с гибелью людей.

§ 4. Объяснение неожиданности

Продемонстрированная на примере (25)—(26) и (33)—(35) возможность изменения свойства сохранения устойчивости при вариациях параметров после эквивалентных преобразований имеет простое объяснение (впервые это объяснение было дано в книге Ю. П. Петрова “Синтез оптимальных систем управления при неполностью известных возмущающих силах”, Издательство Ленинградского гос. университета, 1987 г.). Действительно, проанализируем подробнее, что означает утверждение: “*система уравнений сохранит устойчивость своих решений при вариациях (малых отклонениях) коэффициентов от расчетных значений.*” Фактически, это является утверждением не о свойствах самой исследуемой системы, а утверждением о свойствах множества других систем, коэффициенты которых отличаются (хотя и немного) от коэффициентов исходной исследуемой системы (такое множество систем называют окрестностью исходной системы).

Теперь вспомним, что эквивалентные преобразования обязаны не изменять решения исходной системы, но совсем не обязаны оставлять неизменными свойства ее окрестности. Об этом в определении эквивалентного преобразования ничего не говорится. Поскольку свойство сохранения устойчивости при вариациях параметров является свойством окрестности, оно может появляться и исчезать при совершенно эквивалентных преобразованиях уравнений.

Отсюда следует, что системы (25)—(26) и (33)—(35) не являются каким-то особым исключением. Подобных систем, меняющих некоторые свои свойства при эквивалентных преобразованиях, существует много и мы покажем потом целые классы подобных систем.

А отсюда следует, что традиционные, используемые во всех проектных и конструкторских организациях методы проверки сохранения устойчивости по свойствам характеристического полинома или функции Ляпунова исследуемой системы не полны, и потому не надежны и не всегда дают правильные результаты. Для гарантии надежности необходимы дополнительные исследования — нужно проверить, с помощью каких преобразований определялся характеристический полином или функция Ляпунова, не изменили ли эти преобразования свойства сохранения устойчивости при вариациях параметров.

Для того, чтобы быть уверенными в сохранении устойчивости при вариациях параметров нужно ввести новое математическое понятие — понятие *эквивалентности в расширенном смысле*, поскольку мы убедились, что обычные эквивалентные преобразования — для определенности будем называть их в дальнейшем преобразованиями, эквивалентными в классическом смысле — не гарантируют сохранения свойств окрестности исследуемой системы, в том числе и свойства сохранения устойчивости при вариациях параметров.

Системами дифференциальных уравнений, эквивалентными в расширенном смысле, назовем системы, которые:

- во-первых, эквивалентны в классическом смысле (т. е. их решения совпадают);
- во-вторых, у них мало отличаются друг от друга окрестности решений (в частности, если у исследуемой системы решения устойчивы, то они устойчивы и у всех систем, находящихся в окрестности исследуемой системы).

В дальнейшем мы приведем критерии, позволяющие судить о том, являются системы эквивалентными в расширенном смысле, или нет.

Отметим сразу, что подавляющее большинство систем, эквивалентных в классическом смысле, будут эквивалентными и в расширенном смысле. Именно поэтому необходимость введения нового математического понятия столь долго не осознавалась.

Действительно, если, например, в уравнении

$$2\dot{x} = -2x \tag{36}$$

все решения устойчивы, то этим же свойством обладают и решения уравнения

$$\dot{x} + x = 0\,, \tag{37}$$

получившегося из (36) умножением на 0,5 и переносом члена $-x$ в левую часть. Уравнения (36) и (37) эквивалентны между собой и в классическом и в расширенном смысле и для большинства уравнений и систем уравнений дело будет обстоять именно так. Системы, эквивалентные между собой в классическом смысле, но не в расширенном, встречаются редко. Однако исследовать их совершенно необходимо, поскольку каждая встреча с такой редкой системой может привести к авариям и гибели людей. В следующем разделе мы покажем это.

§ 5. Практические приложения

Наибольшее значение проверка устойчивости имеет при исследовании систем автоматического управления, которыми в настоящее время оснащено большинство объектов промышленности и транспорта.

Самолеты большую часть времени летают под управлением автоматических устройств — автопилотов. Корабли в море движутся под управлением авторулевых, постоянство характеристик технологических процессов на большинстве заводов поддерживается автоматическими регуляторами.

В системах управления переменные x_1; x_2; ... x_n, как правило, являются отклонениями характеристик процесса от желаемого значения. Если математической моделью системы автоматического управления является система дифференциальных уравнений с неустойчивыми решениями, то эти отклонения будут быстро нарастать и нормальная работа системы станет невозможной.

Поэтому еще в ходе проектирования во всех проектно-конструкторских организациях всегда проверяют — будет проектируемая система устойчивой, или нет. Только систему, которая согласно проверочному расчету является устойчивой, допускают к “воплощению в металле”. Предположим, что мы ошиблись в расчете и неустойчивую систему управления при расчете признали за устойчивую. Это неприятно, но не опасно. На испытаниях неустойчивость системы сразу выявится из-за быстро возрастающих отклонений реального течения управляемого процесса от желаемого и система будет списана в брак с соответствующим списанием убытков.

Гораздо опаснее ошибка в вопросе о сохранении устойчивости при вариациях параметров. Предположим, что мы исследуем систему управления, математической моделью которой являются уравнения (25)—(26). В последнее время при расчетах все чаще пользуются быстродействующей вычислительной техникой и для удобства использования стандартных программ исследуемую математическую модель приводят к стандартному виду, к форме Коши, т. е. к системе уравнений первого порядка. Приводя систему (25)—(26) к форме Коши, придем к уже знакомым нам уравнениям (33)—(35). Исследуя эти уравнения, убедимся, что при вариациях любых коэффициентов система (33)—(35) сохранит устойчивость. Однако исходная система (25)—(26), как мы уже убедились в этом в § 3, при вариациях некоторых коэффициентов (и притом только при вариациях определенного знака) устойчивость теряет. Причина заключается в том, что системы (25)—(26) и (33)—(35) эквивалентны друг другу в классическом смысле, но не в расширенном. Если не вводить нового математического понятия — *эквивалентности в расширенном смысле*, если ограничиться классическим понятием эквивалентных систем, то мы после проведения расчетов по уравнениям (33)—(35) должны признать проектируемую нами систему автоматического управления устойчивой и сохраняющей устойчивость при вариациях параметров и поэтому должны дать рекомендации об ее изготовлении “в металле”.

Поскольку при изготовлении малые отклонения действительных параметров любого изделия от расчетных значений неизбежны, а знак этих отклонений не предсказуем, то при изготовлении мы можем получить систему управления, математической моделью которой будут не уравнения (25)—(26), а мало отличающиеся от них уравнения:

$$(D^3+4D^2+5D+2)x_1=(1{,}001D^2+2D+1)x_2 \qquad (38)$$

$$(D+1)x_2=(D^2+4D+5)x_1 \qquad (39)$$

(всего один коэффициент отклонился на одну тысячную от расчетного значения). Характеристический полином системы (38)—(39), как мы уже указывали в § 3, имеет вид (31) и является гурвицевым. Следовательно, реально изготовленная система является устойчивой и испытания безусловно это подтвердят.

Поскольку изготовленная система управления успешно прошла испытания, то она может быть установлена на ответственный объект и может длительное время вполне исправно работать. Однако в ходе эксплуатации вследствие износа и старения рабочих деталей неизбежен медленный малый дрейф всех параметров, а с ним и коэффициентов математической модели. Вполне возможно, что в некоторый непредвиденный момент времени коэффициент при D^2x_2 вместо первоначального значения 1,001 станет 0,999. В этот момент характеристический полином системы (как было показано в § 3) станет равен полиному (30), перестанет быть гурвицевым, а это означает, что реальная система потеряет устойчивость. Потеря устойчивости в непредвиденный момент времени уже сама по себе создает аварийную ситуацию, а если не сработают меры защиты, то ситуация может перерасти в опасную аварию, в том числе и связанную с гибелью людей.

Причина аварии заключается в том, что система (33)—(35) эквивалентна системе (25)—(26) в классическом смысле, но не эквивалентна в расширенном смысле, окрестности этих систем различны. Мы убеждаемся, что при игнорировании различия между понятиями эквивалентности в классическом смысле и в расширенном, каждая встреча с особой системой, для которой эти понятия не совпадают, может оказаться смертельно опасной.

Вместе с тем анализ примеров с системами (25)—(26) и (33)—(35) показывает, почему до самых последних лет необходимости в новом математическом понятии не возникало, и аварий, связанных с ошибками при расчете сохранения устойчивости, в прежние годы не происходило.

Во-первых, опасные явления возникают только в системах достаточно высокого порядка (не ниже третьего). Кроме того, в системах 3–5 порядков они возникают в простой форме и могут быть легко замечены. Так, опытный инженер сразу заметит опасные свойства системы (25)—(26) и не допустит ее к реализации. Пример с системой (25)—(26) был приведен только для того, чтобы читатель смог проследить за всеми преобразованиями, а при желании и сам повторить их и убедиться, что никакого “подвоха”, никакой ошибки здесь нет.

Однако в современной технике приходится иметь дело с системами управления до 20–40 порядков. Здесь уже никакой опыт, никакая интуиция инженера не помогут. Для предупреждения аварий необходимо использовать более совершенные математические методы и учитывать различие между эквивалентностью в классическом смысле и в расширенном.

Во-вторых, до поры до времени возможность потери устойчивости при вариациях параметров в достаточно простых системах управления выявляли на испытаниях простым “покачиванием” всех параметров и коэффициентов. Однако в современных системах высоких порядков этот старый метод уже не срабатывает. Главная трудность заключается в том, что потеря устойчивости может происходить при комбинациях вариаций разных параметров различного знака. Например, потеря устойчивости в какой-либо конкретной системе может произойти лишь тогда, когда первый параметр отклонится от расчетного значения в положительную сторону, второй — непременно в отрицательную, а третий — снова в положительную и т. п. Если поведение исследуемой системы зависит от N параметров, то число комбинаций положительных и отрицательных вариаций равно 2^N и все их надо проверить. Если $N = 40$ (а для современных сложных систем это очень умеренное число), то число комбинаций, которые надо проверить, равно 2^{40}, а это больше чем 10^{12}. Понятно, что даже с использованием самой быстродействующей вычислительной техники такого числа проверок не выполнить и нужно обязательно переходить к более совершенным методам расчета и проектирования, использующим новое математическое понятие эквивалентности в расширенном смысле. Иначе аварии будут неизбежны.

В-третьих, до последнего времени расчет устойчивости систем управления проводился, как правило, по “реальным выходам” (о них подробнее будет сказано в § 7), без перехода к форме Коши. К форме Коши стали повсеместно переходить лишь при массовом использовании для расчетов быстродействующей вычислительной техники и стандартных программ, при переходе к автоматизированному проектированию.

Такой переход, безусловно, прогрессивен, но он должен сопровождаться ревизией и уточнением используемого математического аппарата. Игнорирование различия между эквивалентностью в классическом смысле и в расширенном смысле, не очень опасное при ручном счете, может стать смертельно опасным при автоматизированном проектировании, которое в последнее время все больше и больше входит в нашу жизнь, в практику расчетов большинства проектно-конструкторских организаций.

§ 6. Аварии и катастрофы

Приходилось ли уже сталкиваться с авариями, причиной которых были традиционные методы проектирования, не учитывающие различия между эквивалентностью в классическом смысле и в расширенном? Мы уже указывали, что некритическое, без дополнительных проверок, использование традиционных методов может приводить к появлению опасных систем, способных при неизбежном на практике малом дрейфе параметров в непредвиденный момент времени терять устойчивость. Но приходилось ли уже реально сталкиваться с авариями, порожденными этой причиной?

Дать достоверный ответ на этот вопрос трудно, поскольку расследование причин аварий — дело тонкое и к тому же осложненное корыстными интересами проектировщиков и изготовителей, которые часто стараются скрыть истинные причины аварии любыми способами, иногда вплоть до крупных взяток членам комиссии, которая расследует аварию.

Материал предыдущих разделов позволяет указать характерные черты аварий, возникающих в системах, способных терять устойчивость при вариациях параметров определенного знака:

1. При дрейфе параметров системы в момент перехода параметра в опасный интервал в характеристическом полиноме системы появляется большой положительный корень (смотри полином (30)). Это означает, что отклонения регулируемых переменных от безопасных значений будут нарастать очень быстро, авария будет развиваться стремительно, как удар, как внезапный отказ.

2. Если опасная система при аварии не разрушилась, а была вовремя отключена — вручную или системой защиты, то при происходящей через некоторое время проверке система может оказаться вполне исправной, поскольку параметр, выход которого из безопасного диапазона привел к аварии, в результате неконтролируемых малых вариаций может к моменту проверки снова прийти в безопасный диапазон значений.

С учетом этих обстоятельств, особое внимание привлекает знаменитая авария аэробуса А-310, произошедшая 22 марта 1994 года над городом Междуреченском, когда погибли все пассажиры и экипаж. Так называемый “черный ящик” с записью параметров полета до и после аварии, был найден. Исследование записей “черного ящика” показало, что авария произошла в то время, когда самолет шел в автоматическом режиме, под управлением автопилота. Без видимой причины неожиданно стали быстро нарастать опасные отклонения крена и тангажа самолета от их нормальных значений. Пока экипаж переходил на ручное управление, отклонения возросли настолько, что ввести их в нормальные рамки уже не было возможности. Аэробус упал и разбился.

Через несколько месяцев другой аэробус А-310 летел вблизи Бухареста на автопилоте, в автоматическом режиме. Также внезапно стали нарастать отклонения крена и тангажа самолета от нормальных значений. Однако на этот раз летчик сумел быстро отключить автопилот и успел в режиме ручного управления выровнять самолет. Когда после благополучной посадки стали проверять автопилот и систему управления, выявилось, что они в полном порядке и работают устойчиво.

Сопоставляя все эти факты, можно сделать вывод о том, что система автоматического управления на аэробусе А-310 оказалась спроектированной так, что она способна терять устойчивость при вариациях некоторых своих параметров, или комбинациях вариаций, и эти вариации или их комбинации стали причиной двух потерь устойчивости, одна из которых 22 марта 1994 года над Междуреченском закончилась гибелью пассажиров и экипажа. Как можно догадываться, расчет автопилота и системы управления проводился на быстродействующих вычислительных машинах после преобразования математической модели системы к форме Коши и не позволил полностью выявить ее опасные свойства.

Отказ системы управления при полете вблизи Бухареста подробно не исследовался. Аварию над Междуреченском подробно расследовала международная комиссия. Необходимость в международной комиссии возникла потому, что аэробус А-310 проектировался и изготовлялся франко-германской фирмой, но в том роковом полете над Междуреченском шел под управлением российского экипажа. По записям “черного ящика” аэробуса было установлено, что в момент аварии в кабине пилотов находились дети командира корабля, т. е. российский экипаж допустил грубое нарушение должностных инструкций; именно это нарушение было выставлено франко-германской стороной в качестве главной причины аварии. В то же время несомненно, что первопричиной аварии была потеря устойчивости автопилотом и поэтому нужно было внимательно проанализировать,— а почему, по какой причине внезапно потерялась устойчивость. Отметим, что в комиссию по расследованию аварии была послана докладная о том, что причиной аварии могут быть вполне определенные, перечисленные в докладной, неточности в проектировании и расчете системы управления аэробусом и поэтому необходимо детально исследовать эту версию. Докладная была получена комиссией, но никакой реакции от комиссии на нее не последовало. Разумеется, можно только строить догадки о том, почему международная комиссия не захотела исследовать причины аварии подробно, но несомненно одно: если бы причиной оказались погрешности проектирования, то ответственность за аварию и связанные с этой ответственностью многомиллионные (порядка 150 миллионов долларов) выплаты семьям погибших легли бы на франко-германскую фирму, которая проектировала и строила аэробус. Сделав главный упор на грубое нарушение инструкций российскими пилотами, которые пустили в пилотскую кабину детей, комиссия сумела переложить вину на российскую сторону.

Мы видим теперь, как сложно восстановить истину в таком трудном деле, как расследование аварий. Остается несомненным одно: поскольку традиционные методы расчета устойчивости и ее сохранения при вариациях параметров основаны на исследовании характеристического полинома системы или матрицы ее коэффициентов при записи в форме Коши и не учитывают различия между преобразованиями, эквивалентными в классическом смысле и в расширенном, то традиционные методы не могут всегда, для всех систем давать правильные ответы. Следовательно, если в практику расчетов устойчивости не будут введены дополнительные проверки, описанные в уже упоминавшейся книге, изданной Ленинградским университетом в 1987 году, [1] (цифра, стоящая в квадратных скобках, означает номер в списке литературы в конце книги), то аварии будут возникать неизбежно. Если не сегодня, то завтра. А вот мириться с подобными авариями никак нельзя. Одно дело, когда авария возникает по неведению или из-за пока непреодолимого несовершенства сегодняшней нашей техники, и другое дело, когда причиной аварии становятся инертность, лень, нежелание прислушаться к предупреждениям ученых и провести дополнительные проверки, которые уже предложены и описаны в научной литературе.

Для избежание ошибок и аварий желательно разработать теорию преобразований, эквивалентных в расширенном смысле. До создания полной теории еще далеко. В следующем разделе мы изложим методику проверки сохранения устойчивости и теорию преобразований, эквивалентных в расширенном смысле для частного случая — для дифференциальных уравнений, описывающих линейные системы управления с обратной связью.

§ 7. Преобразования, эквивалентные в расширенном смысле

В теории управления рассматривают отдельно объекты управления и устройства, формирующие управляющие воздействия на эти объекты. Уравнения объектов управления считают заданными, неизменными (это упрощает дальнейшее исследование) и допускают, что их можно (для линейных объектов с постоянными коэффициентами) записать в форме Коши:

$$\dot{x} = Ax + Bu. \qquad (40)$$

где x — n-мерный вектор переменных x_1; x_2; ... x_n; при этом чаще всего x_i являются отклонениями от желаемых значений, A — квадратная размера n x n матрица коэффициентов, u — управляющее воздействие (скаляр), B — матрица-столбец коэффициентов при управляющем воздействии (мы рассматриваем случай одного управляющего воздействия; в общем случае управляющих воздействий может быть несколько, но общего случая мы рассматривать не будем); мы не будем также рассматривать влияния возмущающих воздействий.

Управляющее воздействие u формируется в функции от переменных x_1; x_2; ... x_n согласно уравнению

$$W_{n+1}(D)u = W_1(D)x_1 + W_2(D)x_2 + \ldots W_n(D)x_n, \qquad (41)$$

где $W_i(D)$ — полиномы от оператора дифференцирования $D = \frac{d}{dt}$. Их стараются подобрать так, чтобы процессы в системе (40) — (41) протекали наиболее желательным образом.

Существует хорошо разработанная теория выбора и вычисления подобных полиномов, являющаяся разделом общей теории оптимального управления. Уравнение (41) называют *законом формирования управляющего воздействия в цепи обратной связи*, [1].

Очень часто вместо полиномов $W_i(D)$ в уравнении (41) используют только постоянные коэффициенты усиления и закон формирования обратной связи принимает более простой вид:

$$u = k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots k_nx_n \qquad (42)$$

или, в матричной форме:

$$u = Kx\,, \qquad (43)$$

где K — матрица-строка постоянных коэффициентов без нулевых элементов.

Подставив (43) в (40), мы убедимся, что изменение переменных $x_i(t)$ в системе (40) — (43) будет описываться системой уравнений:

$$\dot{x} = (A + BK)x\,. \qquad (44)$$

Поскольку выбор матрицы-строки K находится в нашем распоряжении, то мы можем выбрать ее так, чтобы процессы в системе управления протекали наиболее желательным для нас образом. Характеристический полином замкнутой системы равен определителю матрицы λE–A–BK, где E — единичная матрица. Если этот полином гурвицев, то гарантируется устойчивость всех решений $x_1(t)$; ... $x_n(t)$ системы управления (40)—(43).

Надлежащим выбором матрицы-строки K можно обеспечить устойчивость, а также ряд других показателей качества.

На практике очень часто не все переменные x_i можно непосредственно использовать для формирования управляющего воздействия. Поэтому вводят вектор тех переменных y_1; y_2;... y_m, которые действительно можно измерить на выходе объекта управления и использовать для формирования управляющего воздействия. Размерность вектора y, как правило, меньше размерности вектора x, m J n. Лишь в редких случаях $m = n$. Связь между x и y определяется уравнением:

$$y = Hx, \tag{45}$$

где H — прямоугольная матрица размера m x n, где m J n.

В практике расчета систем управления широко используют преобразования, связанные с изменением матрицы H. Это вызвано разными причинами. Как уже указывалось, некоторые из регулируемых переменных с трудом поддаются измерению. Так, например, в системах управления полетом самолета важную роль играет такая переменная, как угол атаки. Она входит в уравнения самолета как объекта управления (в уравнения (40)). В то же время пока не существует достаточно простых и удобных датчиков, которые бы измеряли эту переменную. Об ее величине судят косвенно,— по измерениям других переменных (угла тангажа и его производных). Поэтому такая переменная как угол атаки не может быть непосредственно использована в канале обратной связи.

Кроме того, с целью сокращения числа измерительных приборов и датчиков часто сознательно отказываются от использования ряда переменных в канале обратной связи, заменяя эти переменные на основе уравнений (40) равными им комбинациями других переменных и их производных.

Рассмотрим, для примера, систему управления ориентацией стабилизируемой платформы и ограничимся управлением в одной плоскости. Тогда уравнения объекта управления примут очень простой вид:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \end{aligned}\right\}, \tag{46}$$

где x_1 — угол отклонения платформы от желаемого положения, x_2 — скорость этого отклонения, u — момент, создаваемый исполнительным двигателем и играющий роль управления.

Закон формирования управления можно выбрать в виде:

$$u = -(k_1 x_1 + k_2 x_2) \,. \qquad (47)$$

Уравнение (47) называется уравнением регулятора.

Подставив (47) в (46) и исключив переменную x_2, получим относительно x_1 уравнение:

$$(D^2 + k_2 D + k_1) x_1 = 0 \,, \qquad (48)$$

решение которого имеет вид:

$$x_1 = e^{-0{,}5 k_2 t} \left(C_1 \sin \sqrt{k_1 - \frac{k_2^2}{4}} t + C_2 \cos \sqrt{k_1 - \frac{k_2^2}{4}} t \right) . \qquad (49)$$

Мы убеждаемся, что при $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$ система управления устойчива, а за счет изменения величины коэффициентов k_1 и k_2 можно придать процессам, протекающим в системе управления, те или другие свойства. Так, например, если $k_1 > \frac{k_2^2}{4}$, то функция $x_1(t)$ является затухающим гармоническим колебанием; при $k_1 \le \frac{k_2^2}{4}$ колебаний уже не будет.

Реализация закона управления (47) требует двух датчиков: один измеряет угол отклонения x_1, другой — скорость его изменения x_2. Можно обойтись и одним датчиком, если использовать первое из уравнений (46) и подставить в уравнение (47) вместо x_2 равную ему величину $\dot{x}_1$. Получим вместо уравнения (47) уравнение

$$u = -(k_1 + k_2 D) x_1 \qquad (50)$$

Подставив (50) в (46), получаем снова уравнение (48) с тем же решением (49). Так и должно быть, поскольку подстановка в уравнение (47) вместо x_2 равной ему величины $\dot{x}_1$, безусловно является преобразованием эквивалентным, в классическом смысле. Отметим, что в данном случае это преобразование эквивалентно и в расширенном смысле: нетрудно проверить, что как система уравнений (46) — (47), так и система (46) — (50) сохраняют устойчивость при вариациях любых своих коэффициентов. Замена переменной x_2 на равную ей переменную $\dot{x}_1$ не изменила ни решения (49), ни окрестности решения. Решения уравнений, находящихся в окрестности уравнения (48), мало отличаются от решения (49). Однако в других случаях замена переменных может привести к коренным изменениям окрестности системы.

Заменив регулятор (47) на регулятор (50), мы изменили матрицу *H*, входящую в уравнение (45). Если используется регулятор (47), то матрица *H* имеет вид

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1; & 0 \\ 0; & 1 \end{pmatrix} \tag{51}$$

т. е. является единичной матрицей, а если используется регулятор (50), то она становится матрицей-строкой:

$$H_2 = (1;\ 0)\,. \tag{52}$$

Однако характеристический полином системы уравнений (40) — (43) не зависит от матрицы *H*. Характеристический полином, а вместе с ним и все решения системы уравнений, зависят только от матриц *A*, *B* и *K*. Поэтому эквивалентные в классическом смысле преобразования, изменяющие число “реальных выходов”, т. е. матрицу *H*, широко использовались и до сих пор используются в практике расчетов систем управления.

Теперь рассмотрим подробнее те математические неожиданности, которые подстерегают нас при этих привычных, повсеместно используемых преобразованиях.

Рассмотрим объект управления, описываемый системой трех дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1u \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2u \\ \dot{x}_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3u \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

при законе формирования управляющего воздействия (регу-лятора)

$$u = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 . \tag{54}$$

Пусть коэффициенты k_1, k_2 и k_3 выбраны так, что процессы в системе управления протекают желательным для нас образом. Пусть система управления устойчива и сохраняет устойчивость при вариациях параметров. Этого легко добиться выбором k_1, k_2 и k_3.

Предположим теперь, что мы решили сократить число измерительных приборов и датчиков и решили не использовать в канале обратной связи переменные x_3 и x_2, заменив их на основании уравнений (53) на переменную x_1 и ее производные.

Для этого достаточно исключить из уравнений (53) и (54) переменные x_2 и x_3 с помощью эквивалентных преобразований. Такое исключение является трудоемким делом, требующим большого терпения. Однако если терпеливо и тщательно проделать все выкладки, то придем относительно оставшихся двух переменных x_1 и u к двум уравнениям вида:

$$\left(m_1 D^3 + m_2 D^2 + m_3 D + m_4\right) x_1 = \left(m_5 D^2 + m_6 D + m_7\right) u \tag{55}$$

$$\left(m_8 D + m_9\right) u = \left(m_{10} D^2 + m_{11} D + m_{12}\right) x_1 \quad , \tag{56}$$

в которых каждый из коэффициентов m_1; m_2; ... m_{12} зависит от коэффициентов a_{11}, a_{12}; ...a_{33}; b_1, b_2, b_3, k_1; k_2; k_3 исходной системы (53) — (54). Так, например, коэффициент m_8 равен:

$$m_8 = \frac{b_3(a_{31}k_2 - a_{32}k_1)}{a_{31}(a_{12}a_{31} + a_{22}a_{32}) - a_{32}(a_{11}a_{31} + a_{22}a_{32})}, \tag{57}$$

а коэффициент m_{10} будет равен m_8/b_3.

Характеристический полином системы уравнений (55) — (56) будет в общем случае полиномом четвертой степени:

$$n_4\lambda^4 + n_3\lambda^3 + n_2\lambda^2 + n_1\lambda + n_0 \quad , \tag{58}$$

коэффициенты которого зависят от коэффициентов m_1; ... m_{12} системы (55)—(56), а тем самым и от коэффициентов a_{11}; ... a_{33}; b_1; b_3 исходной системы (53)—(54).

Так, например, коэффициент n_4 равен: $n_4 = m_1 m_8 - m_5 m_{10}$. Выражая коэффициент n_4 полинома (58) через коэффициенты исходной системы (53)—(54), нетрудно убедиться, что при многих коэффициентах исходной системы коэффициент при старшей степени полинома (58) всегда обращается в нуль, поскольку выполняется соотношение: $m_1m_8 - m_5m_{10} = 0$.

Таким образом, полином (58) оказывается в действительности полиномом третьей степени и он полностью совпадает с характеристическим полиномом исходной системы (53)—(54), который можно получить без исключения переменных x_2 и x_3 непосредственно по формулам линейной алгебры.

Так и должно быть, поскольку выполненное без ошибок исключение переменных является эквивалентным (в классическом смысле) преобразованием, а характеристический полином при таких преобразования не меняется.

Однако обращение в нуль коэффициента при старшей, четвертой, степени полинома (58) происходит лишь тогда, когда все коэффициенты системы уравнений (55)—(56), а значит и все коэффициенты исходной системы (53)—(54) в точности равны своим номинальным значениям. Если коэффициенты системы (55)—(56) или исходной системы (53)—(54) отклоняются в ходе эксплуатации от своих номинальных значений даже на сколь угодно малые величины, то равенства $n_4 = 0$ в полиноме (58) уже может не быть, он станет полиномом четвертой степени, а знак старшего коэффициента n_4 будет зависеть от непредсказуемых вариаций параметров. Если знак старшего коэффициента в полиноме (58) будет при этом противоположен знаку остальных коэффициентов, то полином (58) уже не будет гурвицевым и система (55)—(56) потеряет устойчивость.

Таким образом, мы пришли к важному выводу: исключение переменных x_2 и x_3 из уравнений (53)—(54), если оно выполнено правильно и без ошибок, является преобразованием, эквивалентным в классическом смысле, но совсем не обязательно — в расширенном.

Система уравнений (55)—(56), появившаяся в результате исключения x_2 и x_3 из системы (53)—(54), эквивалентна системе (53)—(54) в классическом смысле и может быть не эквивалентна — в расширенном. Решения этих систем совпадают, но окрестности решений могут быть различны.

Повторяя подобное исследование для объектов управления произвольного порядка вида (40) при законе формирования управляющего воздействия (43), придем к следующему результату: если в формировании управляющего воздействия не участвуют две или более переменных и их заменяют равными им комбинациями других переменных и их производных, то такое преобразование будет эквивалентным в классическом смысле, но не обязательно в расширенном. Если в формировании управляющего воздействия не участвует одна из переменных x_i и ее заменяют на равную ей комбинацию других переменных и их производных, то такое преобразование будет эквивалентным и в классическом смысле, и в расширенном. Доказательство приводилось в [1] (цифра в квадратной скобке означает номер в списке литературы, приведенном в конце книги).

Теперь делается понятным рассмотренный ранее пример с системами уравнений (25)—(26) и (33)—(35). Мы теперь убедились, что такие системы не являются редким исключением. Их очень много и натолкнуться на них очень легко: достаточно в любом объекте управления вида (40) не ниже третьего порядка с регулятором (43) исключить не менее двух переменных с помощью эквивалентных в классическом смысле преобразований и мы можем прийти к системе, которая будет эквивалентна исходной в классическом смысле, но не в расширенном. Таких систем много, а встреча с каждой такой системой может привести к аварии, если не проделать дополнительного поверочного расчета, а ограничиться традиционной проверкой характеристического полинома или матрицы коэффициентов при записи в форме Коши.

Приведем пример с объектом управления четвертого порядка, ранее уже приводившийся в [2].

Объект управления описывается системой уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 + u\\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 2u\\ \dot{x}_3 &= -x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 + u\\ \dot{x}_4 &= -3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2u\end{aligned}\right\} \qquad (59)$$

и управляющее воздействие формируется по закону

$$u = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4. \qquad (60)$$

Характеристический полином системы уравнений (59)—(60) имеет вид

$$\lambda^4 + 15\lambda^3 + 6\lambda^2 + 2\lambda + 36 \qquad (61)$$

и является гурвицевым. Система (59) — (60) устойчива, и можно проверить, что она сохраняет устойчивость при вариациях любых своих коэффициентов.

Если же в формировании управляющего воздействия участвуют только переменные x_1 и x_2, то переменные x_3 и x_4 нужно исключить из уравнений (59)—(60), пользуясь, разумеется, только эквивалентными (в классическом смысле) преобразованиями. Выполнив эти преобразования, приведем уравнения (59)—(60) к виду

$$\left.\begin{aligned}&(D^2+D+2)x_1-(3D^2+7D+2)x_2=-(5D+6)u\\&(D^2+2)x_1-(2D^2+2)x_2=-(3D-1)u\end{aligned}\right\}\qquad(62)$$

$$(7D+10)u=-(D^2+2)x_1+(4D^2+11D)x_2\,.\qquad(63)$$

Характеристический полином системы уравнений (62)—(63), как можно проверить, сохраняет вид (61) и остается гурвицевым. Это еще раз подтверждает, что системы уравнений (59)—(60) и (62)—(63) эквивалентны в классическом смысле. Однако если, например, в первом из уравнений (62) коэффициент при D^2x_1 вместо единицы из-за неизбежного малого дрейфа параметров объекта управления примет значение $1+e$, то характеристический полином системы (62)—(63) станет равным

$$-2\varepsilon\lambda^5+(1-3\varepsilon)\lambda^4+15\lambda^3+6\lambda^2+2\lambda+36\qquad(64)$$

и при сколь угодно малом $\varepsilon>0$ система станет неустойчивой. Системы (59)—(60) и (62)—(63) являются примером систем, эквивалентных в классическом смысле, но не эквивалентных в расширенном.

Теперь спросим: а как будет вести себя реальная система управления, математическими моделями которой являются эквивалентные в классическом смысле системы уравнений (59)—(60) и (62)—(63)? Здесь все зависит от того, как в действительности формируется управляющее воздействие. Если оно формируется из переменных x_1; x_2; x_3; x_4 по закону (60), то реальная система управления сохранит устойчивость при вариациях любых своих параметров. Если управляющее воздействие формируется только из переменных x_1 и x_2 и их производных по эквивалентному (в классическом смысле) с (60) закону (63), то устойчивость реальной системы может потеряться при сколь угодно малых вариациях некоторых параметров или коэффициентов. Но это опасное свойство не будет поддаваться обнаружению, если математическую модель системы приведут (как это обычно и делается) к форме Коши. Отсюда возникает возможность аварий. Примеры систем, подобных системам (59)—(60) и (62)—(63), приводились в [1], в [3].

Теперь рассмотрим наиболее общий случай, когда в объекте управления (40) управляющее воздействие формируется по закону (41), а связь между переменными x_1; x_2;... x_n; и реальными выходами объекта управления описывается уравнением (45). Здесь также можно сформулировать критерий, выполнение которого гарантирует сохранение устойчивости при вариациях параметров. Критерий этот был разработан автором совместно с М. А. Галактионовым и опубликован в конце книги [1]. Его можно назвать критерием Петрова-Галактионова или П-Г критерием. Критерий этот опирается на материал, изложенный в [1] и касающийся оптимизации систем управления по квадратичным и средне-квадратичным критериям, поэтому в настоящей работе мы его приводить не будем. Отметим лишь, что он состоит в проверке равенства нулю ряда составных матриц, в состав которых входит и матрица H из уравнения (45).

Теперь можно сформулировать следующие критерии, позволяющие для линейных систем управления выделить преобразования, эквивалентные в расширенном смысле. Для общего случая объектов управления (40) с обратной связью (41) и определяемой уравнением (45) матрицей связи H между переменными x_1; ... x_n; и реальными выходами, можно сформулировать следующее утверждение: для того, чтобы преобразование, эквивалентное в классическом смысле, было бы эквивалентным и в расширенном смысле:

1. достаточно, чтобы при преобразовании не изменялась матрица H в уравнении (45).

2. необходимо и достаточно, чтобы преобразованная система уравнений удовлетворяла критерию П-Г из книги [1].

Если обратная связь формируется по закону (43) и с помощью эквивалентных в классическом смысле преобразований исключаются p переменных x_i и они заменяются на равные им комбинации оставшихся переменных и их производных, то такое преобразование будет эквивалентным в расширенном смысле, если $p < 2$, и может не быть преобразованием, эквивалентным в расширенном смысле, если $p \geq 2$.

Отметим, что данные результаты установлены только лишь для систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами частного вида, — для систем уравнений, описывающих системы управления. Подобные системы состоят из уравнений объекта управления (40) и уравнений регулятора (41). Для общего случая системы нескольких дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами различных порядков проблема различения преобразований эквивалентных и не эквивалентных в расширенном смысле пока еще не получила решения и является интересной и важной темой для научного исследования.

§ 8. Предотвращение аварий и катастроф

В § 6 мы рассказывали об авариях, причиной которых являются недостатки традиционных методов проектирования и расчета систем управления, недоучет различий между преобразованиями, эквивалентными в классическом смысле и в расширенном. Если это различие осознано, то избежать аварий несложно.

Можно, например, вычислить характеристический полином системы управления по уравнениям, записанным относи-тельно тех переменных, в функции от которых реально формируется управляющее воздействие (переменных y_1, y_2, ... y_n из уравнения (45)). Вычислив полином и убедившись, что он гурвицев, нужно дополнительно проверить:

1. Что ни один из корней характеристического полинома не лежит на комплексной плоскости вблизи мнимой оси. Это — обычная проверка, давно рекомендуемая в учебниках по автоматическому управлению, используемая во всех проектно-конструкторских организациях, поэтому говорить о ней более подробно нет необходимости. Зато следующие две проверки в учебной литературе обычно не упоминаются, хотя они также важны и необходимы.

2. Необходимо проверить, что степень характеристического полинома не оказалась меньше суммы порядков дифференциальных уравнений, входящих в систему.

3. Необходимо проверить, что ни один из коэффициентов характеристического полинома не оказался намного (на два-три порядка) меньше остальных.

Важность второго пункта иллюстрирует примеры систем (25)—(26) и (55)—(56). Если степень характеристического полинома меньше суммы порядков дифференциальных уравнений, входящих в систему, то это может говорить о том, что старший коэффициент оказался разностью двух одинаковых чисел и по этой причине обратился в нуль. Так, в системе уравнений (55)—(56), которая получилась в результате исключения переменных x_1 и x_2 из системы (53)—(55) старший коэффициент (коэффи- циент при старшей степени переменной) характеристического полинома (коэффициент при λ^4) обратился в нуль потому, что он равен $m_1m_8–m_5m_{10}$, а в системе (55)—(56) имеет место равенство $m_1m_8 = m_5m_{10}$. Однако подобное равенство может иметь место только в том случае, если параметры реальной, воплощенной “в металле” системы управления в точности равны параметрам математической модели. При вариациях параметров точное равенство может нарушиться, в характеристическом полиноме появится член $n_4\lambda^4$ четвертой степени с малым коэффициентом n_4. Если $n_4 > 0$, то система будет устойчива. Однако в ходе эксплуатации при малых вариациях коэффициентов m_1, m_8, m_5 и m_{10} разность $m_1m_8–m_5m_{10}$ может изменить знак и устойчивость исчезнет.

Важность третьего пункта также может быть проиллюстрирована на рассмотренном нами примере системы (25)—(26). Если вариации коэффициентов таковы, что характеристический полином остался гурвицевым полиномом четвертой степени, но с малым коэффициентом при старшем члене, то это может говорить о том, что этот коэффициент оказался малой разностью больших коэффициентов исходной системы (25)—(26) и поэтому при их вариациях он может изменить свой знак. Изменение знака будет означать потерю устойчивости у реальной системы.

Мы убеждаемся, что сохранение порядка при преобразованиях дифференциальных уравнений не обязательно гарантирует эквивалентность в расширенном смысле. Необходимо проверить еще и тот случай, когда порядок не изменяется, но некоторые из коэффициентов оказываются малыми по сравнению с остальными.

Недостаток предлагаемого подхода заключается в том, что при расчетах по реальным выходам, без приведения к форме Коши, нельзя использовать стандартное программное обеспечение.

Поэтому возможен и другой подход: математическую модель объекта управления приводят к форме Коши, выписывают матрицу H из уравнения (45), а по окончании расчета дополнительно проверяют — выполнены ли условия критерия Петрова-Галактионова (П-Г критерия), приведенного в книге [1].

Такая проверка наиболее надежно гарантирует от аварий, происходящих от потери устойчивости, но для удобства ее применения необходима разработка программного обеспечения проверки П-Г критерия, поскольку проверка его “вручную” в большинстве случаев не реальна.

Отметим, что если условия П-Г критерия не выполнены, то в той же книге [1] показано, какие именно изменения следует внести в проектируемую систему управления для того, чтобы она сохраняла устойчивость при вариациях параметров.

Мы убеждаемся, что если различие между преобразованиями, эквивалентными в классическом смысле и в расширенном осознано, если опасность аварий, происходящих от неразличения этих понятий осознана, то техногенных аварий и катастроф можно избежать, и причем избежать довольно простыми средствами.

Главная опасность заключается в том, что в большинстве проектно-конструкторских организаций до сих пор не осознали необходимость усовершенствования традиционных методов расчета и проектирования. Несмотря на то, что об этих методах неоднократно говорилось и докладывалось на авторитетных научных семинарах, несмотря на то, что теоретические основы методов дополнительной проверки, страхующей от аварий, опубликованы в известной книге [1], а предупреждения о неполноте традиционных методов расчета и проектирования несколько раз публиковались на станицах научных и технических журналов [3, 4, 5], все же усовершенствованные методы проверки еще не вошли в повседневную практику проектно-конструкторских организаций и поэтому возможность неоправданных аварий не ликвидирована, она еще существует.

Будет досадно, если первой внедрит у себя усовершенствованные методы расчета какая-либо зарубежная фирма. Опираясь на публикации в российской технической литературе, это в принципе можно сделать. Дополнительная работа по программному обеспечению усовершенствованных методов не очень велика.

Между тем фирма, первой внедрившая у себя усовершенствованные методы расчета, получит существенные преимущества в конкурентной борьбе. Она может с полным правом утверждать, что выпускаемая ею продукция, ее системы и устройства, будут более безопасны, чем продукция фирм-конкурентов, довольствующихся традиционными методами. Это дает серьезные преимущества в конкурентной борьбе за рынки сбыта.

§ 9. Нелинейные системы. Гарантирует ли существование функции Ляпунова сохранение устойчивости при вариациях параметров?

Об устойчивости решений систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами судят по корням характеристического полинома. Для систем нелинейных уравнений одним из наиболее распространенных и сильных методов проверки устойчивости является построение и исследование функций Ляпунова. Эти функции были названы в честь великого русского математика

А. М. Ляпунова (1856–1918), который в 1892 году разработал новые методы проверки устойчивости.

Изложим очень кратко самые основные свойства функции Ляпунова. Пусть задана система нелинейных автономных уравнений в форме Коши:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1;\dots x_n) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\frac{dx_1}{dt} = f_n(x_1;\dots x_n), \end{aligned}\right\} \qquad (65)$$

где $f_i(x_1; \dots x_n)$ — в общем случае нелинейные функции переменных x_1; $\dots x_n$, и пусть системе (65) удовлетворяет нулевое решение. Будет ли это решение $x_1 = x_2 \dots x_n = 0$ устойчиво? Для определенности будем в дальнейшем под устойчивостью понимать асимптотическую устойчивость, когда решения, удовлетворяющие при $t = 0$ начальным условиям, мало отличающимся от нулевых: $x_1(0) = d_1$; ... $x_n(0) = d_n$, с течением времени стремятся к нулю.

Введем теперь в рассмотрение функцию V переменных x_1; $\dots x_n$, которая равна нулю только тогда, когда все переменные равны нулю, и положительна при всех других комбинациях значений переменных.

Примером такой функции может служить

$$V = x_1^2 + \dots x_n^2. \qquad (66)$$

Вычислим теперь полную производную функции V по времени на решениях системы (65). Такую производную, следуя терминологии, принятой в теории устойчивости, называют "*производной функции V в силу системы (65)*". Для вычисления используем известную формулу для полной производной:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \dots\dots \frac{\partial V}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt} \qquad (67)$$

и подставим вместо каждой из производных $\frac{dx_i}{dt}$ их значения из уравнений (65). Получим для “*производной в силу системы*” формулу

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot f_1(x_1;\dots x_n) + \dots\dots \frac{\partial V}{\partial x_n} \cdot f_n(x_1;\dots x_n) \qquad (68)$$

Пусть теперь функция V такова, что производная (68) для всех $x_i \neq 0$ отрицательна. Такую функцию назовем функцией Ляпунова. В 1892 году А. М. Ляпунов доказал, что если такая функция существует, то нулевое решение системы (65) асимптотически устойчиво.

Доказательство А. М. Ляпунова допускает наглядную интерпретацию: если на решениях системы (65) производная функции V отрицательна, то функция V с течением времени будет только убывать, стремясь к своему наименьшему значению, равному нулю, а поскольку это наименьшее значение достигается при $x_1 = x_2 \ldots x_n = 0$, то и все переменные x_i будут стремиться к нулю.

В качестве простейшего примера рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \end{aligned}\right\}, \tag{69}$$

нулевое решение которой безусловно устойчиво, поскольку все решения системы (69) имеют вид: $x_1 = c_1 e^{-t}$; $x_2 = c_2 e^{-t}$.

В качестве функции Ляпунова можно взять функцию

$$V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \tag{70}$$

(квадратичную форму переменных x_1 и x_2). Ее производная $\dot{V} = \dot{x}_1 \cdot x_1 + \dot{x}_2 \cdot x_2$ в силу системы (69) приобретает вид

$$\dot{V} = -x_1^2 - x_2^2 \tag{71}$$

и для любых значений переменных кроме $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ является отрицательной. Отсюда следует, что нулевое решение уравнений (69) устойчиво. Если бы не могли непосредственно найти общее решение уравнений (69), то мы могли бы сделать заключение об устойчивости на основании исследования функции Ляпунова (70).

Мы изложили наиболее простую часть теории Ляпунова. Существуют функции Ляпунова, производные которых “в силу системы” удовлетворяют более слабому условию, они не обязательно отрицательны, а только не положительны. Эти и другие, более тонкие, условия рассматриваются в многочисленных работах, посвященных теории устойчивости [6, 7, 8, 9, 10]. Подчеркнем главное: если найдена та или другая функция Ляпунова, то вопрос об устойчивости нулевого решения нелинейной системы решен, а устойчивость любого решения системы можно свести к исследованию устойчивости нулевого решения. Поэтому, несмотря на то, что отыскать функцию Ляпунова очень нелегко, поскольку общих методов ее нахождения не существует, поиску функций Ляпунова, разработке теории устойчивости, основанной на исследовании этих функций посвящены сотни книг и статей многочисленных исследователей. Так, например, только в небольшой книге Е. А. Барбашина [9] даны ссылки на 190 работ 128 авторов, посвященных этим функциям.

Однако из предыдущего изложения мы убедились, что для обоснованного суждения о реальном поведении исследуемой системы необходимо иметь возможность судить не только об устойчивости решения, но и о том, сохраняется ли устойчивость при неизбежных на практике вариациях параметров. Поэтому поставим важнейший вопрос: гарантирует ли существование функции Ляпунова сохранение устойчивости нулевого решения хотя бы при сколь угодно малых вариациях параметров?

К сожалению, ответ на этот вопрос может быть только отрицательным. Действительно, для отыскания функции Ляпунова исследуемую систему уравнений приводят обычно к форме Коши (65). А мы уже показали, что в зависимости от вида исходных, непосредственно вытекающих из законов физики или теоретической механики уравнений системы, преобразование к форме Коши может не оказаться преобразованием, эквивалентным в расширенном смысле (даже если оно вполне эквивалентно в классическом смысле).

Все это удобно пояснить на примере уже рассмотренной системы уравнений (25)—(26). После приведения ее к форме Коши она переходит в уравнения (33)—(35). Подставив (35) в (33), получим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -3x_1 - x_3 - x_4 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -x_3 - 2x_4 \end{aligned}\right\} \qquad (72)$$

Характеристический полином этой системы имеет вид (28) и ее нулевое решение заведомо устойчиво. Кроме того, относительно устойчивых линейных систем доказана общая теорема: такие системы всегда имеют функцию Ляпунова в виде квадратичной формы — в случае системы (72) это будет квадратичная форма от переменных x_1, x_3, x_4.

Но мы убедились еще в § 4, что исходная система (25)—(26) может терять устойчивость даже при сколь угодно малых вариациях некоторых своих коэффициентов. Следовательно, даже для линейных систем существование функции Ляпунова не гарантирует от потери устойчивости даже при сколь угодно малых вариациях. Тем более нет возможности гарантировать сохранение устойчивости при вариациях параметров для нелинейных систем. Разница заключается только в поведении систем после потери устойчивости: для линейных систем потеря устойчивости означает неограниченное возрастание переменных с течением времени. В нелинейных системах (а, как известно, нелинейные уравнения более полно описывают поведение реальных физических объектов) неограниченного возрастания переменных с течением времени при потере устойчивости не будет. Однако и в нелинейных системах потеря устойчивости, как правило, сопровождается выходом переменных за допустимые пределы, потерявшая устойчивость система становится неработоспособной и может быть причиной тяжелой аварии.

Традиционные, используемые сегодня во всех проектно-конструкторских организациях методы проверки устойчи-вости, основанные, в частности, и на построении функции Ляпунова, могут дать неверный ответ на вопрос о сохранении устойчивости при неизбежных на практике вариациях параметров и поэтому могут стать причиной опасных аварий.

Для предупреждения ошибок и аварий традиционную методику исследования устойчивости следует усилить дополнительными проверками, о которых уже говорилось в предыдущих разделах.

§ 10. Определения и теоремы

В предыдущих разделах мы использовали свободный стиль изложения, без разделения на определения и теоремы. Вопрос о стиле изложения не является вопросом принципиальным; при выборе стиля ориентируются на вкусы и пристрастия читателя, стремясь к наибольшей доступности и легкости понимания. Напомним, что такой выдающийся ученый, как академик Алексей Николаевич Крылов (1863–1945) в своих исследованиях вообще не использовал слова “теорема”, и это не помешало А. Н. Крылову быть общепризнанным классиком прикладной математики. Для удобства тех читателей, которые привыкли к другому стилю, попытаемся изложить некоторые результаты предыдущих разделов на языке определений и теорем.

Автор заранее приносит извинения, если эта попытка не окажется удачной.

Будем рассматривать системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами и перенумеруем все коэффициенты, входящие в рассматриваемую систему, от m_1 до m_k. Примером такой системы может служить система уравнений (55)—(56) с двенадцатью перенумерованными коэффициентами.

Определение 1. e-окрестностью рассматриваемой системы назовем множество систем дифференциальных уравнений той же структуры, коэффициенты которых, обозначаемые через $\overline{m}_1$, подчинены неравенствам

$$m_i(1-\varepsilon_i) \leq \overline{m}_i \leq m_i(1+\varepsilon_i), \qquad (73)$$

где e_i — числа, малые по сравнению с единицей.

Теорема 1. Если рассматриваемая система устойчива и вариации ее коэффициентов удовлетворяют неравенствам (73), то для того, чтобы она сохраняла устойчивость при вариациях коэффициентов необходимо и достаточно, чтобы в ее e-окрестности находились одни устойчивые системы.

Доказательство. Если в e-окрестности находится хотя бы одна неустойчивая система, то при вариациях коэффициентов рассматриваемой системы они могут совпасть с коэффициентами именно этой неустойчивой системы, а это означает, что исходная система после вариации коэффициентов потеряет устойчивость. Это доказывает необходимость условия теоремы. Достаточность условия очевидна — если в e-окрестности нет ни одной неустойчивой системы, то при любых вариациях, удовлетворяющих неравенству (73), рассматриваемая система сохранит устойчивость.

Данная теорема придает более точную формулировку утверждению, высказанному в § 4. Из этой теоремы непосредственно вытекают следствия, уже рассмотренные нами: поскольку свойство сохранения устойчивости зависит не от самой системы, а от ее e-окрестности, то оно может появляться и исчезать при эквивалентных (в классическом смысле) преобразованиях, не изменяющих устойчивости рассматриваемой системы. Отсюда вытекает необходимость введения нового математического понятия — эквивалентности в расширенном смысле, о котором уже говорилось в предыдущих разделах.

Для нелинейных систем в определение e-окрестности и в теорему 1 следует внести небольшое уточнение. Ограничимся рассмотрением автономных систем, т. е. систем, в которые время t явно не входит.

В автономной системе нелинейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами перенумеруем все коэффициенты. Примером может служить система

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= m_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= m_2 x_1 + m_3 x_2 + m_4 x_2^3 \end{aligned}\right\} \qquad (74)$$

Предположим, что рассматриваемая система имеет устойчивое нулевое решение. В дальнейшем исследуется сохранение устойчивости этого решения при вариациях коэффициентов.

Определение 2. e -окрестностью рассматриваемой системы назовем множество систем дифференциальных уравнений той же структуры, имеющих нулевое решение; коэффициенты каждой системы, обозначаемые через $\overline{m}_i$, подчинены неравенствам (73).

Теорема 2. Для сохранения устойчивости нулевого решения при вариациях коэффициентов необходимо и достаточно, чтобы в e-окрестности исследуемой системы находились только системы, у которых нулевое решение устойчиво.

Доказательство теоремы 2 вполне аналогично доказательству теоремы 1.

§ 11. Проблема сохранения устойчивости

Обеспечение сохранения устойчивости при вариациях параметров тесно связано с теорией оптимального управления. Еще в 60-е годы получила развитие теория синтеза оптимальных управляющих воздействий в каналах обратной связи, теория синтеза оптимальных регуляторов, которые обеспечивали значительное улучшение качества управления по сравнению с ранее используемыми регуляторами и системами.

Использование оптимальных регуляторов, замена ими прежних систем управления могли принести большой экономический и оборонный эффект и поэтому теория оптимального управления интенсивно разрабатывалась как в нашей стране, так и за рубежом. Вышло несколько монографий, посвященных синтезу оптимальных регуляторов (книги [11, 12, 13, 14]. Однако при реализации оптимальных систем управления быстро стало обнаруживаться, что они в ряде случаев способны терять устойчивость даже при очень малых отклонениях параметров регулятора или объекта управления от расчетных значений. Разумеется, обнаружение подобных случаев, каждый из которых грозил серьезной аварией, сразу подрывало все доверие к теории оптимального управления, перекрывало возможности ее практического применения, тем более, что причина потери устойчивости оставалась не раскрытой. Долгое время считалось, что появление регуляторов, теряющих устойчивость при вариациях параметров, зависит от недостатков используемых методов синтеза оптимальных систем управления, и поэтому продолжались поиски таких методов синтеза, которые обеспечивали бы наилучшее возможное качество управления и в то же время гарантировали сохранение устойчивости при неизбежных на практике вариациях параметров.

Только с 1964 по 1973 год было опубликовано четыре монографии, посвященные новым методам синтеза оптимальных систем, но неизменно оказывалось, что и новые методы обладали теми же недостатками, что и старые — не гарантировали от потери устойчивости.

Перелом произошел в 1973 году. В начале года была опубликована статья П. В. Надеждина [15], в очередной раз раскрывшая, что еще один, недавно предложенный алгоритм синтеза оптимальных систем тоже не гарантирует от потери устойчивости при вариациях параметров и это рассматривалось автором статьи как недостаток алгоритма, который можно устранить, но в том году в монографии [16] было показано, что на самом деле алгоритмов, свободных от этого недостатка, вообще не существует, поскольку минимум критерия качества часто лежит на границе устойчивости и никакой алгоритм этого отменить не сможет. Отсюда следовало, что нужно прекратить поиски несуществующего алгоритма, а сохранение устойчивости при вариациях параметров рассматривать как дополнительное требование, за реализацию которого нужно заплатить жертвой части критерия качества.

Поясним сказанное на примере. В работах [11, 16, 17] рассматривались односвязные системы управления, математической моделью которых является дифференциальное уравнение вида

$$A(D)x = B(D)u + \varphi(t), \qquad (75)$$

где $A(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots . a_0$;

$B(D) = b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + \ldots \ldots b_0$ — полиномы от оператора дифференцирования $D = \frac{d}{dt;}$,

x — регулируемая переменная,
u — управляющее воздействие,
$j(t)$ — возмущающее воздействие.

Как правило, возмущающее воздействие является не полностью известным нам стационарным случайным процессом, относительно которого чаще всего известны лишь его статистические характеристики и в частности — спектральная плотность мощности, которую часто коротко называют спектром процесса $j(t)$. Спектр процесса является четной функцией от переменной w — частоты. Его вычисляют на основе обработки наблюдений за возмущающими воздействиями, а затем аппроксимируют дробно-рациональной четной функцией:

$$S_{\varphi} = \frac{a_p \omega^{2p} + a_{p-1} \omega^{2p-2} + \ldots.. a_0}{b_q \omega^{2q} + b_{q-1} \omega^{2q-2} + \ldots\ldots b_0}. \qquad (76)$$

Коэффициенты a_{i} и b_{i} в формуле (76) подбирают из условия, чтобы функция (76) возможно меньше отличалась от экспериментальных данных о спектре в интересующей нас полосе частот. Более подробные сведения о случайных процессах, их спектрах, о полосах частот, которые существенны для той или иной системы, читатель может найти в книге [1]. Там же приведены и алгоритмы синтеза оптимального регулятора, математической моделью которого является дифференциальное уравнение

$$W_1(D)u = W_2(D)x, \qquad (77)$$

где $W_1(D)$ и $W_2(D)$ — полиномы от оператора дифференцирования. Этот регулятор должен обеспечивать устойчивость системы (75) — (77) и минимум среднеквадратичного критерия качества:

$$J = m^2 < x^2 > + < u^2 >, \qquad (78)$$

где $<x^2>$ и $<u^2>$ являются средними квадратами переменных x и $u(t)$ (т. е. $< x^2 >= \lim\limits_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2 dt$ и аналогично $< u^2 >= = \lim\limits_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt)$, а постоянное число m^2 является множителем Лагранжа. Критерий (78) отражает как требования к качеству регулирования, так и ограничения на величину уп-равляющего воздействия. Более подробные сведения о критерии качества (78), о выборе множителя Лагранжа m^2 приведены в уже упоминавшейся книге [1]. Там же приведены и достаточно сложные алгоритмы синтеза оптимального регулятора, т. е., собственно, вычисления коэффициентов операторных полиномов в уравнении (77). Для этих алгоритмов составлено хорошее программное обеспечение, которое позволяет быстро привести все необходимые вычисления и получить математическую модель регулятора, которая затем воплощается в реально работающее устройство, обеспечи-вающее улучшение качества управления.

Приведем простой пример.

Рассмотрим объект управления первого порядка

$$4Dx = (D+1)u + \varphi(t) \qquad (79)$$

с критерием качества $J = 9 < x^2 > + < u^2 >$ и возмущающим воздействием *j(t),* спектральная плотность мощности которого хорошо аппроксимируется формулой:

$$S_\varphi = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+\omega^2}. \qquad (80)$$

Выполнив расчет по алгоритму, приведенному в [1], убедимся, что минимум выбранного критерия качества обеспечит регулятор

$$(3D-5)u = 12(D+4)x. \qquad (81)$$

Обеспечиваемое этим регулятором значение критерия качества равно 0,4336 и является наименьшим из всех возможных. Регулятор (81) обеспечивает устойчивость решений системы уравнений (79)—(81), но эта устойчивость нарушается, если некоторые из параметров объекта управления (т. е. некоторые коэффициенты его математической модели (79), или некоторые из коэффициентов математической модели регулятора (81)) отклоняются от расчетных значений даже на сколь угодно малые величины.

Разумеется, отсюда следует, что регулятор (81) для практического использования совершенно не пригоден. В то же время нетрудно проверить, что регулятор (81) действительно обеспечивает минимум избранного нами критерия качества. Никакой другой регулятор другой структуры, или той же структуры, но с другими коэффициентами равного или лучшего значения критерия качества обеспечить не может. Вся беда заключается в том, что этот минимум лежит на границе устойчивости и никакой алгоритм расчета не может этого изменить.

Несколько позже, в монографии [17] был приведен простой критерий того, что минимум критерия качества не лежит на границе устойчивости. Критерием является выполнение неравенства

$$p \geq m + q - 1. \tag{82}$$

Позднее это неравенство получило в технической литературе название критерия Ю. Петрова. В этом неравенстве m — это степень полинома $B(D)$ в уравнении объекта управления (75), p и q — степени числителя и знаменателя в аналитической аппроксимации спектральной плотности мощности (76). Невыполнение критерия Ю. Петрова (82) свидетельствует о том, что минимум критерия качества (78) лежит на границе устойчивости и поэтому регулятор, доставляющий минимум критерию качества (78), не может обеспечить сохранения устойчивости даже при сколь угодно малых вариациях параметров и фактически будет совершенно не работоспособен. Так, в рассматриваемом нами примере с объектом управления (79) и спектром возмущающих воздействий (80) имеем m = 1, p = 0, q = 1, критерий Ю. Петрова не выполняется, и, следовательно, минимум критерия качества (78) лежит на границе устойчивости. Поэтому не удивительно, что система уравнений (79)—(81) не сохранила устойчивости даже при сколь угодно малых вариациях параметров. Для того, чтобы устойчивость сохранялась, необходимо пожертвовать частью критерия качества. Неравенство (82) подсказывает, что для этого можно изменить аналитическую аппроксимацию спектральной плотности мощности, используемую при расчете регулятора.

Поскольку для объекта управления (79) наиболее существенна полоса низких частот, то можно аппроксимацию (80) заменить на аппроксимацию

$$S_{\varphi} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 + k^2\omega^2}{1 + \omega^2}, \tag{83}$$

которая при умеренных значениях коэффициента k в наиболее существенной для объекта управления (81) полосе частот от w = 0, до w = 0,3 не слишком отличается от аппроксимации (80) (расчет критерия качества, разумеется, ведем по исходной аппроксимации (80), аппроксимация (83) используется только для расчета регулятора, но не при вычислении критерия качества). Чем больше величина коэффициента k в формуле (83), тем шире диапазон вариаций, отклонений параметров объекта управления или регулятора от номинальных значений, не нарушающих устойчивость, но зато тем больше и жертва в критерии качества.

Конкретно для обеспечения устойчивости объекта управления (79) не только при малых, но и при больших отклонениях примеров от расчетных значений достаточно выбрать k = 0,1 (подробные расчеты приведены в книге [1] на стр. 145–147). При этом вместо регулятора (81) получаем регулятор

$$(1{,}9D - 5{,}3)u = (13{,}6D + 48)x, \qquad (84)$$

а критерий качества вместо минимально-возможного значения 0,4336 становится равным 0,4374 или увеличивается на 0,88 %. Такая малая жертва в критерии качества связана с тем, что при выборе новой аналитической аппроксимации спектральной плотности мощности возмущающего воздействия мы следим за тем, чтобы она отличалась от экспериментальных данных по возможности за пределами полосы частот, существенных для той или иной системы (конкретно для системы (79)—(84) существенна полоса частот 0 J w J 0,3; подробности расчета — в книге [1], стр. 145–147).

Опубликование в 1973 году монографии [16] изменило весь путь развития теории оптимального управления: прекратились поиски несуществующего алгоритма, обеспе-чивающего одновременно и минимум критерия качества (78) и гарантию сохранения устойчивости при вариациях параметров. Вместо этого перешли к обеспечению сохранения устойчивости при вариациях параметров как дополнительного требования к системе. Однако почти нигде не указывается, что этот перелом в развитии теории оптимального управления был предложен и обоснован в работах [16] и [17], выполнявшихся в Ленинградском университете (первый метод обеспечения сохранения устойчивости при вариациях параметров был предложен в [16], более совершенный метод был описан в [17], стр. 218–226). Умолчание о работах [16] и [17] выполненных в Ленинградском университете, безусловно, наносит ущерб престижу и авторитету Университета. Но дело не только в приоритете. Из-за этого умолчания наибольшее распространение в практике расчетов получил другой метод обеспечения сохранения устойчивости при вариациях параметров, основанный не на замене аналитической аппроксимации спектральной плотности мощности, а на изменении критерия качества. Вместо критерия (78) вводят критерий

$$J = < u^2 > + m^2 < x^2 > + \lambda_1 < \dot{x}^2 > + \ldots.. \lambda_k < \left[x^{(k)}\right]^2 >, \qquad (85)$$

в котором только первый и второй члены имеют четкий физический смысл, а остальные члены вводятся только для обеспечения сохранения устойчивости при вариациях параметров. Чем больше коэффициенты λ_1; ... λ_k, тем шире диапазон возможных отклонений параметров от номинальных значений, но тем больше и жертва в значении критерия качества (78). Введение критерия (85) вместо (78) фактически эквивалентно изменению аналитической аппроксимации спектра и тоже позволяет обеспечить сохранение устойчивости при вариациях параметров объекта управления или регулятора, но требуемая для этого жертва критерия качества может оказаться существенно большей. Причина заключается в том, что добавление новых членов в критерии (78), превращение его в критерий (85) эквивалентно такому изменению аналитической аппроксимации спектра, которое происходит в неизвестной для нас полосе частот. Если эта полоса оказывается существенной для данной системы, то жертва в критерии качества оказывается более тяжелой, чем при использовании методики, изложенной в книге [17]. Таким образом, замалчивание приоритета Петербургского университета дорого обходится нашей экономике.

Но главное все же было сделано. После опубликования монографий [16] и [17] открылся путь к непосредственному использованию оптимальных регуляторов в промышленности и на транспорте. Теперь оптимальное управление уже не пугало проектантов потерей устойчивости при вариациях параметров, а экономический выигрыш от перехода на оптимальное управление достаточно велик и ощутим.

Многие данные о практическом использовании оптимальных регуляторов, о достигнутой экономии, об улучшении точности систем стабилизации и слежения при переходе на оптимальное управление опубликованы в монографии [18].

Наиболее интересные результаты были получены при исследовании проблемы сохранения устойчивости в ходе оптимизации многомерных объектов управления, математической моделью которых служат векторно-матричные уравнения

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad (86)$$

где x — вектор регулируемых переменных, u — управление, скаляр, A и B — матрицы. Теория оптимального управления позволяет рассчитывать уравнение связи между оптимальным управлением и регулируемыми переменными, причем для очень важного частного случая квадратичного критерия качества эта связь оказывалась очень простой:

$$u = Kx, \tag{87}$$

где K — матрица-строка постоянных коэффициентов усиления. Теория оптимального управления позволяет рассчиты-вать оптимальные значения этих коэффициентов (подробнос-ти — в [1], стр. 206–230), однако в большинстве приложений приходится учитывать, что не все составляющие вектора x доступны для измерения и непосредственного использования в канале обратной связи. Поэтому необходимо учитывать уже упоминавшуюся прямоугольную матрицу

$$y = Hx, \tag{88}$$

которая связывает вектор всех регулируемых переменных x и вектор тех переменных y, которые могут быть измерены и непосредственно использованы в канале обратной связи. Размерность вектора y, как правило, меньше размерности x. Получив уравнение оптимального регулятора (87), его потом все равно необходимо преобразовать к переменным y, пользуясь для этого, разумеется, только эквивалентными преобразованиями.

При анализе сохранения устойчивости оптимальных систем при вариациях коэффициентов математической модели объекта управления (86) или регулятора (87) как раз и обнаружилась ***математическая неожиданность***: выявилось, что сохранение устойчивости при вариациях параметров зависит от того, сколько составляющих вектора y не доступно для измерения, на сколько единиц размерность вектора y меньше размерности вектора x, то есть зависит (в конечном счете) от матрицы H.

Неожиданность и парадоксальность полученного результата заключались в том, что, во-первых, раз все преобразования были эквивалентными, то считалось, что они не могут изменить никаких свойств преобразуемой системы, во-вторых, характеристический полином системы уравнений (86)—(87), а тем самым и все ее решения — не зависят от матрицы H, а целиком определяются матрицами A, B и K (характеристи-ческий полином системы уравнений (86)—(87) является определителем матрицы $\lambda E - A - BK$, не зависящей от матрицы H).

Объяснение парадокса было дано в книге [1], стр. 230. Было указано, что поскольку сохранение устойчивости при вариациях параметров является не свойством самой системы управления, а является свойством ее окрестности, то поэтому оно может изменяться даже при равносильных преобразованиях. Для того, чтобы удостовериться, что спроектированная система не будет терять устойчивости при вариациях параметров, необходимо проверить выполнение критерия Петрова-Галактионова, сформулированного в книге [1], стр. 212–230. Там же, в [1] были даны и рекомендации — если критерий Петрова-Галактионова не выполняется, то какие изменения следует внести в проектируемую систему для того, чтобы она сохраняла устойчивость при вариациях параметров.

Отметим, что зависимость свойства сохранения устойчивости при вариациях параметров от матрицы H не является абсолютно неожиданной. Еще в 1961 году в известной работе американского математика Р. Калмана было показано, что от матрицы H зависит такое свойство системы, как наблюдаемость (более подробно о наблюдаемости рассказано, например, в [1], стр. 187–200). Однако долгое время считалось, что это относится только к наблюдаемости, а свойство сохранения устойчивости решений от матрицы H не зависит, поскольку сами решения от матрицы H действительно не зависят. Исследования, проведенные в [1], показали, что на самом деле все обстоит сложнее и неожиданнее.

Отметим, что в последние десятилетия стало заслуженно уделяться большое внимание проблеме сохранения устойчивости не только при очень малых, но и при конечных вариациях параметров, поскольку для предотвращения техногенной аварийности решение этой проблемы действительно очень важно. Начало исследованиям положила очень интересная работа В. Л. Харитонова [19], в которой рассматривалась следующая проблема.

Предположим, что некоторая система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами имеет характеристический полином

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots a_0, \tag{89}$$

но все коэффициенты этого полинома известны нам только с определенной конечной погрешностью:

$$\bar{a}_i - \varepsilon_i \le a_i \le \bar{a}_i + \varepsilon_i\,. \tag{90}$$

Как проверить, будет ли гурвицевым полином (89), если его коэффициенты удовлетворяют неравенствам (90)? До 1978 года считалось, что для ответа на этот вопрос необходимо проверить знаки вещественных частей корней очень обширного семейства полиномов, поскольку устойчивость может, вообще говоря, потеряться при сложных комбинациях вариаций различных коэффициентов (например, коэффициент a_0 стал больше своего номинального значения, т. е. получил положительную вариацию, коэффициент a_1 получил вариацию отрицательную, коэффициент a_2 положительную и т. д.) Всего оказывалось необходимым проверить 2^{n+1} полиномов, что при больших n очень громоздко. В. Л. Харитонов в своей работе [19] показал, что можно обойтись гораздо меньшим количеством проверок, что существенно упрощает все расчеты. Работа В. Л. Харитонова получила заслуженную известность и была подхвачена многими исследователями как у нас в стране, так и за рубежом. Опубликованы десятки работ, посвященных этой теме. Важность проблемы проверки сохранения устойчивости при вариациях параметров сейчас хорошо осознана.

Однако остается нерешенным важный вопрос: пусть мы установили, что характеристический полином (89) при тех или иных вариациях его коэффициентов остается гурвицевым. Гарантирует ли это, что исходная система дифференциальных уравнений, для которой вычислен этот полином, будет сохранять устойчивость? К сожалению, ответ на этот вопрос может быть только отрицательным. Уже положения, опубликованные в книге [1], показывают, что любое исследование характеристического полинома может не дать нам правильного ответа на вопрос о сохранении устойчивости. Правильность ответа зависит от матрицы H, от которой сам характеристический полином не зависит.

Методика проверки сохранения знака вещественных час-тей корней полинома (89), основанная на работах В. Л. Харитонова, безусловно является полезной, но для того, чтобы она гарантировала правильный ответ на вопрос о сохранении устойчивости при вариациях параметров, она должна быть дополнена. Дополнительная проверка может заключаться в проверке по критерию Петрова-Галактионова, или (в общем случае) в проверке на эквивалентность в расширенном смысле тех преобразований исходной системы уравнений, которые были сделаны при вычислении ее характеристического полинома.

Высказанное в [1] утверждение о возможности возникновения и потери свойства сохранения устойчивости в ходе привычных и повсеместно используемых преобразованиях дифференциальных уравнений первоначально встретило недоверчивое отношение. Данное утверждение показалось слишком необычным и парадоксальным, хотя на самом деле оно непосредственно вытекает из более ранних исследований академика В. В. Румянцева, члена-корреспондента РАН В. И. Зубова, В. И. Воротникова, В. С. Ермолина и др., посвященных исследованию устойчивости по отношению к части переменных. Значимость этих исследований связана с тем, что не во всех случаях важна устойчивость сразу по всем переменным. Так, например, движение снаряда определяется шестью переменными: три из них определяют движение центра тяжести, а оставшиеся три — повороты вокруг системы осей, связанных с центром тяжести. Если одна из переменных отражает угол поворота вокруг продольной оси снаряда, то значение этой переменной не влияет на точность попадания в цель. Движение снаряда по отношению к этой переменной может быть и не устойчивым. Важна устойчивость по остальным переменным

Рассмотрим в качестве примера систему трех дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 - 2x_3 \\ \dot{x}_2 &= 4x_1 + x_2 \\ \dot{x}_3 &= 2x_1 + x_2 - x_3 \end{aligned}\right\} . \qquad (91)$$

Характеристический полином этой системы равен

$$\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1) \qquad (92)$$

и имеет как положительные, так и отрицательные корни, поэтому все решения системы (91) устойчивыми быть не могут. Исследуем устойчивость по переменной x_1. Введем новую переменную $m = x_2 - 2x_3$ и преобразуем систему (91) к новым переменным с помощью эквивалентных (в классическом смысле) преобразований. Поскольку $\dot{\mu} = \dot{x}_2 - 2\dot{x}_3$, то, с учетом второго и третьего из уравнений (91), получаем, что $\dot{\mu} = 4x_1 + x_2 - 2(2x_1 + x_2 - x_3) = -\mu.$ Окончательно получаем относительно переменных x_1 и m уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 + x_1 &= \mu \\ \dot{\mu} + \mu &= 0 \end{aligned}\right\} . \qquad (93)$$

Система (93) имеет характеристический полином $\lambda_2+2\lambda+1$ с корнями $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Поэтому решения $x_1(t)$ и $m(t)$ являются устойчивыми для любых начальных условий, в то время как решения x_2 и $x_3(t)$, как легко проверить, не устойчивы.

Когда подобный пример был впервые рассмотрен В. И. Зубовым, он встретил недоверчивое отношение. Действительно, система (91) является системой связной. Поэтому казалось очевидным, что из неустойчивости x_2 и x_3 будет следовать и неустойчивость x_1. Однако в действительности это не так. В этом легко убедиться непосредственно проинтегрировав систему (91) с начальными условиями $x_1(0) = x_{10}$; $x_2(0)= x_{20}$; $x_3(0) = x_{30}$.

Получим:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = x_{10}e^{-t} + (x_{20} - 2x_{30})te^{-t} \\ x_2 = 2(x_{10} + x_{20} - x_{30})e^{t} + 2(2x_{30} - x_{20})te^{-t} + (2x_{30} - x_{20} - 2x_{10})e^{-t} \\ x_3 = (x_{10} + x_{20} - x_{30})e^{t} + (2x_{30} - x_{20})te^{-t} + (2x_{30} - x_{10} - x_{20})e^{-t} \\ \mu = x_2 - 2x_3 = (x_{20} - 2x_{30})e^{-t} \end{array}\right\}.$$

Теперь мы непосредственно убеждаемся, в том, что при любых начальных условиях решения x_1 и m асимптотически устойчивы, а x_2 и x_3 — не устойчивы.

В то же время легко проверить, что свойство устойчивости по переменной x_1 пропадает при сколь угодно малых вариациях некоторых коэффициентов системы (91), например, коэффициента при x_2 во втором уравнении, хотя все корни характеристического полинома системы (91) лежат далеко от мнимой оси. Это явление описано в известной монографии [10], откуда и взят пример с системой (91). В монографии [10] данное явление объяснялось тем, что “свойство асимптотической устойчивости по отношению к части переменных обладает повышенной чувствительностью по отношению к вариациям коэффициентов линейной системы” ([10], стр. 79), и именно в этом видел В. И. Воротников отличие устойчивости по части переменных от устойчивости по всем переменным.

Мы видим теперь, что подобного различия на самом деле нет. Устойчивость по всем переменным в некоторых системах также может исчезать при сколь угодно малых вариациях коэффициентов. Просто подобные системы трудно обнаружить и исследовать.

Однако — и это важно подчеркнуть — результаты, полученные в проблеме сохранения устойчивости при вариациях параметров и опубликованные в [1, 2, 3, 4] являются продолжением и дальнейшим развитием предыдущих работ по этой проблеме — [6, 7, 8, 9, 10] и др. и прежде всего — исследований В. И. Зубова.

Собственно, уже в книге [1] было достаточно ясно показано, что традиционные методы проверки сохранения устойчивости при вариациях параметров, основанные на исследовании свойств характеристического полинома или матрицы коэффициентов при записи в форме Коши заведомо не могут всегда, для всех систем, давать правильный ответ, и поэтому для избежание аварий необходимо переходить к более совершенным методам, например,— с использованием критерия Петрова-Галактионова из книги [1]. Однако публикация книги [1] не привела к изменениям в практике расчетов устойчивости и ее сохранения в проектно-конструкторских организациях. Тогда автор в 1990 г. разослал в адрес ряда научно-технических журналов прямые предостережения о том, что промедление в использовании более совершенных методов проверки сохранения устойчивости неизбежно приведет к авариям, которых вполне можно избежать. Одно из предостережений было опубликовано, в журнале "Электромеханика" (публикация [4]). В редакциях других журналов аналогичные предостережения автора не были опубликованы из-за ряда возражений рецензентов. Анализ возражений рецензентов, а также оппонентов автора во время многочисленных обсуждений и научных дискуссий весьма поучителен.

Так, например, в одном из возражений утверждалось, что если при преобразованиях системы уравнений изменилось такое свойство системы, как сохранение устойчивости при вариациях параметров, то это говорит о неэквивалентности использованных преобразований, о том, что в них вкралась ошибка. Такое возражение свидетельствует о том, что даже на уровне высоко квалифицированных специалистов нет полной ясности в вопросе об эквивалентности преобразований. Классическое определение эквивалентного (называемого также равносильным) преобразования заключается в указании на неизменность множества решений преобразуемой системы (Математическая энциклопедия, том 4, стр. 800, М., Советская энциклопедия, 1984 г.). Решения при эквивалентных преобразованиях остаются неизменными, но свойство сохранения устойчивости при вариациях параметров зависит не от самих решений, а от окрестности их, и поэтому может изменяться (появляться и исчезать) при эквивалентных в классическом смысле преобразованиях уравнений.

Против примера с уравнениями (33)—(35) и (25)—(26), когда система уравнений, сохраняющая устойчивость при достаточно малых вариациях любых коэффициентов, переходит после эквивалентных преобразований в систему, способную терять устойчивость при сколь угодно малых вариациях, выдвигалось следующее возражение: поскольку при преобразованиях использовалась операция дифференцирования, то причина потери устойчивости может заключаться в том, что в ходе преобразований произошло умножение на не гурвицев операторный полином. Действительно, возможность потери устойчивости при некоторых комбинациях операций дифференцирования давно известна и мы рассматривали эту возможность в § 2 (пример с уравнением (11), которое после умножения на операторный полином *D-1* переходит в уравнение (22) с неустойчивым решением). Однако механизм потери устойчивости здесь совсем другой: потеря устойчивости не связана с вариациями коэффициентов и не зависит от них. Просто в решении появляется экспоненционально возрастающий член, показатель экспоненты которого не зависит от вариаций параметров, а определяется лишь корнем того не гурвицева полинома от оператора дифференцирования, на который было умножено уравнение. Эта причина возможной потери устойчивости давно известна. В работах [1, 2, 4] раскрыта совсем другая причина, связанная с глубоким различием между преобразованиями, эквивалентными в классическом и в расширенном смысле. При потере устойчивости, происходящей по этой причине, в решениях системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами появляется экспоненциально возрастающий член, но его показатель экспоненты зависит от величины вариаций параметров.

Некоторые из возражавших автору указывали, что вариации коэффициентов в исходном и в преобразованном уравнениях трудно сравнивать между собой, поскольку при преобразованиях уравнений коэффициенты тоже меняют свою величину и в принципе возможны случаи, когда малым изменениям коэффициентов в исходном уравнении будут соответствовать большие изменения в коэффициентах преобразованного уравнения. Такие случаи встречаются редко, но они возможны.

Для уточнения возникших сомнений было произведено непосредственное исследование вариаций конкретного и имеющего четкий физический смысл параметра на устойчивость. Для исследования был взят электропривод постоянного тока, работающий на исполнительный механизм типа рулевого устройства. Уравнение равновесия моментов на силу электропривода, как известно, имеет вид

$$m\frac{d\omega}{dt} = i - k\omega - M_c, \qquad (95)$$

где w — частота вращения, m — механическая постоянная времени, зависящая от момента инерции электродвигателя, его магнитного потока и т. п., i — ток якоря, который можно регулировать и поэтому он играет роль управления, kw — момент сопротивления на валу, зависящий от частоты вращения, M_c — момент сопротивления исполнительного механизма. В дальнейшем обозначим $w = x_1$, $i = x_2$, $M_c = -x_3$, коэффициент k примем равным двум и тогда уравнение (95) запишется в виде

$$m\dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 + x_3. \qquad (96)$$

Рассмотрим теперь устройство, в котором момент сопротивления x_3 связан с положением руля x_4 дифференциальными уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -x_3 - 2x_4. \end{aligned}\right\} \qquad (97)$$

Тогда система уравнений (96)—(97) будет математической моделью объекта управления. Пусть теперь управляющее воздействие x_2 формируется согласно уравнению

$$x_2 = -x_1 - 2x_3 - x_4, \qquad (98)$$

которое совпадает с уже знакомым нам уравнением (35). Отметим также, что ранее рассмотренные нами уравнения (33) являются частным случаем уравнений (96)–(97) при $m = 1$. Значение $m = 1$ будем считать номинальным значением параметра m и будем исследовать влияние вариаций этого параметра на устойчивость решений. Характеристический полином уравнений (96), (97), (98), которые являются математической моделью замкнутой системы, как нетрудно вычислить, имеет вид:

$$m\lambda^3 + (3+2m)\lambda^2 + (6+m)\lambda + 3 = (m\lambda + 3)(\lambda + 1)^2. \qquad (99)$$

Его корни равны: $\lambda_1 = -\dfrac{3}{m}$; $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Мы убеждаемся что характеристический полином остается гурвицевым для всех значений параметра m, лежащих в пределах $0<m<\Gamma$, а это говорит о том, что все решения системы уравнений (96), (97), (98) остаются устойчивыми не только при малых, но и при больших отклонениях параметра m (механической постоянной времени электродвигателя) от его номинального значения m =1. Разумеется, к этому же результату мы придем, если будем исследовать сохранение устойчивости решений системы уравнений (96), (97), (98) с помощью методики, предложенной В. Л. Харитоновым [19], а также если будем использовать методы робастного управления [20], столь популярного в последние годы.

Отметим, что формирование управляющего воздействия в виде (98) — т. е. в виде линейной функции всех координат — рекомендуется в теории управления, начиная еще с известной монографии А. М. Летова

[13], и широко используется.

Предположим теперь, что управляющее воздействие x_2 можно формировать только в функции от переменной x_1 и ее проиводных. Как мы уже указывали, такое бывает часто и как правило это связано и с недоступностью измерения части переменных, и с удобствами реализации и т. п. Поэтому мы должны исключить переменные x_3 и x_4 из уравнений (96), (97), (98) при помощи эквивалентных (в классическом смысле) преобразований. Напомним, что понятие преобразований, эквивалентных в расширенном смысле, было введено автором лишь в 1992 году [2], и поэтому все традиционные методы расчета и проектирования используют, естественно, преобразования, эквивалентные в классическом смысле. О том, что эти преобразования могут изменять свойство сохранения устойчивости при вариациях параметров, было сказано в 1987 году, в [1], но тогда это не привлекло внимания. Использовав эквивалентные в классическом смысле преобразования, мы от уравнений (96), (97), (98) придем, после исключения x_3 и x_4, к уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} &\left[mD^3+(2+m)D^3+(4+m)D+2\right]x_1=(D+1)^2x_2 \\ &(D+1)x_2=(D^2+4D+5)x_1 \end{aligned}\right\}. \qquad (100)$$

Характеристический полином этой системы уравнений, как нетрудно вычислить, равен

$$(1-m)\lambda^4+(4-3m)\lambda^3+(8-3m)\lambda^2+(8-m)\lambda+3. \qquad (101)$$

При $m = 1$, т. е. при номинальном значении параметра m, полином (101) совпадает с полиномом (99); это еще раз подтверждает, что системы уравнений (96), (97), (98) и (100) эквивалентны между собой в классическом смысле при $m = 1$.

Однако полином (101), в отличие от полинома (98), перестает быть гурвицевым, если параметр m превышает номинальное значение $m = 1$ даже на сколько угодно малую величину.

Таким образом, исследование влияния вариаций конкретного физического параметра — механической постоянной времени электродвигателя — на сохранение устойчивости решений системы дифференциальных уравнений, описывающих замкнутую систему управления, еще раз подтверждает, что свойство сохранения устойчивости может появляться и исчезать при эквивалентных (в классическом смысле) преобразованиях уравнений. Поэтому неучет принципиальных различий между этими преобразованиями может приводить к ошибочным заключениям при расчете и проектировании, следствием которых могут быть аварии и катастрофы.

При обсуждении положений и примеров, выдвинутых в работах [1], [4] неоднократно выставлялось возражение, свободящееся к тому, что рассмотренные примеры относятся к хорошо разработанной теории сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений (сингулярными называют такие изменения коэффициентов уравнения, которые ведут к изменению его порядка). Это возражение не состоятельно и вот почему: теория сингулярно-возмущенных уравнений действительно разработана, но она относится к уравнениям, имеющим малые параметры при старших производных, уравнениям типа:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} = f_y(y;z) \\ &\varepsilon_z \frac{dz}{dt} = f_z(y;z) \end{aligned}\right\}, \qquad (102)$$

где полный вектор переменных y и z размерностью n разбит на два подвектора: подвектор y размерностью m, где $m < n$, и подвектор z размеренностью $n–m$, а параметры e_z являются малыми. В теории сингулярно-возмущенных уравнений исследуется изменение решений уравнений (102) по сравнению с теми уравнениями (102), в которых $e = 0$. При e № 0 порядок уравнений (102) повышается по сравнению со случаем, когда $e = 0$. Понятно, что решения уравнений повышенного порядка могут коренным образом (в том числе и по устойчивости) отличаться от невозмущенных решений, соответствующих $e = 0$, и это, разумеется, сомнений не вызывает. Подчеркнем, что в сингулярно-возмущенной системе (102) изначально присутствуют малые коэффициенты, а вариации этих малых коэффициентов являются малыми по абсолютной величине, но отнюдь не по отношению к $e = 0$. Если даже $e = 0,00001$, то это, условно говоря, “бесконечно много” больше, чем $e = 0$.

В рассмотренных выше примерах (и в примерах, приведенных ранее в [1, 2, 3, 4]) рассматривалось совсем другое явление: ни один из коэффициентов рассмотренных нами уравнений (25)—(26), (33)—(35), (96), (97), (98) и (100) не является малым, все коэффициенты достаточно большие, порядка нескольких единиц. Малые вариации (причем малые не только по абсолютной величине, но и по отношению к номинальным значениям)испытывают большие коэффициенты. Поэтому рассматриваемые нами системы уравнений не относятся к сингулярновозмущенным. В рассмотренных нами системах обнаружено новое явление: возможность появления и исчезновения свойства сохранения устойчивости при вариациях параметров после эквивалентных (в классическом смысле) преобразований уравнений.

Это явление имеет большой практический смысл, поскольку неучет его при проектировании может быть причиной самых серьезных аварий и катастроф.

Поэтому нет ничего удивительного в том, что это явление (опубликованное в [1], затем в [4, 2, 5] и широко обсуждавшееся, начиная с 1990 года) и следовавшие из его обнаружения практические выводы, не сразу получили признание научного сообщества. Только в 1994 году, после трехлетнего обсуждения и проверки выводов и рекемендаций автора, один из наиболее авторитетных научных журналов “Автоматика и телемеханика» опубликовал статью [3] с кратким изложением более совершенных методов проверки устойчивости и с прямым предостережением о том, что некритическое использование традиционных методов расчета может быть причиной серьезных аварий. После публикации в таком авторитетном журнале можно считать, что основные положения, выдвинутые автором, получили признание научного сообщества.

Но до широкого использования усовершенствованных методов в проектно-конструкторских организациях еще далеко, и это не может не тревожить. Рассмотрим, для примера, положение на атомных электростанциях. Срок службы самих ядерных реакторов велик и он много больше, чем срок службы различного вспомогательного оборудования станции (насосов, приводов, систем управления ими). Поэтому в ходе эксплуатации взамен отслужившего свой срок оборудования на станции устанавливается оборудование новое, часто — более совершенное и это — хорошо.

Однако если это оборудование в ходе проектирования проверялось на сохранение устойчивости расчетом на быстродействующих вычислительных машинах, но по традиционной методике, без дополнительной проверки, о необходимости которой говорилось в публикациях [1, 4, 3, 5], то это оборудование может оказаться способным в заранее непредвиденный момент времени потерять устойчивость и создать аварийную ситуацию. Разумеется, системы и агрегаты атомной электростанции резервируются, снабжаются устройствами защиты и поэтому далеко не каждая потеря устойчивости обязательно приведет к опасной аварии. Это так. Но все же каждая потеря устойчивости, каждый отказ создают опасную ситуацию, которая может перерасти в аварию, и если есть возможность заранее предотвратить подобные ситуации, то они должны быть предотвращены. Игра с “атомным огнем”, легкомысленное отношение к авариям, возможные источники которых названы и опубликованы, являются преступлением. Поэтому казалось очевидным, что усовершенствованные методы дополнительной проверки сохранения устойчивости должны были бы немедленно после опубликования использоваться при проектировании оборудования для атомных станций, тем более, что использование усовершенствованных методов расчета, снижающих вероятность аварий, не требует заметных материальных затрат. Требуется лишь очень скромный расход на разработку программного обеспечения. Тем не менее, использования методов дополнительной проверки устойчивости не произошло. Помешал настрой большинства работников, не склонных к внедрению нового. Доходило до курьезов: во время обсуждения предложения автора на научно-техническом совете одной из организаций, связанных с разработкой оборудования для атомной энергетики, один из членов совета заявил: “для нашей отрасли снижение вероятности аварий неактуально. Это у химиков возникают действительно опасные аварии, а у нас, в нашей отрасли — нет. Вот я, например, попадал в аварии, получил 200 рентген облучения, а вот видите — сижу перед вами, жив и здоров. Так что в нашей отрасли ничего менять не надо, это пусть химики внедряют у себя новые методы предотвращения аварийности”.

Казалось бы, что коль скоро существует такая организация, как Атомнадзор, обладающая всеми необходимыми правами и возможностями, то она должна обеспечить безопасность атомной энергетики. На деле оказалось, что между большими правами, представленными Атомнадзору, и желанием реально использовать эти права, преградить путь возможным авариям на атомных станциях, лежит пропасть. В Госатомнадзоре, и в Северо-западном отделении в Петербурге, и в Москве, в центральном управлении, автора вежливо принимали, знакомились с материалами, выслушивали, читали заключения авторитетных научных семинаров, рекомендовавших проектно-конструкторским организациям использовать дополнительные методы проверки устойчивости, разработанные в Петербургском гос. университете для предотвращения аварийности, но реально Госатомназдор ничего не сделал, ни на кого не воздействовал, своих прав не использовал. После этого становятся понятными причины столь многочисленных аварий в российской промышленности и атомной энергетике, но легче от этого не делается.

Использование более совершенных методов расчета и проектирования, снижение вероятности аварий оказывается целиком зависящим от личной компетентности, личной добросовестности отдельных людей. Так, активное участие в работах по предовращению аварий в энергетике, по разработке более совершенных методов расчета, обеспечивающих сохранение устойчивости при вариациях параметров, принял член-корреспондент РАН Я. Б. Данилевич. По инициативе главного инженера одной из проектных организаций К. Л. Сукнева новые дополнительные методы проверки используются в его организации. Путь к возникновению аварий, связанных с неполнотой традиционных методов расчета и проектирования, в этой организации перекрыт. В остальных организациях — не перекрыт. Над расширением использования более совершенных научных методов надо еще работать и работать.

Автор надеется, что опубликование этой книги поможет практическому использованию усовершенствованных методов расчета сохранения устойчивости при вариациях параметров и позволит уменьшить вероятность аварий и катастроф. Контролирующим организациям (таким, как Госатомнадзор и ему подобные), а также органам власти пора принять действенные меры для предотвращения тех аварий, причины которых установлены и признаны научным сообществом. Там, где речь идет о жизни людей, бездействие недопустимо.

Что касается теоретических вопросов, поднятых в книге, то они выходят за рамки проблем управления и примыкают к широкому кругу работ, посвященных обеспечению надежности вычислений. Поскольку параметры математической модели исследуемого объекта почти всегда известны лишь с неизбежной погрешностью, то результаты вычислений будут надежны только тогда, когда малым изменениям исходных данных соответствуют малые изменения решений. В противном случае рассматриваемая задача оказывается некорректно поставленной (или плохо обусловленной) и результаты ее решения обычно не надежны. Методам выделения не корректно поставленных или плохо обусловленных задач посвящено много исследований.

Однако до последнего времени не обращалось внимания на то, что хорошо обусловленная математическая модель может перейти в плохо обусловленную (и наоборот) при широко используемых эквивалентных (в классическом смысле) преобразованиях, если эти преобразования не являются эквивалентными в расширенном смысле. Это показывают примеры, приведенные в книге.

Отсюда следует, что теория преобразований, эквивалентных в расширенном смысле, важна не только в теории управления, но и в значительно более широком круге прикладных задач вычислительной математики. В связи с этим нужно подчеркнуть, что методы различения преобразований, эквивалентных в расширенном смысле, разработаны пока только для некоторых классов математических моделей, относящихся прежде всего к системам управления. Для обеспечения надежности вычислений нужно разработать теорию преобразований, эквивалентных в расширенном смысле, для значительно более общего круга математических моделей и вычислительных задач. Здесь открыто обширное поле для дальнейшей исследовательской работы.

Наука неисчерпаема и наука очень интересна — вот тот вывод, который, по мнению автора, должен сделать читатель этой книги.

§ 12. Учителю математики для занятий в математическом кружке

Наиболее выигрышными темами для занятий в математическом кружке безусловно являются темы, каким-то образом связанные с проблемами современной математической науки. К сожалению, такие темы очень трудно подобрать, поскольку проблемы и задачи современной науки очень сложны и, как правило, совершенно недоступны для понимания школьника.

Одну из интересных и живых тем все же можно предложить. Это — изменение корректности задачи нахождения решений алгебраических уравнений при их эквивалентных преобразованиях.

Школьники страрших классов хорошо знакомы с простыми алгебраическими уравнениями, умеют преобразовывать их (переносить члены из левой части в правую с изменением знака, делить и умножать все члены на число, не равное нулю, складывать одно уравнение с другим и т.п.). Все такие преобразования (разумеется, правильно выполненные) являются преобразованиями эквивалентными — т. е. Все решения преобразованных уравнениц совпадают с решениями уравнений исходных. Правила преобразования уравнений входят в школьные программы.

На занятиях математического кружка можно дать понятие и о корректности решения: поскольку в практических задачах все коэффициенты уравнений известны почти всегда лишь с ограниченной точностью, то решение уравнения имеет практический смысл только тогда, когда оно корректно — т. е. когда малым изменениям коэффициентов соответствуют малые изменения решений (примеры корректных и некорректных задач нетрудно привести). Простейший способ проверки корректности — это повторение решения для немного измененных коэффициентов. Если решение сильно изменится — задача некорректна.

Далее уже нетрудно объяснить, что мы смело пользуемся эквивалентными преобразованиями только вследствие нашей уверенности в том, что эквивалентные преобразования не изменяют корректности. В подавляющем большинстве случаев это действительно так (несложно привести примеры). Если исходное уравнение корректно, то после преобразования корректность обычно сохранится. Почти всегда это так. Тем с большим интересом будут встречены недавно обнаруженные в математике своеобразные случаи, когда при эквивалентных преобразованиях корректность изменяется.

Для начала рассмотрим систему двух линейных однородных уравнений с параметром λ:

$$\begin{cases}(1-\lambda)x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_1 + (3-\lambda)x_2 = 0.\end{cases} \tag{104}$$

Поскольку система (104) однородна, то она, естественно, среди своих решений имеет решения нулевые: $x_1 = 0$; $x_2 = 0$. Поставим теперь задачу: найти значения параметра λ, при которых система (104) имеет ненулевые решения.

Учитель может рассказать, что системы уравнений, подобных уравнениям (104), но более высокого порядка (состоящие из четырех, десяти и более уравнений) часто встречаются в приложениях.

К нахождению значений параметра λ, при которых подобные системы имеют ненулевые решения, сводятся многие важные расчеты колебаний различных механических конструкций, расчеты процессов в системах управления, электродвигателях и даже некоторые проблемы астрономии и небесной механики..

Решить поставленную нами задачу можно путем исключения переменных с помощью эквивалентных преобразований. Для этого умножим все члены первого из уравнений (104) на -1, а второго – на $(1-\lambda)$. Получим:

$$\begin{cases} -(1-\lambda)x_1 - 3x_2 = 0 \\ (1-\lambda)x_1 + (3-4\lambda+\lambda^2)x_2 = 0 \end{cases} \qquad (105)$$

Сложив оба уравнения, мы исключим x_1 и получим одно уравнение относительно x_2:

$$(\lambda^2 - 4\lambda)x_2 = 0.$$

Теперь сразу видно, что ненулевое решение возможно при $\lambda = 0$ и при $\lambda = 4$. Подставив эти значения в (104), получим при $\lambda = 0$:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 0, \end{cases} \qquad (107)$$

а при $\lambda = 4$:

$$\begin{cases} -3x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases} \qquad (108)$$

Сразу видно, что уравнениям (107) и (108) помимо решения $x_1 = x_2 = 0$ удовлетворяет бесчисленное множество других значений x_1 и x_2.

Заметим, что домножая второе из уравнений (104) на выражение $(1-\lambda)$, которое равно нулю при $\lambda = 1$, мы могли приобрести лишний корень $\lambda = 1$. Однако подставив его в (104), мы получим систему

$$\begin{cases} 3x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0, \end{cases} \tag{109}$$

не имеющую других решений, кроме $x_1 = x_2 = 0$. Поэтому $\lambda = 1$ не является решением; с учетом этого уравнение (106) эквивалентно системе (104), и исследуя его, мы легко устанавливаем, при каких значениях параметра λ система (104) имеет не нулевые решения. Путем нетрудных (хотя и громоздких) вычислений можно проверить, что если немного изменить коэффициенты системы (104), например, в первом уравнении вместо $3x_2$ поставить $3{,}01x_2$, во втором вместо x_1 поставить $0{,}99x_1$ и т. п., то значения параметра λ лишь немного отклонятся от найденных нами значений $\lambda = 0$; $\lambda = 4$. Рассматриваемая нами задача для системы уравнений (104) является корректной. Точно также, если немного изменить коэффициенты (единицу и четверку) в уравнении (106), мы убедимся, что ранее найденные значения $\lambda = 0$; $\lambda = 4$ изменятся мало. В данном случае при эквивалентном переходе от системы (104) к уравнению (106) корректность сохранилась. Однако корректность может и не сохраниться. Действительно, как уже говорилось, на практике приходится иметь дело с системами типа (104), но с более значительным числом уравнений. И вот уже при четырех уравнениях возникают интересные явления.

Рассмотрим систему четырех линейных однородных уравнений с параметром λ:

$$\begin{cases} (2+\lambda)x_1 - x_2 - x_4 = 0 \\ \lambda x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + (2+\lambda)x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \end{cases} \qquad (110)$$

для которой рассмотрим ту же задачу: при каких значениях параметра λ возможны ненулевые решения? Решение будем вести путем исключения переменных. Исключив переменные x_1 и x_2 путем эквивалентных преобразований (умножений и сложений), мы придем к следующей системе двух уравнений относительно переменных x_3 и x_4:

$$\begin{cases} (\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2)x_3 = (\lambda^2 + 2\lambda + 1)x_4 \\ (\lambda^2 + 4\lambda + 5)x_3 = (\lambda + 1)x_4. \end{cases} \qquad (111)$$

Если теперь исключить переменную x_3, домножив первое из уравнений (111) на $-(\lambda^2 + 4\lambda + 5)$, а второе — на $(\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2)$, и сложив их, то относительно x_4 мы придем к уравнению третьего порядка:

$$(\lambda^3 + 5\lambda^2 + 7\lambda + 3)x_4 = 0. \qquad (112)$$

Нетрудно проверить, что полином, стоящий в скобке, обращается в нуль при $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ (двойной корень) и при $\lambda_3 = -3$. Таким образом, система четырех однородных линейных уравнений (110) будет иметь ненулевые решения при $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$; $\lambda_3 = -3$. Подстановкой в уравнение (110) можно убедиться, что это действительно так. Однако уравнение относительно x_4, которое получится при исключении переменной x_3 из системы (111) будет иметь вид (112) только если коэффициенты системы (111) в точности равны расчетным. Предположим, что в первом из уравнений (111) коэффициент при λ^2 в члене $(\lambda^2 + 2\lambda + 1)x_4$ равен не единице, а $1+\varepsilon$, где ε — малое число. Тогда уравнение (112) примет вид

$$(\varepsilon\lambda^4 + \lambda^3 + 5\lambda^2 + 7\lambda + 3)x_4 = 0. \qquad (113)$$

Мы убеждаемся, что при сколь угодно малых числах ε значений λ, при которых возможны не нулевые решения, будет уже не три, а четыре. Причем при малых ε четвертое значение λ будет (по модулю) очень большим, много больше остальных трех. Для малых ε будет приближенно $\lambda_4 = -\dfrac{1}{\varepsilon}$.

Таким образом, мы убедились, что задача определения значений параметра λ, при которых система (111) имеет ненулевые решения, является задачей некорректной: сколь угодно малое изменение некоторых коэффициентов коренным образом меняет ее решения (меняется даже число решений). А ведь система (111) получена из системы (110) путем эквивалентных преобразований (умножений и сложений). Системы (110) и (111) эквивалентны (в классическом смысле) между собой: действительно, при точно известных, целочисленных коэффициентах они имеют одни и те же решения: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$; $\lambda_3 = -3$. Однако система (110) корректна, а система

(111) — нет. Системы (110) и (111) не эквивалентны друг другу в расширенном смысле. Преобразование, преобразующее систему (110) в систему (111) является примером преобразования, эквивалентного в классическом смысле, но не в расширенном.

Теперь рассмотрим следствия. Пока коэффициенты (110) являются целыми числами, неприятностей не возникает. Однако чаще всего коэффициенты уравнений получаются из опыта и измерения, записываются с конечным числом десятичных знаков и при вычислениях неизбежны ошибки округления. Для системы (111) любая сколь угодно малая неизбежная погрешность в коэффициентах, например — ошибка округления, ведет к коренной ошибке в результатах вычислений: вместо трех значений параметра λ мы получаем четыре, причем величина четвертого значения λ целиком зависит от величин погрешностей в коэффициентах.

А результатом таких ошибок могут стать — и становятся — аварии и катастрофы. Учитель может привести немало красочных примеров (помимо тех, что уже приводились в предыдущих разделах), поднимающих интерес и заинтересованность участников кружка. Интересной творческой задачей может стать поиск новых примеров некорректных систем и таких преобразований, которые эквивалентны в классическом смысле и не эквивалентны в расширенном, поскольку изменяют корректность рассматриваемой задачи. На сегодняшний день таких преобразований известно еще очень немного. Поиск любого нового примера является интересной и увлекательной задачей.

Подчеркнем, что мы рассматриваем новое явление, не совпадающее с ранее известными. Хорошо известно, что многие преобразования, на первый взгляд кажущиеся эквивалентными (равносильными), на самом деле ведут к потере некоторых корней, или к появлению новых (это бывает, например, когда правая и левая части уравнения умножаются на выражение, обращающееся в нуль при значениях переменной, не совпадающих с корнями). Однако в этих случаях лишние корни не могут, естественно, зависеть от вариаций коэффициентов исходного уравнения. В системах (110) и (111) мы имеем дело с другим явлением: обе системы эквивалентны друг другу в классическом смысле и при отсутствии погрешностей в задании коэффициентов имеют одни и те же три значения λ, при которых возможны ненулевые решения. А четвертое значение λ, возникающее у системы (111), целиком зависит от вариаций некоторых коэффициентов уравнений (111), и его отличие от остальных значений является большим даже при сколь угодно малых вариациях коэффициентов или при сколь угодно малых погрешностях в вычислении и задании их.

Заметим еще, что в теории вычислений хорошо известны случаи, когда малая (но конечная) погрешность в каком-либо коэффициенте после того или иного преобразования увеличивается в то или иное число раз (разумеется, таких преобразований надо избегать). Однако рассматриваемое нами явление носит другой характер: мы видим что уже сколь угодно малое изменение некоторых коэффициентов ведет к коренному изменению решения, свидетельствуя об изменении корректности рассматриваемой задачи.

Таким образом, мы действительно имеем дело с новым явлением, имеющим важное значение для практических расчетов и пока еще не до конца исследованным.

§ 13. Общая проблема надежности вычислений и корректности математических моделей. Вычисление собственных чисел матриц и смежные задачи.

В практических расчетах, когда коэффициенты и параметры математической модели почти всегда известны лишь с ограниченной точностью, изначально надежными могут быть результаты расчета только для корректно поставленных задач, когда при малых вариациях параметров и коэффициентов решения также изменяются мало.

Существует хорошо разработанная теория различения корректно и не корректно поставленных задач, корректных и не корректных математических моделей [21, 22]. (Заметим, что в последние годы решают и некорректно поставленные задачи, но это требует особых сложных методов, описанных в [21, 22]). После того, как в работах [1—5] была обнаружена возможность изменения корректности при эквивалентных (в классическом смысле) преобразованиях математической модели, стало ясным, что нужно не только проверять на корректность саму математическую модель, но и проделанные с нею преобразования.

В §§ 3–7 приводились примеры эквивалентных (в классическом смысле) преобразований, изменяющих корректность, для систем линейных дифференциальных. уравнений, а в § 12 был рассмотрен простейший подобный пример для алгебраических уравнений.

Рассмотрим теперь общую проблему решения линейных алгебраических уравнений и вычисления собственных чисел матриц.

Будем рассматривать систему n однородных линейных уравнений с n неизвестными

$$Ax = \lambda x\,, \qquad (114)$$

где x — n-мерный вектор, A — квадратная размера $n \times n$ матрица коэффициентов, λ — параметр.

Уравнение (114) может быть также записано в виде:

$$(A - \lambda E)x = 0\,, \qquad (115)$$

где E — единичная матрица размера $n \times n$. Уравнения (114) и (115) имеют ненулевые решения только для тех значений λ, при которых определитель матрицы $(A - \lambda E)$ обращается в нуль, т. е.

$$\det(A - \lambda E) = 0\,. \qquad (116)$$

Развертывая определитель по степеням λ, получим полином степени n:

$$\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_0, \tag{117}$$

который называют характеристическим полиномом матрицы A, а его корни называют собственными значениями или собственными числам и матрицы A.

Проблема вычисления собственных чисел имеет большое практическое значение, поскольку необходимость вычисления их встречается во многих приложениях. Собственные числа вычисляются при решении систем дифференциальных уравнений, при вычислении собственных частот малых колебаний механических и электрических систем, в астрономии и небесной механики при решении так называемого "векового уравнения" и во многих других областях приложений.

Задачам вычисления собственных чисел и проверке корректности задач их вычисления посвящена обширная литература [23, 24]. Так, в библиографии книги [24] приведено 217 названий работ, посвященных этой теме.

Мы будем рассматривать не проблему собственных чисел матриц в ее классическом виде, а рассмотрим смежную с ней и более общую задачу вычисления значений параметра λ, при которых существуют ненулевые решения систем уравнений типа (114), но с дополнительными голономными (т.е. не содержащими параметра λ) соотношениями между переменными.

Примером может служить система:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = \lambda x_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = \lambda x_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = 0, \end{cases} \tag{118}$$

в которой четвертое уравнение не содержит λ. Уравнений, не содержащих λ, может быть несколько. В матричном виде рассматриваемые нами уравнения могут быть записаны в виде:

$$(A - \lambda \overline{E})x = 0\,, \tag{119}$$

где теперь (в отличие от уравнения (115)) $\overline{E}$ — не единичная, а квазиединичная матрица — т. е. матрица, в которой во-первых, все элементы, стоящие вне главной диагонали равны нулю, а во-вторых равны нулю "r" элементов на главной диагонали. Так, для системы уравнений (118) матрица $\overline{E}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{120}$$

(равен нулю диагональный элемент в последней строке). Задачи, сводящиеся к исследованию уравнении вида (119), часто встречаются в приложениях. К ним сводится проблема вычисления частот малых колебаний механических систем с голономными связями, голономных автоматических систем [25], многих систем управления.

Система (119) имеет ненулевые решения только для тех значений λ, при которых обращается в нуль определитель матрицы $(A - \lambda \overline{E})$. Эти значения будут корнями полинома

$$\det(A - \lambda \overline{E})\,, \tag{121}$$

степень которого в общем случае равна n-r. В частности, для системы (118) полином (121) имеет (в общем случае) третью степень и имеет три корня.

Будем решать систему уравнений (118) путем последовательного исключения переменных. Домножив первое из уравнений (118) на $-a_{21}$, а второе — на $(a_{11}-\lambda)$ и сложив их, получим уравнение, не содержащее x_1. Проделав те же операции со вторым и третьим из уравнений (118), а затем — с третьим и четвертым, мы придем к системе трех уравнений относительно x_2, x_3 и x_4:

$$\begin{cases} b_{22}^{(2)}x_2 + b_{23}^{(1)}x_3 + b_{24}^{(1)}x_4 = 0 \\ b_{32}^{(1)}x_2 + b_{33}^{(1)}x_3 + b_{34}^{(0)}x_4 = 0 \\ b_{42}^{(0)}x_2 + b_{43}^{(1)}x_3 + b_{44}^{(0)}x_4 = 0, \end{cases} \qquad (122)$$

где символами b_{ij}^{k} обозначены уже не числа, а полиномы, включающие разные степени параметра λ. Верхний индекс отражает степень полинома. Система уравнений (122) эквивалентна системе (118).

Проделав операцию исключения переменной x_2 в системе уравнений (122) придем к следующей системе двух уравнений относительно x_3 и x_4:

$$\begin{cases} c_{33}^{(3)}x_3 + c_{34}^{(2)}x_4 = 0 \\ c_{43}^{(2)}x_3 + c_{44}^{(1)}x_4 = 0. \end{cases} \qquad (123)$$

Символами c_{ij}^{k} обозначены полиномы от λ, причем полином $c_{33}^{(3)}$ является полиномом третьей степени; полиномы $c_{34}^{(2)}$ и $c_{43}^{(2)}$ имеют вторую степень, а $c_{44}^{(1)}$ — первую, то есть

$$c_{33}^{(3)} = m_1\lambda^3 + m_2\lambda^2 + m_3\lambda + m_4, \qquad (124)$$

$$c_{34}^{(2)} = m_5\lambda^2 + m_6\lambda + m_7\,, \tag{125}$$

$$c_{43}^{(2)} = m_8\lambda^2 + m_9\lambda + m_{10}\,, \tag{126}$$

$$c_{44}^{(1)} = m_{11}\lambda + m_{12}\,, \tag{127}$$

причем все коэффициенты $m_1,\ldots,m_{12}$ выражаются через коэффициенты $a_{11},\ldots,a_{44}$ исходной системы (118). Исключив переменную x_3 из системы уравнений (123), получим уравнение

$$(c_{34}^{(2)}c_{43}^{(2)} - c_{33}^{(3)}c_{44}^{(1)})x_4 = 0\,, \tag{128}$$

из которого видно, что значения λ_i, при которых исходная система (118) имеет ненулевые решения, являются корнями полинома

$$c_{34}^{(2)}c_{43}^{(2)} - c_{33}^{(3)}c_{44}^{(1)}\,. \tag{129}$$

На первый взгляд кажется, что полином (129) является полиномом четвертой степени, однако расчет показывает, что при $a_{31} = 0$ или $a_{44} = 0$ имеет место равенство

$$m_5 m_8 - m_1 m_{11} = 0\,, \tag{130}$$

и коэффициент при λ^4 в этом случае тождественно равен нулю при любых значениях остальных коэффициентов a_{ij} в исходной системе уравнений (118). С учетом этого полином (129) является в общем случае полиномом третьей степени и имеет три корня, которые и являются искомыми значениями параметра λ, при которых система (118) имеет ненулевые решения.

Однако равенство (130) будет выполняться лишь тогда, когда все коэффициенты m_1, m_5, m_8, m_{11}, в точности равны своим расчетным значениям. Уже сколь угодно малые вариации их (возникающие, например, из-за ошибок округления при исключении переменных x_1 и x_2) сразу приводят к грубой (даже качественной!) ошибке: вместо трех значений параметра λ их оказывается четыре, причем четвертое значение λ зависит от вариаций коэффициентов в системе (123).

Для системы уравнений (123) задача вычисления значений параметра λ, доставляющих ненулевые решения, при $a_{31} = 0$ или $a_{44} = 0$ является некорректной, а исключение переменных x_1 и x_2 из системы (118) является примером преобразования, эквивалентного в классическом смысле и не эквивалентного — в расширенном. Это преобразование изменило корректность решаемой нами задачи.

Мы убеждаемся, что изменение корректности при эквивалентных (в классическом смысле) преобразованиях может иметь место не только для дифференциальных уравнений, но и для простых алгебраических систем. Нетрудно проверить, что изменение корректности будет возникать и в системах уравнений вида (119) более высоких порядков.

Рассмотрим теперь последствия. Если мы будем решать задачу отыскания значений параметра λ, доставляющих ненулевые решения для системы (118) и ей подобных, путем последовательного исключения переменных x_1, x_2 и т. д., то уже сколь угодно малая ошибка округления приведет нас к совершенно неверному ответу. Если причина известна, то для системы (118) с данным затруднением справиться несложно: нужно сперва исключить переменную x_4. Используя последнее из уравнений (118), надо выразить x_4 через x_1, x_2, x_3 и подставить в оставшиеся три уравнения. Последующее исключение x_1

и x_2 уже не изменит корректность задачи. Для системы (118) все просто. Однако для того, чтобы выбрать правильный путь при решении систем уравнений более высоких порядков, нужно знать о возможной потере корректности и уметь правильно обходить возникающие неприятности.

В частности, не всегда безобиден очень широко используемый переход от системы n уравнений второго порядка, непосредственно вытекающих из уравнений Лагранжа второго рода, к системе $2n$ уравнений первого порядка (к гамильтоновой системе уравнений) и т.п. То, что подобное преобразование эквивалентно в классическом смысле, сомнений, конечно, не вызывает, но будет ли оно всегда (в том числе и при наличии голономных соотношений между переменными) эквивалентно в расширенном смысле — это требует проверки.

Еще более сложно обстоит дело там, где переход к другому числу переменных может изменить физический смысл математической модели. В §3 мы уже сталкивались с частным случаем системы уравнений (118) применительно к исследованию систем управления (уравнения (33)—(35) и (25)—(26), характеристические полиномы (28), (30) и (31) и т. п.) и убедились, что простое исключение переменной x_4, выражение ее через x_1, x_2 и x_3 на основе последнего из уравнений (118) (ему соответствует уравнение (35)) неизбежно ведет к ошибочным выводам. Действительно, если в канале обратной связи может быть непосредственно использована только переменная x_1, то полностью физическому смыслу рассматриваемой задачи соответствуют только уравнения (25)—(26). Только они учитывают, что изменения параметров объекта управления и регулятора могут происходить независимо друг от друга, а система уравнений (33)—(35) этого обстоятельства не отражает, хотя обе системы уравнений эквивалентны друг другу в классическом смысле и при неизменных значениях коэффициентов и параметров обе системы совершенно идентично описывают протекающие в системе управления процессы.

Поэтому при преобразованиях математических моделей нужно учитывать не только эквивалентность преобразований при неизменных коэффициентах и параметрах (это давно делается), но нужно учитывать и возможную утерю эквивалентности в расширенном смысле при вариациях параметров.

Отметим, что явления, рассматриваемые нами, отличаются от уже исследованных явлений потери точности решения при различных методах решения, связанных с преобразованиями уравнений. Так, например, в [23, 24] показано, что при последовательном проведении цепочки преобразований, рекомендуемых в методиках Гаусса, Хаусхолдера, Гивенса, А.П. Крылова малые (но конечные!) погрешности коэффициентов и малые (но конечные!) ошибки округления могут, постепенно увеличиваясь в ходе вычислений, привести к большим ошибкам в решениях. Но при погрешности коэффициентов, стремящейся к нулю, стремится к нулю и ошибка [23,24].

В отличие от этого в преобразованиях, рассматриваемых нами, изменение корректности происходит сразу, в один этап, главное — уже сколь угодно малая вариация (или погрешность) параметра, или сколь угодно малая ошибка округления могут вести к коренному, качественному изменению решения.

Таким образом, мы имеем дело с новым явлением (на это уже указывалось в [1]). Отметим, что в "чистой" проблеме собственных значений матриц, рассматриваемой, например, в монографиях [23, 24 и др.] рассматриваются уравнения (115), а не (119), т. е. возможность голономных соотношений между переменными не учитывается. Но при исследовании уравнений (115) рассматриваемое нами явление потери корректности при сколь угодно малых вариациях коэффициентов, как будет далее доказано, в общем случае не возникает. Возможно, что именно поэтому оно было обнаружено поздно и до сих пор еще не исследовано всесторонне. Между тем это явление играет большую роль в деле обеспечения надежности решений самых различных уравнений, а тем самым и в обеспечении надежности и безаварийности всей нашей современной техники. Поэтому обнаруженное и описанное в работах [1, 3, 4] явление имеет большое практическое значение и заслуживает серьезного и всестороннего изучения.

Рассмотрим возникающую проблему в общем виде, т. е. для системы уравнений произвольного порядка следующего вида:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1;1}x_1 + a_{n-1;2}x_2 + \ldots + (a_{n-1;n-1}-\lambda)x_{n-1} + a_{n-1;n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \end{cases} \tag{131}$$

Таким образом, мы рассматриваем систему однородных линейных уравнений, причем во все первые $n-1$ уравнений входит параметр λ, а в последнее уравнение он не входит. Ставится задача — найти значения параметра λ, при которых система (131) имеет не нулевые решения.

Предположим, что мы решаем эту задачу путем последовательного исключения переменных, начиная с x_1, и рассмотрим положение, которое складывается перед последним шагом исключения, когда у нас остается два уравнения с двумя переменными x_{n-1} и x_n. На основании известных правил решения систем линейных алгебраических уравнений и используя формулы Крамера, нетрудно установить, что эти два уравнения будут иметь вид

$$\begin{cases} A_1x_{n-1} + A_2x_n = 0 \\ A_3x_{n-1} + A_4x_n = 0, \end{cases} \tag{132}$$

причем A_1, A_2, A_3 и A_4 будут полиномами от переменной λ, и будут равны следующим определителям $n-1$ порядка

$$A_1 = \begin{vmatrix} (a_{1;1}-\lambda) & a_{1;2} & \dots & a_{1;n-1} \\ a_{2;1} & (a_{2;2}-\lambda) & \dots & a_{2;n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1;1} & a_{n-1;2} & \dots & (a_{n-1;n-1}-\lambda) \end{vmatrix}, \qquad (133)$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} (a_{1;1}-\lambda) & a_{1;2} & \dots & a_{1;n} \\ a_{2;1} & (a_{2;2}-\lambda) & \dots & a_{2;n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1;1} & a_{n-1;2} & \dots & a_{n-1;n} \end{vmatrix}. \qquad (134)$$

Таким образом., определитель (133) составлен из коэффициентов, стоящих в первых $n-1$ уравнениях из системы (131) при первых ее $n-1$ переменных — от x_1 до x_{n-1}. А определитель (134) будет равен тому же определителю (133), но в котором последний столбец заменен на столбец коэффициентов, стоящих в системе (131) перед переменной x_n. Для полиномов A_3 и A_4, имеем аналогичные соотношения

$$A_3 = \begin{vmatrix} a_{2;1} & (a_{2;2}-\lambda) & \dots & a_{2;n-1} \\ a_{3;1} & a_{3;2} & \dots & a_{3;n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n;1} & a_{n;2} & \dots & a_{n;n-1} \end{vmatrix}, \qquad (135)$$

т. е. определитель (135) составлен из коэффициентов, стоящих в уравнениях (131), начиная со второй строки и до последней перед переменными с индексами от x_1 и до x_{n-1} а полином A_4 определяется равенством

$$A_4 = \begin{vmatrix} a_{2;1} & (a_{2;2}-\lambda) & \dots & a_{2;n} \\ a_{3;1} & a_{3;2} & \dots & a_{3;n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n;1} & a_{n;2} & \dots & a_{n;n} \end{vmatrix}, \qquad (136)$$

т, е. определитель (136) отличается от определителя (135) тем. что последний столбец в нем заменен на столбец коэффициентов при переменной x_n.

Разлагая определители по минерам соответствующих строк, нетрудно выписать члены со старшими степенями параметра λ. Имеем

$$\begin{aligned} A_1 &= (-1)^{n-1}\lambda^{n-1} + \dots \\ A_2 &= (-1)^{n-2} a_{n-1;n}\lambda^{n-2} + \dots \\ A_3 &= (-1)^{n-2} a_{n;1}\lambda^{n-2} + \dots \\ A_4 &= (-1)^{n-3}(a_{n-1;n}a_{n;1} - a_{n-1;1}a_{n;n})\lambda^{n-3} + \dots \end{aligned} \qquad (137)$$

где точками обозначены члены с более низкими степенями параметра λ. Исключая из системы (132) переменную x_{n-1} придем к уравнению

$$(A_2A_3 - A_1A_4)x_n = 0\,. \qquad (138)$$

Система (132), а значит и исходная система (131) могут иметь ненулевые решения для тех значений λ, при которых выражение, стоящее в круглой скобке в формуле (138) равно нулю. Выписывая из равенств (137) только старшие члены, имеем

$$A_2A_3 - A_1A_4 = a_{n-1;1}a_{n;n}\lambda^{2n-4} + (a_{n-1;n}a_{n;1} - a_{n-1;n}a_{n;1})\lambda^{2n-4} + \dots, \tag{139}$$

где точками обозначены члены степени λ^{2n-5} и более низких степеней. Теперь рассмотрим случай, когда $a_{n-1;1}a_{n;n} = 0$ (это означает, что либо $a_{n-1;1} = 0$, либо $a_{n;n} = 0$). В этом случае оказывается, что степень полинома (139), а значит и число собственных значений параметра λ, как и в ранее рассмотренном нами частном случае $n = 4$, зависит от сколь угодно малых вариаций коэффициентов полиномов A_2, A_3 и A_4 и это означает, что задача вычисления собственных значений параметра λ (т.е. значений, при которых возможны ненулевые решения) оказывается некорректной.

Отметим следующую тонкость: вариации исходных коэффициентов и системы (131) на число собственных значений не влияют. Действительно, пусть коэффициент $a_{n-1;n}$ немного изменился и стал равным $a_{n-1;n}(1+\varepsilon)$, а коэффициент $a_{n;1}$ стал равным $a_{n;1}(1+\delta)$; при любых ε и δ разность, стоящая в круглой скобке в формуле (139) может и не быть равной нулю. А как только она не будет равной нулю (даже если она и останется сколь угодно малой), то степень полинома (139) повысится и у него появится дополнительный корень. Это и означает, что задача определения собственных значений для системы (132) является некорректной.

Если же произведение $a_{n-1;1}a_{n;n} \neq 0$, то в этом случае, как показывает формула (139), вариации коэффициентов полиномов A_1,

A_2, A_3 и A_4 приводят к изменению степени полинома (139), и задача определения собственных значений параметра λ является корректной.

Рассмотрим теперь классическую задачу определения собственных значений матрицы A, которая, как известно, сводится к поиску значений параметра λ, при которых система (115) имеет не нулевые решения. В классической проблеме собственных значений параметр λ входит во все уравнения и поэтому последнее из уравнений (131) будет иметь вид

$$a_{n;1}x_1 + \ldots + a_{n;n-1}x_{n-1} + (a_{n;n} - \lambda)x_n = 0\,. \qquad (140)$$

Полиномы A_1, A_2, A_3 при замене последнего из уравнений (131) на уравнение (140) сохранят свой вид, а полином A_4 будет теперь равен

$$\overline{A}_4 = (-1)^{n-1}a_{3;1}\lambda^{n-1} + \ldots, \qquad (141)$$

где точками обозначены члены более низких степеней. В этом случае определитель системы (132) примет вид

$$A_2A_3 - A_1\overline{A}_4 = a_{3;1}\lambda^{2n-2} + \ldots, \qquad (142)$$

и потери корректности в общем случае не произойдет. Теперь понятно, почему явление изменения корректности решаемой задачи при эквивалентных преобразованиях было замечено лишь недавно: в классической и хорошо изученной задаче вычисления собственных значений матриц [23, 24] оно не встречалось.

Заметим, что формально потери корректности легко можно избежать, если, например, в системе (131) выразить переменную x_n через остальные переменные, пользуясь последним из уравнений системы, а затем подставить это выражение в остальные уравнения. После приведения подобных членов мы придем к классической задаче о вычислении собственных значений для матрицы размера $(n-1)\times(n-1)$ и с изменением корректности в ходе решения встречаться не придется.

Однако в ряде приложений (и прежде всего — для систем управления) такое исключение последней переменной не соответствует физическому смыслу задачи и искажает картину истинных изменений параметров системы при ее эксплуатации, поскольку параметры объекта управления и параметры регулятора (цепи обратной связи) могут, как известно, изменяться не зависимо друг от друга. В этих случаях возможную потерю корректности (а значит, и возможное изменение свойства сохранения устойчивости замкнутой системы управления при вариациях ее параметров) надо обязательно учитывать, как об этом уже говорилось в предыдущих разделах.

Еще раз подчеркнем: если возможность изменения корректности решаемой задачи при эквивалентных в классическом смысле преобразованиях уравнений осознана и учитывается, то возможность ошибки, возникшей от изменения корректности, сравнительно легко устранить. Опасна лишь неожиданная встреча с изменением корректности, опасна бездумная, не подлежащая критике, слепая вера в то, что если преобразование эквивалентно, то ничего измениться не может. Сами решения при эквивалентных в классическом смысле преобразованиях действительно не изменяются, но корректность решаемой задачи может измениться. Это нужно помнить и это нужно учитывать.

Методика, основанная на построении матриц

степеней

Рассмотрим методику, позволяющую легко и быстро находить необходимые условия изменения корректности при нахождении собственных значений параметра λ для систем уравнений вида (119) путем последовательного исключения переменных.

Введем понятие "матрицы степеней" — т.е. матрицы, элементами которой являются степени полиномов переменной λ, стоящие в соответствующих клетках матрицы $(A-\lambda\overline{E})$.

Так, для системы (118) матрица степеней имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{143}$$

Для системы уравнений (122) матрица степеней имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{144}$$

для системы (123) она имеет вид

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{145}$$

Теперь рассмотрим, как будет изменяться матрица степеней в процессе исключения переменных. Пусть мы хотим исключить переменную x_1 из первого и второго уравнений системы (131). Соответствующие строки матрицы степеней для этой системы имеют вид

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}. \qquad (146)$$

Для исключения x_1 вторую строчку домножаем на $(a_{11} - \lambda)$, а первую — на a_{21}. После домножения строки матрицы степеней (146) примут вид

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \end{matrix}, \qquad (147)$$

(т. е. первая строка матрицы степеней осталась без изменения, а у второй строки все элементы увеличились на единицу). Далее для исключения x_1 вычитают вторую строку из первой, при этом появляется новая строка, в которой коэффициент при x_1 равен нулю. В матрице степеней это будет соответствовать тому, что вместо двух строк (147) появится одна новая строка, на единицу короче прежней (первый элемент пропадет), а все числа этой новой строки будут соответствовать наибольшим из чисел первой и второй строк. Таким образом, исходные строки (146) перейдут в строку

$$2 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1. \qquad (148)$$

Пользуясь этим простым правилом образования новой строки из каждой пары строк исходной матрицы, несложно установить, что, например, при исключении переменного x_1 из системы уравнений (118) вместо первой и второй строк исходной матрицы степеней появится строка (2, 1, 1), вместо второй и третьей строки появится строка (1, 1, 0), вместо третьей и четвертой строки появится строка (0, 1, 0). В целом после исключения переменной x_1 произойдет переход

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (147)$$

т.е. произойдет переход от матрицы (143) к матрице (144). Ранее мы уже установили это прямым вычислением при исключении x_1. После исключения переменной x_2, по тому же правилу произойдет переход

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (148)$$

По оставшейся матрице размера 2×2 очень легко установить, может ли произойти потеря корректности после исключения двух переменных. Потеря корректности может произойти, если в матрице степеней размера 2×2 суммы по диагоналям равны. В матрице (145) они как раз равны. Это и говорит о том, что возможно сокращение старших степеней и потеря корректности. Прямое вычисление, проведенное нами ранее для системы уравнений (118), подтверждает это.

Подчеркнем — исследование матрицы степеней говорит только о возможности (или невозможности для общего случая) изменения корректности, дает только необходимые, но не достаточные условия изменения корректности (что подтверждает ранее рассмотренный пример исследования системы (118), потеря корректности возникает лишь при $a_{31}a_{44} = 0$). Однако именно необходимые условия на практике наиболее важны.

Для примера исследуем — возможна ли потеря корректности в классической задаче определения собственных чисел для матрицы размера 4×4, что соответствует задаче поиска значений параметра λ, при которых возможны ненулевые решения системы уравнений

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + \ldots + a_{14}x_4 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{41}x_1 + \ldots + (a_{44}-\lambda)x_4 = 0, \end{cases} \tag{149}$$

матрица степеней для которой имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{150}$$

Преобразуя эту матрицу по уже изложенным простым правилам, устанавливаем

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{151}$$

В последней матрице размера 2×2 диагональные суммы не равны. Это говорит о том, что в классической задаче о поиске собственных значений для матрицы размера 4×4 потери корректности при исключении двух переменных в общем случае нет. Это соответствует ранее доказанному нами утверждению о том, что в классической задаче о вычислении собственных чисел матриц любого размера потери корректности в общем случае не возникает.

Теперь рассмотрим случай системы пяти однородных уравнений, в первые три из которых входит параметр λ, а в два последние он не входит и система имеет вид

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{15}x_5 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \ldots + a_{25}x_5 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + \ldots + a_{45}x_5 = 0 \\ a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + \ldots + a_{55}x_5 = 0 \end{cases} . \qquad (152)$$

Матрица степеней для системы (152) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (153)$$

Преобразуя ее по изложенным ранее правилам, получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

. (154)

В последней матрице суммы по диагоналям равны, а это означает, что когда мы исключим из системы (152) три переменных, то задача вычисления собственных значении параметра λ из оставшейся системы двух уравнений с двумя переменными x_4 и x_5 может оказаться некорректной.

Методика матриц степеней позволяет несложно решать самые разнообразные задачи на проверку возможности изменения корректности для самых разных систем линейных однородных уравнений с параметром λ.

Метод матриц степеней позволяет легко ответить и на вопрос о возможной некорректности решения и для того случая, когда после исключения нескольких переменных у нас осталось три уравнения с тремя переменными.

Пусть после исключения нескольких переменных мы пришли к матрице степеней размера 3×3:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad (155)$$

определитель которой, как известно, равен

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

. (156)

Для матрицы степеней каждое из шести тройных произведений будет равняться некоторому числу (показателю степени соответствующего полинома от переменной λ) и задача вычисления собственных значений λ корректна в том случае, если среди этих шести чисел есть только одно наибольшее. В этом случае при вариациях параметров степень полинома в общем случае заведомо не изменится, а значит не изменится и число собственных значений. Если же среди шести чисел, входящих в определитель (156) есть два или более одинаковых наибольших, то при вариациях параметров возможно изменение степени полинома и задача вычисления собственных значений может быть не корректной.

Для примера рассмотрим классическую задачу вычисления собственных значений для матрицу размера 4×4, что соответствует задаче поиска значений λ, для которых существуют ненулевые решения у уже рассмотренной нами системы уравнений (149). После исключения одной переменной придем к матрице степеней

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (157)$$

для которой определитель (156) будет равен

$$\Delta = 5; \quad 2; \quad 3; \quad 3; \quad 4; \quad 3 \qquad (158)$$

(выписываем только показатели степеней). Среди получившихся шести чисел наибольшее только одно, а это говорит о том, что в классической задаче о собственных значениях после исключения одной переменной потери корректности не происходит.

Если же рассмотреть систему уравнений (152), когда параметр λ входит в три первые уравнения и не входит в два последние, то после исключения двух переменных приходим (как показывают соотношения (154)) к матрице степеней

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{159}$$

для которой определитель (156) будет равен

$$\Delta = 4; \quad 4; \quad 4; \quad 4; \quad 4; \quad 4,$$

а это говорит о том, что уже после исключения двух переменных мы можем придти к некорректной задаче.

Исследование матриц степеней показывает, что простейшие случаи изменения корректности решаемой задачи возможны уже в системах, состоящих из трех уравнений. Рассмотрим в качестве примера совсем простую систему

$$\begin{cases} \lambda x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2\lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \tag{160}$$

для которой рассмотрим ту же задачу о нахождении значений параметра λ, при которых возможны ненулевые решения. Домножим второе уравнение на λ (это законно, поскольку $\lambda = 0$, как легко проверять, не является решением) и сложим с первым. Переменная x_1 исключится и мы получим

$$2\lambda^2 x_2 - (\lambda + 1)x_3 = 0. \qquad (161)$$

Вычтя из второго уравнения третье, получим

$$(1 - 2\lambda)x_2 + x_3 = 0. \qquad (162)$$

Исключив x_2, из уравнений (161) и (162), получим

$$(1 - \lambda)x_3 = 0, \qquad (163)$$

откуда находим единственное собственное значение $\lambda = 1$.

Однако задача исключения x_2 из системы уравнений (161) и (162) не корректна. Если в уравнении (162) коэффициент перед переменной x_3 равен не единице, а $(1+\varepsilon)$, то после исключения x_2 вместо уравнения (163) получим

$$(2\varepsilon\lambda^2 - \lambda + 1)x_3 = 0, \qquad (164)$$

из которого найдем два собственных значения λ_1 и λ_2, причем λ_2 не стремится к единице при $\varepsilon \to 0$.

В то же время если начать с третьего из уравнений (160) и подставить полученное из него значение $x_1 = x_2$ в первые два, то придем к системе

$$\begin{cases} \lambda x_2 - x_3 = 0 \\ (1-2\lambda)x_2 + x_3 = 0 \end{cases}, \qquad (165)$$

для которой задача вычисления собственного значения λ является корректной.

Таким образом корректность или не корректность решаемой задачи может зависеть от метода решения.

Другой пример — система

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + (1-\lambda)x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}. \qquad (166)$$

Для нее единственным значением параметра λ, при котором возможны ненулевые решения, является $\lambda = 0$ и задача его определения — корректна, если решение вести, начиная с последнего уравнения. Если же исключить переменные в порядке их индексов, что естественно при переходе на машинные вычисления, то после исключения x_1 путем домножения второго из уравнений (166) на $(1-\lambda)$ (с учетом того, что $\lambda = 1$ решением не является) и вычитания получившейся строки из первого уравнения получим

$$(\lambda^2 - 2\lambda)x_2 + (1-3\lambda)x_3 = 0. \qquad (167)$$

Вычитая из второго из уравнений (166) третье, получим

$$\lambda x_2 - 3x_3 = 0. \qquad (168)$$

Исключив x_3 из уравнений (167) и (168) получим

$$5\lambda x_2 = 0, \qquad (169)$$

откуда сразу получаем, что единственным собственным значением является $\lambda = 0$. Таким образом, по отношению к задаче определения собственных значений параметра λ система уравнений (167) и (168) эквивалентна (в классическом смысле) системе (166). Однако для системы (167)—(168) задача вычисления собственных значений параметра λ некорректна: если, например, в уравнении (168) коэффициент перед x_3 равен не трем, а равен $3(1+\varepsilon)$, то после исключения x_3 из уравнений (167) и (168) получим вместо уравнения (169) уравнение

$$(3\varepsilon\lambda^2 - 6\varepsilon\lambda - 5\lambda)x_2 = 0, \qquad (170)$$

из которого находим два собственных значения: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 2 + \frac{5}{3\varepsilon}$.

Этот пример особенно наглядно показывает, что сколь угодно малая вариация параметров, сколь угодно малая ошибка округления при вычислениях могут привести к грубой ошибке, и что второе (ложное) собственное значение λ при $\varepsilon \to 0$ отнюдь не стремится к λ_1 и исчезает лишь при точном равенстве $\varepsilon = 0$. Даже при очень малом ε второе значение λ_2 велико.

Примеры систем трех уравнений (160) и (166) являются наиболее простыми.

Для систем управления (в уравнениях которых одной из переменных является управление) потеря корректности существенна для систем четвертого порядка, как это и было показано в предыдущих разделах. Для систем управления изменение корректности выливается в потерю устойчивости при вариациях параметров и может быть, как уже говорилось, причиной опасных аварий и катастроф. Специфические проблемы, возникающие в системах управления, системах стабилизации и т.д. освещены в дополнительных главах, включенных во второе, дополненное, издание монографии [29], выпущенной издательством С.-Петербургского технического университета (бывшего Политехнического института) в 1997 г.

Не рассмотренным в [29J остался интересный вопрос о соотношения описания систем управления на языке структурных схем и на языке дифференциальных уравнений. Обычно эти языки описания считаются одинаково полными, и на практике, как правило, сперва составляют структурную схему проектируемой системы, отражающую взаимосвязь ее отдельных элементов, а затем на ее основе пишут систему дифференциальных уравнений, решение которой затем возлагают на вычислительную технику и полученными решениями руководствуются. Однако в действительности язык структурных схем более полно отражает явления и процессы, происходящие в реальный системе, чем язык дифференциальных уравнений, особенно при учете неизбежного на практике малого дрейфа параметров.

Вернемся к рассмотренному ранее объекту управления (33), управляющее воздействие на который — переменная x_2 — формируется согласно уравнению (35). На языке структурных схем система (33)—(35) будет выглядеть так, как это показано на рис. 1. Структурная схема, показанная на рис. 1 отражает тот факт, что управляющее воздействие x_2 в канале обратной связи формируется из переменных x_1, x_3 и x_4 с коэффициентами усиления -1; -2; -1.

Если переменные x_3 и x_4 для непосредственного измерения и использования в канале обратной связи недоступны, а мы хотим обеспечить те же самые переходные процессы, которые протекали в системе (33)—(35), то мы можем, пользуясь уравнениями (33), выразить переменные x_3 и x_4 через доступные нам переменные x_1 и x_2 и их производные. Сделав такую замену переменных, мы вместо обратной связи (регулятора), описываемого уравнением (35) получим эквивалентный ему регулятор (обратную связь), описываемый уравнением (26).

На языке структурных схем объект управления (33) с обратной связью (26) будет выглядеть так, как это показано на рис.2. Подчеркнем, что при неизменных, соответствующих расчетным, значениях параметров объекта управления и регулятора, структурные схемы, показанные на рис. 1 и рис. 2 равнозначны и им одинаково соответствуют переходные процессы, описываемые формулой (29). Однако, если мы в структурной схеме, показанной на рис. 1, изменим на малые величины коэффициенты регулятора (35) — т.е. изменим на малые величины коэффициенты (-1); (-2); и (-1) в канале обратной связи, то переходный процесс изменится мало и устойчивость замкнутой системы сохранится. Если же мы даже сколь угодно мало изменим некоторые из коэффициентов в канале обратной связи для структурной схемы, показанной на рис. 2, то переходные процессы могут измениться коренным образом и замкнутая система может стать неустойчивой. На языке структурных схем все эти явления описываются проще и нагляднее, чем на языке дифференциальных уравнений, поскольку в структурной схеме особенно ясно видно, что вариации параметров цепи обратной связи могут быть независимы от вариаций параметров объекта управления. Кроме того, особенно наглядно видно, что хотя структурные схемы, показанные на рис. 1 и рис. 2 при неизменных параметрах и коэффициентах описывают одни и те же переходные процессы в реальной системе, но они все же не тождественны друг другу и поэтому при вариациях параметров ведут себя по-разному. Это позволяет лучше понять, почему уравнения (25)—(26) и (33)—(35) полностью эквивалентны друг другу в классическом смысле и в то же время не эквивалентны в расширенном смысле.

Рассмотрим теперь вопрос о поведении решений дифференциальных уравнений на фазовой плоскости. Как известно, качественную картину поведения решений дифференциальных уравнений удобно изучать на фазовой плоскости — т.е. плоскости, где по оси абсцисс отложена одна из переменных, а по оси ординат — другая (или производная первой переменной).

Рассмотрим, для примера, систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -\omega_0^2 x_1 \end{cases}. \tag{171}$$

Эта система легко интегрируется и мы находим решения:

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 \sin(\omega_0 t + c_2) \\ x_2 &= c_1 \omega_0 \cos(\omega_0 t + c_2) \end{aligned}, \tag{172}$$

где c_1 и c_2 — постоянные интегрирования, зависящие от начальных условий. Исключая переменную t (время), найдем уравнения траекторий движения на фазовой плоскости:

$$\frac{x_1^2}{c_1^2} + \frac{x_2^2}{c_1^2 \omega_0^2} = 1. \qquad (173)$$

Непосредственно очевидно, что уравнение (173) является уравнением семейства подобных, вложенных друг в друга эллипсов, причем через каждую точку фазовой плоскости проходит только один эллипс, соответствующий определенному начальному условию. Из уравнения (173) вытекает периодичность решений, их ограниченность и т. п. При этом — что особенно важно — эти свойства решений можно получить и изучать без непосредственного интегрирования исходных уравнений (171). Действительно, поделим второе из уравнений (171) на первое. Получим уравнение

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\omega_0^2 \frac{x_1}{x_2}, \qquad (174)$$

дифференциальное уравнение первого порядка, интегрировать которое много легче, чем систему (171). Интегрируя уравнение (174) методом разделения переменных, получим уравнение (173), пользуясь которым мы можем установить качественную картину решений (ограниченность, периодичность и т.п.) без интегрирования самих уравнений (171).

Тот же метод может быть использован (и широко используется) для исследования поведения решений нелинейных уравнений, которые не могут быть проинтегрированы в элементарных функциях.

Поэтому метод фазовой плоскости, составления фазового портрета широко используется при исследовании самых различных объектов, математической моделью которых являются системы линейных и нелинейных дифференциальных уравнений. Количество книг и статей, посвященных различным аспектам методики фазовой плоскости и ее приложений поистине необъятно велико.

Одним из важнейших условий правильного применения методики фазовой плоскости является выявление условий, при которых качественная картина фазового портрета, качественная картина поведения траекторий на фазовой плоскости, не менялась бы коренным образом при малых изменениях коэффициентов в дифференциальных уравнениях или малых изменениях их правых частей, которые в реальных условиях совершенно неизбежны.

Еще в классической монографии [30] совершенно правильно указывалось. что "ни один из учитываемых нами факторов не может оставаться абсолютно неизменным", "что параметры в реальной физической системе нельзя считать абсолютно постоянными, а лишь приблизительно постоянными", и что "поэтому мы можем сразу отказаться от рассмотрения таких качественных сторон движения, которые исчезают при небольших изменениях вида дифференциальных уравнений, описывающих систему".

Рассмотрим поэтому внимательнее возможность качественною изменения фазового портрета, качественной картины поведения траекторий на фазовой плоскости при решении уравнений, в ходе выполняемых при решении преобразований уравнений.

Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2 + 2x_3, \tag{175}$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + x_2 + 3x_3, \tag{176}$$

$$x_1 + x_2 = 0. \tag{177}$$

Эта система совершенно элементарно решается, если уравнение (177) подставить в (175) и (176), а после подстановки вычесть их одно из другого. Получим:

$$x_3 = 0;\ x_2 = c_1;\ x_1 = -c_1 \tag{178}$$

Теперь посмотрим, что получится, если мы используем традиционный метод решения путем последовательного исключения переменных. начиная с x_1. Домножив уравнение (176) на операторный полином $D-1$ (и проверив потом, что функция $x_1 = c_0 e^t$, соответствующая

$D - 1 = 0$, решением не является), мы можем вычесть его из уравнения (175). Получим уравнение, не содержащее x_1:

$$(D^2 - 2D)x_2 + (1 - 3D)x_3 = 0 . \qquad (179)$$

Вычтя сумму $x_1 + x_2$ равную нулю, из уравнения (176), получим второе уравнение с переменными x_2 и x_3:

$$Dx_2 = 3x_3 . \qquad (180)$$

Исключив из системы уравнений (179) (180) переменную x_3, получим

$$5Dx_2 = 0 , \qquad (181)$$

откуда, как и следовало ожидать, находим, что $x_2 = c_1$; $x_3 = 0$; $x_1 = -c_1$, т.е. находим те же решения, что и ранее. Это лишний раз говорит о том, что система уравнений (179), (180), (177) эквивалентна системе (175), (176), (177), поскольку мы пользовались только эквивалентными преобразованиями. Однако система (179), (180), (177) эквивалентна системе (175), (176), (177) только в классическом смысле, но не в расширенном. При вариациях коэффициентов системы ведут себя по-разному. Задача нахождения решений $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ для системы уравнений (179), (180), (177) — некорректна.

Действительно, пусть в уравнении (180) коэффициент при x_3 не тройка, а $3(1+\varepsilon)$, где ε — число, малое по сравнению с единицей. Тогда после исключения x_3 придем к уравнению

$$[3\varepsilon D^2 - (5 + 6\varepsilon)D]x_2 = 0 , \qquad (182)$$

откуда, решив его, получаем

$$x_2 = c_1 + c_2 e^{\left(2+\frac{5}{3\varepsilon}\right)t}, \qquad (183)$$

$$x_3 = \left(\frac{6\varepsilon+5}{9\varepsilon+9\varepsilon^2}\right) c_2 e^{\left(2+\frac{5}{3\varepsilon}\right)t}. \qquad (184)$$

Теперь мы убеждаемся, что уже при сколь угодно малых вариациях коэффициентов уравнений (179) или (180), или же при сколь угодно малых ошибках округления и ходе последовательного исключения переменных из исходной системы (175)—(177) и решения уравнений и весь характер фазового портрета, поведения траекторий на фазовой плоскости, меняются коренным образом.

Рассмотрим траектории решений уравнений (175)—{177} на фазовой плоскости, где по оси ординат отложены значения переменной x_2, а по оси абсцисс — значения переменной x_3. Учитывая формулы (178) устанавливаем, что фазовый портрет решений уравнений (175)—(177) имеет вид, показанный на рис. 3 — т.е. состоит из набора точек $x_2 = c_1$, заполняющих всю ось ординат (на рис. 3 символически показаны отдельные точки). Тот же самый фазовый портрет будет и у решений уравнений (179), (180), (177), которые эквивалентны (в классическом смысле, но не в расширенном) уравнениям (175)—(177). Однако, если в уравнении (180) коэффициент при x_3 равен не тройке, а $3(1+\varepsilon)$ и $\varepsilon \neq 0$, то характер фазовых траекторий и весь фазовый портрет меняется коренным образом: формулы (183)—(184) показывают, что теперь

$$x_2 = c_1 + \frac{9\varepsilon+9\varepsilon^2}{6\varepsilon+5} x_3. \qquad (185)$$

Рассмотрим сперва случай $\left(2+\frac{5}{3\varepsilon}\right)>0$. В этом случае показатели экспонент в формулах (183)—(184) положительны и с ростом переменной t (времени) решения x_2 и x_3 будут возрастать неограниченно. Фазовые траектории будут прямыми линиями, идущими вверх и вправо. Наклон этих линий зависит от ε. На рис. 4 показан фазовый портрет для одного из значений ε.

Теперь перейдем к случаю, когда $\left(2+\frac{5}{3\varepsilon}\right)<0$ и поэтому показатели экспонент в формулах (183) и (184) отрицательны. В этом случае с ростом времени будут $x_3 \to 0$, $x_2 \to c_1$ и с учетом формулы (185) фазовые траектории принимают другой вид: оставаясь прямыми линиями, заполняющими всю фазовую плоскость, они теперь стремятся к оси ординат и слева и справа и заканчиваются на ней, как показано на рис.5.

Мы убеждаемся, что при преобразованиях уравнений, если эти преобразования эквивалентны в классическом смысле, но не в расширенном, реальные фазовые портреты решений с учетом неизбежных вариаций и сам характер фазовых траекторий могут измениться коренным образом.

Поэтому при исследованиях различных объектов и систем на фазовой плоскости нужно с особой тщательностью следить за используемыми преобразованиями системы и различать преобразования, эквивалентные и в классическом, и в расширенном смысле, от преобразований, эквивалентных в классическом смысле, но не в расширенном. Желательно при исследовании устойчивости характера фазового портрета по отношению к малым изменениям коэффициентов, параметров и т.п. проводить исследования для всех используемых форм записи дифференциальных уравнений. По существу, еще в §3, при анализе системы уравнений (25)—(26) мы убедились, что при вариациях некоторых коэффициентов этой системы характер фазовою портрета резко изменится — при расчетных значениях параметров все фазовые траектории стремятся с течением времени к началу координат, а уже при сколь угодно малых вариациях некоторых коэффициентов переменные $x_1(t)$ и $x_2(t)$ могут неограниченно возрастать при $t \to \infty$. Этого важного свойства фазового портрета мы не увидим, если перепишем уравнения (25)—(26) (как это очень часто делается) к нормальной форме Коши (33)—(35), хотя уравнения (25)—(26) и (33)—(35) эквивалентны (в классическом смысле) и при расчетных значениях коэффициентов имеют одни и те же решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

Таким образом, неучет различия между преобразованиями, эквивалентными в расширенном смысле и преобразованиями, эквивалентными в классическом смысле, но не в расширенном, может вести к ошибочным результатам в различных областях, в частности, и при исследовании фазовых портретов. Наиболее опасными ошибками, естественно, являются рассмотренные в §§ 3—11 ошибки в оценке запасов устойчивости, поскольку они могут стать причиной опасных аварий.

Кроме того, как уже показано, использование подобных преобразований может стать дополнительной причиной ошибок в различных расчетах. В настоящем отчете это показано на примере обобщенной задачи вычисления собственных значений, но вполне возможно, что подобные ошибки могут возникать и при других расчетах и вычислениях. Здесь открыто большое поле для дальнейшей научной работы.

Сопоставление различных методов исключения переменных

В предыдущем изложении мы рассматривали простейший метод исключения переменных из системы линейных однородных уравнений (119) — метод последовательного исключения путем домножений и сложений. Исследуя этим методом системы, состоящие из четырех уравнений, с четырьмя переменными, мы обнаружили, что после исключения двух переменных при $a_{31}=0$ или $a_{44}=0$ происходит потеря корректности решаемой задачи о нахождении собственных значений параметра λ, а при $a_{31}a_{44}\neq 0$ потери корректности не происходит.

Ранее мы исследовали в основном системы, в которых $a_{31}a_{44}=0$, сейчас перенесем внимание на случай $a_{31}a_{44}\neq 0$.

Вернемся к системам управления и рассмотрим систему, состоящую из объекта управления

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_3 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_3 + u \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_2 + 2u \end{cases} \qquad (186)$$

и регулятора

$$u = -x_1 - x_2 - x_3 . \qquad (187)$$

Подставив (187) в (186), получим уравнения замкнутой системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \\ \dot{x}_3 = -x_1 - x_2 - 2x_3 \end{cases} . \qquad (188)$$

Характеристический полином замкнутой системы равен определителю

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2 = (\lambda+1)^2(\lambda+2)$$

(189)

и имеет корни $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, лежащие в левой полуплоскости далеко от мнимой оси.

Замкнутая система устойчива.

Теперь предположим, что непосредственно можно измерить и использовать в канале обратной связи только переменную x_3. Преобразуем, как и ранее, уравнения объекта управления и регулятора к переменным x_3 и u, исключив переменные x_1 и x_2 путем домножений и сложений. Используя ранее полученные формулы (133)—(136), нетрудно вычислить:

$$A_1 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2,$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\lambda^2 + 2\lambda,$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1,$$

$$A_4 = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(\lambda + 1).$$

Уравнения объекта управления (186) и регулятора (187) в переменных x_3 и u принимают вид

$$\begin{gathered} (D^3 - 3D - 2)x_3 = 2(D^2 + D)u \\ (D^2 + 2D + 1)x_3 = (D + 1)u \end{gathered}. \qquad (190)$$

Характеристический полином замкнутой системы равен определителю

$$\begin{vmatrix} -\lambda^3 + 3\lambda + 2 & 2(\lambda^2 + \lambda) \\ \lambda^2 + 2\lambda + 1 & -(\lambda + 1) \end{vmatrix} = \lambda^4 + 5\lambda^3 + 6\lambda^2 + 7\lambda + 2 = (\lambda + 1)^3(\lambda + 2)$$

Мы убеждаемся, что по сравнению с характеристическим полиномом (189) появился еще один корень $\lambda_4 = -1$, не порожденный вариациями параметров и от них не зависящий. Это говорит о том, что система (190) не полностью эквивалентна, (в классическом смысле) системе (186)—(187).

В процессе домножения и сложения мы ввели лишний корень. В данном частном случае этот корень нетрудно устранить: второе из уравнений (190) можно сократить на операторный полином $(D + 1)$ и мы придем к следующим уравнениям для объекта управления и регулятора:

$$(D^3 - 3D - 2)x_3 = 2(D^2 + D)u\,, \qquad (192)$$

$$(D+1)x_3 = u\,. \qquad (193)$$

Система (192)—(193) имеет тот же порядок, что и исходная система (186)—(187) и тот же характеристический полином.

Нетрудно убедиться, что и система (190) и система (192)—(193) сохраняют устойчивость при вариациях любых своих коэффициентов (так же, как и система (186)—(187)). Система (192)—(193) имеет тог же характеристический полином, что и система (186)—(187), и обе системы эквивалентны между собой как в классическом смысле, так и в расширенном. Потери корректности при использованных нами преобразованиях не произошло.

Однако присутствие в правой и левой частях уравнения регулятора одинакового операторного множителя, сокращение на который возможно, является редким частным случаем, В общем же случае, когда мы исключаем по описанной ранее простейшей методике переменные x_1 и x_2 из уравнений объекта управления и регулятора типа (186)—(187), но с другими коэффициентами, то при $a_{31}a_{44} \neq 0$ мы приходим к системе, у которой характеристический полином имеет лишний четвертый корень по сравнению с исходной системой (и этот корень не зависит, естественно, от вариаций параметров и коэффициентов системы). Поэтому преобразованная система не полностью эквивалентна исходной в классическом смысле, и переходные процессы в исходной и преобразованной системах не будут тождественны. Поэтому были предложены другие методы исключения переменных, не нарушающие эквивалентности в классическом ее смысле.

Еще в [15] был рассмотрен подобный метод для объектов управления третьего порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1u \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2u \\ \dot{x}_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3u \end{cases} \qquad (194)$$

с регулятором вида

$$u = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 . \qquad (195)$$

Характеристический полином замкнутой системы (194)—(195) будет полиномом третьей степени.

Если непосредственно измерима только переменная x_3 то из уравнений (194) переменные x_1 и x_2 исключаются уже описанным нами способом, и в результате получается хорошо знакомое уравнение

$$A_1(D)x_3 = A_2(D)u , \qquad (196)$$

где

$$A_1 = \begin{vmatrix} a_{11} - D & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - D & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - D \end{vmatrix} \qquad (197)$$

и соответственно,

$$A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} - D & a_{12} & -b_1 \\ a_{21} & a_{22} - D & -b_2 \\ a_{31} & a_{32} & -b_3 \end{vmatrix} \qquad (198)$$

Для исключения переменных x_1 и x_2 из уравнения (195) предлагалось домножить правую и левую части первого из уравнений (194) на $(r_1 + r_2 D)$, второго — на $(s_1 + s_2 D)$, третьего — на $(t_1 + t_2 D)$ (где все r, s и t — подлежащие определению коэффициенты), после чего все три уравнения складываются, и к сумме прибавляется уравнение (195). В результате получалась зависимость между управлением u и переменными x_1, x_2, x_3 и их производными; в этой зависимости неизвестные пока коэффициенты $r_1;\ldots;t_2$ выбирались так, чтобы обращались в нуль коэффициенты перед x_1 и $\dot{x}_1$, x_2 и $\dot{x}_2$. Условие обращения в нуль этих коэффициентов давало систему уравнений, необходимых для определения $r_1;\ldots;t_2$. Окончательно получается уравнение регулятора в виде

$$W_1(D)x_3 = W_2(D)u, \qquad (199)$$

где $W_1(D)$ — полином второй степени, а $W_2(D)$ — полином первой степени. Характеристический полином замкнутой системы будет равен

$$W_1 A_2 - W_2 A_1, \qquad (200)$$

и при этом способе исключения переменных он всегда будет полиномом третьей степени, как у исходной системы (194)—(195) (при $a_{31}a_{44} = 0$ оба способа исключения совпадают), лишних корней не будет, члены четвертой степени в полиноме (200) взаимно сократятся, переходные процессы будут те же, что и в исходной системе. Но сокращение членов с четвертой степенью переменной D будет, естественно, происходить лишь в том случае. если все коэффициенты и параметры объекта управления (196) и регулятора (199) в точности равны своим расчетным значениям. Уже при сколь угодно малых вариациях их параметров сокращения может и не произойти, а тем самым, как уже ранее было показано, может потеряться и устойчивость замкнутой системы. Уравнения (196)—(199) эквивалентны уравнениям (194)—(195) в классическом смысле и не эквивалентны — в расширенном.

Данный способ исключения переменных громоздок и М.А. Галактионов предложил способ исключения, пригодный для любого числа переменных и для любой прямоугольной матрицы H, связывающей вектор y реально измеряемых и реально используемых в цепи обратной связи переменных с полным вектором x переменных в объекте управления. Способ М.А. Галактионова опубликован в [1], в §§ 3—4 главы пятой, поэтому ограничимся кратким его изложением.

Метод применим к линейным объектам управления произвольного порядка

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad (201)$$

где A — матрица размера $n \times n$ постоянных коэффициентов, а B — вектор-столбец коэффициентов при управляющем воздействии. Объект управления (201) замкнут регулятором

$$u = Kx, \qquad (202)$$

где K — матрица-строка.

Пусть непосредственно измеримыми и непосредственно используемыми в канале обратной связи могут быть только переменные y, связанные с переменными x прямоугольной матрицей:

$$y = Hx \qquad (203)$$

(в частном случае матрица H может быть и матрицей-строкой; гак в примере с системой (194)—(195) было $H = (0;0;1)$. Далее рассмотрим случай $n=3$ и $H=(0;0;1)$. Поскольку вопрос об устойчивости системы (201)—(202) и о сохранении устойчивости при вариациях параметров сводится, как известно, к вопросу о собственных значениях параметра λ, который ставится на место оператора дифференцирования, то произведем эту замену и запишем уравнение (201) в виде:

$$\lambda x = Ax + Bu\,. \qquad (204)$$

Теперь умножим правую и левую части уравнения (203) на λ и подставим вместо λx его значение из (204). Получим

$$\lambda y = HAx + HBu\,. \qquad (205)$$

Умножим правую и левую части этого равенства еще раз на λ и снова подставив вместо произведения λx его значение из (204), получим:

$$\lambda^2 y = HA^2 x + HB\lambda u + HABu\,. \qquad (206)$$

Уравнения (203), (205) и (206) можно рассматривать как одно векторно-матричное уравнение, связывающее y, x и u:

$$\begin{pmatrix} y \\ \lambda y - HBu \\ \lambda^2 y - HB\lambda u - HABu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \\ HA \\ HA^2 \end{pmatrix} x\,. \qquad (207)$$

Из уравнения (207) следует, что

$$x = \begin{pmatrix} H \\ HA \\ HA^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y \\ \lambda y - HBu \\ \lambda^2 y - HB\lambda u - HABu \end{pmatrix}, \qquad (208)$$

где символом

$$\begin{pmatrix} H \\ HA \\ HA^2 \end{pmatrix}^{-1} \qquad (209)$$

обозначена матрица, обратная к матрице

$$\begin{pmatrix} H \\ HA \\ HA^2 \end{pmatrix}. \qquad (210)$$

Из уравнения (208) следует что

$$x = L_1 y + L_2(\lambda y - HBu) + L_3(\lambda^2 y - HB\lambda u - HABu), \qquad (211)$$

где L_1, L_2, L_3 — векторы-столбцы, и, следовательно,

$$u = Kx = KL_1 y + KL_2(\lambda y - HBu) + KL_3(\lambda^2 y - HB\lambda u - HABu). \qquad (212)$$

Поскольку в рассматриваемом нами случае матрица $H = (0;0;1)$, а произведение матрицы-строки на вектор-столбец является числом, то из формулы (212) следует, что если $y = x_3$, то после исключения переменных x_1 и x_2 регулятор (202) приобретает вид

$$(n_1 D^2 + n_2 D + n_3) x_3 = (n_4 D + n_5) u\,, \qquad (213)$$

где $n_1; \ldots; n_5$ — числа, которые можно вычислить на основе формулы (212). Анализ таких чисел показывает, что в общем случае при $b_3 \neq 0$ замкнутая система может терять устойчивость при сколь угодно малых вариациях параметров объекта управления или регулятора (213). После исключения переменных x_1 и x_2 произошла потеря корректности рассматриваемой нами задачи об устойчивости замкнутой системы.

Разумеется, описанный метод расчета регулятора, использующею только реальный вектор переменных на выходе, может применяться к объектам управления более высокого порядка и к любым матрицам (203). Примеры приведены в [1].

Мы убеждаемся, что потеря корректности при преобразованиях уравнений является тонким и сложным явлением. Она может зависеть от вида используемых преобразований и даже от порядка их. В то же время неожиданная встреча с изменением корректности может вести к ошибкам при анализе сохранения устойчивости самых различных систем и устройств и может быть причиной связанных с этими ошибками аварий и катастроф. Потеря корректности может также быть еще одной дополнительной причиной ошибок в расчетах при самых малых погрешностях округления при вычислениях.

Явление потери корректности требует дальнейшего углубленного исследования и изучения,

§ 14. О третьем классе задач математики, физики и техники — о задачах промежуточных между корректными и некорректными

Рассмотренные нами примеры показывают, что помимо класса корректных и класса некорректных задач математики, физики и техники существует еще один, третий класс — класс задач, меняющих свою корректность при эквивалентных преобразованиях — в том числе и при преобразованиях, используемых в ходе их решения.

Корректные задачи решались в математике с давних времен. Начало исследованию некорректных задач положили работы выдающегося французского математика Ж. Адамара (1865-1963), первая из которых датируется 1902 годом [22]. Во второй половине двадцатого века обнаружилась важность класса некорректных задач и были предложены методы их регуляризации и решения. Это было сделано прежде всего трудами академика Л.Н. Тихонова и его школы [21, 22] и др., которые явились важным вкладом в мировую науку и получили заслуженное признание.

В работах [1–5, 28, 29] обрисовались контуры еще одного, третьего класса задач математики, физики и техники — класса, объединяющего задачи, способные изменять корректность при эквивалентных преобразованиях. Выделение задач, изменяющих корректность, в особый класс введено и обосновано в работе [32]. История вопроса изложена в [31].

Этот новый, третий класс задач еще только начинает исследоваться. Важность его заключается в том, что неожиданное изменение корректности может стать источником ошибок в расчетах.

Наиболее опасно, когда первичная, исходная, непосредственно вытекающая из законов механики и физики математическая модель исследуемого объекта или явления в отношении рассматриваемой нами задачи не корректна.

Поскольку исходные модели часто неудобны для исследования, их обычно преобразуют, приводя, как правило, к "стандартной" форме, для исследования которой можно применить хорошо разработанную теорию и программное обеспечение. Для приведения математической модели к удобной форме используют, разумеется, только эквивалентные преобразования, и поэтому решения исходной и преобразованной модели совпадают.

Что касается корректности, то ее проверяют обычно один раз, по удобной преобразованной системе, молчаливо предполагая, что раз использованные преобразования были эквивалентными (в классическом смысле!) и решения не изменились, то не должна измениться и корректность решаемой задачи. На самом деле, как мы уже убедились, это не так, и при эквивалентных преобразованиях корректности может измениться. Если проверенная нами преобразованная математическая модель в отношении рассматриваемой нами задачи корректна, то это еще почти ничего не говорит о корректности исходной модели, и главное — об истинной корректности рассматриваемой нами задачи. А ошибка в проверке корректности может стать причиной аварий и катастроф; об этом уже говорилось.

Рассмотрим некоторые примеры.

Первым примером может служить известная в 70-х годах проблема синтеза оптимального авторулевого, обеспечивающего минимальную потерю скорости судна при его движении в условиях нерегулярного морскою волнения. Математической моделью движения водоизмещающего судна по курсу, как известно, может служить уравнение

$$(T_1^2 D^2 + T_2 D)\theta = u + \varphi(t), \qquad (214)$$

в котором θ — это угол отклонения судна от курса в градусах, T_1 и T_2 — постоянные времени, в секундах, $D=\dfrac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования, u — угол отклонения руля от диаметрали в градусах (он играет роль управления), $\varphi(t)$ — возмущающее воздействие, момент сил от ветра и морского волнения, сбивающий судно с курса и измеряемый в градусах отклонения руля, создающего момент той же величины [16].

Уравнение (214) — математическая модель движения судна по курсу — непосредственно вытекает из уравнений теоретической механики, из уравнений равновесия моментов относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс судна. Правая часть равенства (214) равна сумме моментов относительно этой оси, левая отражает момент инерции корпуса и демпфирующее влияние воды.

Хорошо известно, что момент $\varphi(t)$ является стационарным случайным процессом и его спектральная плотность мощности может быть аппроксимирована аналитическим выражением

$$S_\varphi = D_\varphi \frac{1}{(\omega^2-\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\omega^2} \qquad (215)$$

(спектром Рахманина-Фирсова). Где D_φ — дисперсия, α и β — коэффициенты, зависящие от характера волнения. Момент $\varphi(t)$ может быть также представлен как процесс на выходе линейного звена второго порядка

$$[D^2+2\alpha D+\alpha^2+\beta^2]\varphi=\eta(t), \qquad (216)$$

на входе которого присутствует функция $\eta(t)$, являющаяся возмущающим воздействием типа "белого шума".

Уравнение (216) можно привести к виду двух уравнений первого порядка, если ввести новые переменные $x_1 = \varphi$ и $x_2 = \dot{\varphi}$. Получим:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -(\alpha^2 + \beta^2)x_1 - 2\alpha x_2 + \eta(t) \end{cases}, \qquad (217)$$

Потеря скорости возникает от дополнительного сопротивления движению корпуса судна при $\theta \neq 0$ и дополнительного сопротивления, создаваемого рулем при отклонении руля от диаметрали.

В целом, как показано, например, в [16], потеря скорости Δv пропорциональна интегралу

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T (m^2\theta^2 + u^2)dt\,, \qquad (218)$$

где m^2 — весовой коэффициент, зависящий от формы корпуса судна.

В традиционно используемых авторулевых используется закон управления

$$u = -\left(k_1 D + k_0 + \frac{k_u}{D}\right)\theta\,, \qquad (219)$$

где k_1, k_2 и k_u —постоянные коэффициенты, причем третий коэффициент много меньше первых двух, на динамику судна он существенного влияния не оказывает и предназначен для компенсации очень медленно изменяющихся составляющих в возмущающих воздействиях.

Закон управления (219) в общем случае не обеспечивает, как легко проверить, минимума потери скорости, пропорциональной интегралу (218), и поэтому еще в конце 60-х годов были предложены другие законы управления, способные уменьшить потерю скорости при движении судна в условиях волнения на море и принести тем самым крупный экономический эффект.

Найти эти законы нетрудно: достаточно ввести новые переменные $x_3 = \theta$ и $x_4 = \dot{\theta}$. Тогда уравнения (214) и (216) запишутся в нормальной форме Коши:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -(\alpha^2 + \beta^2)x_1 - 2\alpha x_2 + \eta(t) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \dfrac{T_2}{T_1^2} x_3 + \dfrac{1}{T_1^2} x_1 + \dfrac{1}{T_z^2} u \end{cases} . \qquad (220)$$

Далее можно воспользоваться уже готовым аппаратом теории синтеза оптимальных систем управления [13], согласно которой минимум интеграла (218) при возмущающих воздействиях $\eta(t)$ типа "белого шума" и уравнениях связи (220) будет достигаться при законе управления:

$$u = -k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_3 x_3 - k_4 x_4 , \qquad (221)$$

где постоянные коэффициенты $k_1, \ldots, k_4$ зависят от коэффициентов системы (220) и весового коэффициента в интеграле (218). Для вычисления числовых значений коэффициентов $k_1, \ldots, k_4$ можно воспользоваться хорошо разработанным программным обеспечением теории синтеза оптимальных регуляторов — разработанным, естественно, для "стандартной" формы уравнений связи — нормальной формы Коши. Вычислив коэффициенты k_1, k_2, k_3, k_4 и подставив управление (221) в уравнения (220), нетрудно убедиться, что замкнутая система устойчива и в общем случае сохраняет устойчивость при вариациях любых параметров судна или закона управления. Рассматриваемая задача о синтезе закона управления (221) — корректна (за вычетом некоторых особых частных случаев).

Однако непосредственно измерить и ввести в канал обратной связи момент возмущающих сил $\varphi(t)$ и его производную практически невозможно. Поэтому из уравнения (221) нужно исключить лишние переменные путем эквивалентных преобразований. Сделать это нетрудно, и после исключения придем к закону управления, связывающему легко измеряемую переменную θ и управление u. Поскольку использованные преобразования были эквивалентными, то преобразованный закон управления должен был обеспечивать устойчивость замкнутой системы и то же самое значение потери скорости (218), что и закон (221). Но на ходовых испытаниях реального судна замкнутая система показала свою неустойчивость, что сразу и на много лет подорвало доверие к теории оптимального управления и осложнило возможность использования ее результатов.

Причина парадокса была разъяснена в [16]. Там было показано, что, например, для судов-танкеров типа "Казбек", для которых уравнение (214) принимает вид

$$(690D^2 + 17{,}2D)\theta = u + \varphi(t), \qquad (222)$$

а весовой коэффициент m^2 в интеграле (218) равен 6,25, закон управления, обеспечивающий минимум потери скорости и приведенный к переменным θ и u, может быть приведен к виду

$$u = -\left(\frac{690D^2 + 61{,}2D + 2{,}5}{0{,}973 - 0{,}06D} - 690D^2 - 17{,}2D \right)\theta . \qquad (223)$$

Характеристический полином замкнутой системы имеет вид

$$690\lambda^2 + 61{,}2\lambda + 2{,}5 \qquad (224)$$

и является гурвицевым. Замкнутая система устойчива. Однако, если параметры судна хотя бы на сколь угодно малые величины отличаются от расчетных значений (от $T_1^2 = 690\,\text{сек}^2$ и $T_2 = 17{,}2\,\text{сек.}$) и математическая модель судна принимает вид

$$(690D^2 \pm \varepsilon_2 D^2 + 17{,}2D \pm \varepsilon_1 D)\theta = u + \varphi(t) , \qquad (225)$$

то характеристический полином замкнутой системы принимает вид

$$(\pm\varepsilon_2\lambda^2 \pm \varepsilon_1\lambda)(0{,}973 - 0{,}06\lambda) + 690\lambda^2 + 61{,}2\lambda + 2{,}5 \qquad (226)$$

и уже при сколь угодно малых вариациях параметров характеристический полином перестает быть гурвицевым и замкнутая система теряет устойчивость. Таким образом, все выводы теории оптимального управления были верны, распространившееся тогда недоверие к ним не было оправданным, замкнутая система (222)—(223) была устойчивой, но с практической точки зрения система, теряющая устойчивость при сколь угодно малых вариациях параметров, равнозначна системе неустойчивой. В этом и заключался парадокс — то же самое явление (изменение свойства сохранения устойчивости при сколь угодно малых вариациях параметров) имеет место и для других судов, а также для очень многих объектов энергетики, автоматизированного электропривода, химической промышленности и т.п. — для всех объектов, математическая модель которых, приведенная к функции от одной переменной x_1 может быть приведена к виду

$$A(D)x_1 = u + \varphi(t)\,, \tag{227}$$

где $A(D)$ — некоторый полином степени n от оператора дифференцирования $D = \dfrac{d}{dt}$, а возмущающее воздействие $\varphi(t)$ является стационарным случайным процессом со спектральной плотностью мощности вида (215).

В этом случае, как было показано в [16], управление, доставляющее минимум среднеквадратичным функционалам, типа функционала

$$J = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T (m^2 x_1^2 + u^2)dt \tag{228}$$

имеет вид

$$u = -\left[\frac{G(D)}{a+bD} - A(D)\right]x_1\,, \tag{229}$$

где $G(D)$ — гурвицев полином степени n, коэффициенты которого, а также коэффициенты a и b в знаменателе вычисляются по методике, приведенной в [16]. Характеристический полином замкнутой системы (227)—(229) равен гурвицевому полиному $G(D)$. Замкнутая система устойчива. Однако если параметры объекта управления даже сколь угодно мало отличаются от расчетных, и его математическая модель имеет вид

$$A_1(D)x_1 = u + \varphi(t)\,, \qquad (230)$$

где $A_1(D) = A(D) \pm \varepsilon_n D^n \pm \ldots \pm \varepsilon_0$, а числа $\varepsilon_n, \ldots, \varepsilon_0$ могут быть сколь угодно малы, то характеристический полином принимает вид

$$(a + b\lambda)(\varepsilon_n \lambda^n + \ldots + \varepsilon_0) + G(\lambda) \qquad (231)$$

и может быть не гурвицевым при сколь угодно малом ε_n. Таким образом, рассматриваемая нами задача о минимуме функционалов вида (228) не корректна. Уже при сколь угодно малом ε_n эти функционалы могут вообще не иметь конечного значения.

В то же время если мы проведем эквивалентные (в классическом смысле) преобразования, если дифференциальное уравнение n-го порядка (227) приведем к нормальной форме Коши, а возмущающее воздействие со спектральной плотностью мощности (215) представим в виде решения системы дифференциальных уравнений вида (217) то та же задача о минимуме функционалов (228) будет выглядеть корректной — исследуя влияние вариаций любых коэффициентов расширенной системы дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши на минимум функционалов (223) мы убедимся, что этот минимум претерпит только малые изменения.

Таким образом, обнаруженное первоначально при исследовании оптимальных систем явление изменения корректности при эквивалентных преобразованиях математических моделей может встречаться у очень многих объектов промышленности, энергетики и транспорта.

Для всех этих объектов однократная проверка корректности недостаточна. Необходимо либо проверять корректность по первичным, наиболее близким к физической реальности уравнениям, либо следить за тем, чтобы используемые преобразования математической модели были эквивалентны не только в классическом смысле, но и в расширенном. Пренебрежение этими рекомендациями может стать причиной аварий и катастроф.

Вот конкретный пример из области расчета электроприводов постоянного тока. Как известно, основным уравнением электропривода является уравнение равновесия моментов на валу:

$$T_M \frac{d\omega}{dt} = M_в - M_c, \qquad (232)$$

где T_M — механическая постоянная времени, ω — частота вращения, $M_в$ — момент двигателя, пропорциональный току якоря, M_c — момент сопротивления. Если момент сопротивления испытывает колебания, то колеблется и скорость вращения. Для уменьшения колебаний воздействуют на ток якоря. На основе уравнения (232) легко написать уравнение в отклонениях:

$$T_M \frac{dx_3}{dt} = u + \varphi(t), \qquad (233)$$

где x_3 — отклонение частоты вращения от равновесного значения, u — управляющее воздействие, отклонение тока якоря от равновесного значения, $\varphi(t)$ — отклонение момента сопротивления от его среднего значения, стационарный случайный процесс со средним значением, равным нулю. В дальнейшем будем предполагать, как и ранее, что его можно представить в виде решения $x_1(t) = \varphi(t)$ системы уравнений

(217) и поставим задачу о синтезе закона управления электроприводом, обеспечивающего минимум функционалу (228). Для простоты и удобства проверки всех дальнейших расчетов примем $T_M = 1$, $m^2 = 1$, $\beta = 0$, $\alpha = 1$ и тогда система уравнений (233)—(217) примет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 + \eta(t) \\ \dot{x}_3 = x_1 + u \end{cases} \qquad (234)$$

Методами теории аналитического конструирования регуляторов [13] нетрудно установить, что минимум интересующего нас функционала будет доставлять регулятор

$$u = -\frac{3}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2 - x_3 . \qquad (235)$$

Нетрудно проверить, что замкнутая система, состоящая из объекта управления (234) и регулятора (235), устойчива и сохраняет устойчивость при вариациях любых своих параметров. Однако этот вывод не соответствует физической реальности. Поскольку колебания момента сопротивления x_1 и его производная x_2 не могут быть непосредственно введены в канал обратной связи, то уравнения (234) и (235) нужно привести к переменным x_3 и u пользуясь, разумеется, только эквивалентными преобразованиями. Уравнение (235) после этих преобразований примет вид:

$$(D^2 + 3D + 4)x_3 = (D - 1)u . \qquad (236)$$

Система (234)—(236) эквивалентна (в классическом смысле) системе (234)—(235), но в отличие от нее теряет устойчивость при сколь угодно малых вариациях некоторых своих коэффициентов (причем при вариациях только определенного знака). Именно так будет вести себя и реальная система — она способна терять устойчивость в те непредвиденные моменты времени, когда неизбежный в процессе эксплуатации дрейф параметров приведет к изменению знака вариаций. Разумеется, такая система регулирования скорости электропривода не работоспособна и опасна. Но всего этого мы не увидим, если будем использовать традиционные методы проверки устойчивости и ее сохранения при вариациях параметров,

Этот пример уже приводился в [18] на стр. 157—158 и там же было сделало предупреждение о том, что проверка сохранения устойчивости традиционными методами "пространства состоянии" может привести к ошибочным результатам. К сожалению, это предупреждение не было услышано. Будем надеяться, что теперь его услышат.

§ 15. Рассказ о судьбе кандидатур на проведение Олимпийских игр 2004 года

Мы уже упоминали о том, что организация или фирма, использующая у себя дополнительные расчетные проверки, изложенные здесь и страхующие от аварий, порождаемых изменением запасов устойчивости или изменением корректности, получит преимущества в конкуренции с другими фирмами.

И наоборот — фирма или организация, отказывающая использовать дополнительные расчетные проверки, может проиграть, поскольку ее конкуренты не забудут указать и напомнить, что этот отказ увеличивает вероятность аварий.

К сожалению, придется рассказать именно об этом отрицательном опыте. В 1993–96 годах на Ленинградской атомной электростанции (ЛАЭС), расположенной вблизи С.-Петербурга, проводилось обновление многочисленного вспомогательного оборудования станции (насосы, электроприводы, системы управления ими). С.-Петербургский государственный университет предупреждал, что новое оборудование устанавливаемое на столь ответственном объекте, как атомная электростанция, расположенная вблизи многомиллионного города, должно обязательно проходить дополнительную проверку, страхующую от аварий. Необходимость такой проверки к 1995 году сомнений не вызывала, и Университет был готов выполнить ее при условии финансирования необходимого для этого программного обеспечения, на что требовалась тогда очень скромная сумма — 20 тысяч долларов. Однако и дирекция ЛАЭС и Администрация губернатора С.-Петербурга от финансирования в тот период отказались. Забеспокоились " жители города, особенно организации "зеленых", появилось несколько статей в газетах, критикующих Администрацию за невнимание к безопасности С.-Петербурга.

Между тем, в 1996 году встал вопрос о месте проведении Олимпийских игр 2004 года, и сразу несколько городов — в том числе Петербург и Стокгольм — пожелали, чтобы эта почетная и выгодная обязанность была возложена на них. Развернулась конкурентная борьба между городами кандидатами. В этой борьбе представители Стокгольма (а в Стокгольме хорошо известна обстановка вокруг ЛАЭС), удачно использовали отказ Администрации Петербурга реагировать на серьезные предупреждения Университета и ее отказ выполнить очень простые мероприятия, повышающие безопасность ЛАЭС. Шведы информировали Олимпийский комитет и с полным основанием указали, что город Петербург, Администрация которого способна не реагировать на обоснованные предупреждения своего же собственного Университета (и, кстати, одного из самых авторитетных учебных заведений России), является городом опасным. В таком городе, действительно, может случиться все, что угодно, и поэтому Олимпиаду в нем лучше не проводить. Администрации Петербурга еще в ноябре 1996 года стало известно об этом демарше шведов, но она ничего не сделала. Между тем, даже начало работы по дополнительной проверке оборудования ЛАЭС по методике, предложенной Университетом, резко повысило бы шансы Петербурга при голосовании кандидатур городов в марте 1997 года, но ничего не было сделано, и поэтому 07 марта 1997 года произошло то, что и должно было произойти — на заседании Международного Олимпийского комитета в Лозанне кандидатура Петербурга была отвергнута уже в первом туре отбора по мотиву "небезопасности" города.

А Стокгольм успешно прошел первый тур и лишь во втором туре всё же выбыл из игры.

Когда позже подсчитали расходы города на выдвижение своей кандидатуры (уличная реклама, сбор подписей и т.п.), то оказалось, что эти расходы достигли 129 миллиардов рублей, или 21 миллиона долларов по тогдашнему курсу. Администрация Петербурга пожалела 20 тыс. долларов на программное обеспечение дополнительных проверок запасов устойчивости — и этим сильно помогла тому, что 21 миллион долларов из городской казны оказался истраченным заведомо бесплодно (и это не считая той прибыли, которую мог получить город от проведения у себя Олимпийских игр и тех потерь, которые понесет город, официально, на уровне Международного Олимпийского комитета признанный "небезопасным", из-за сокращения туризма, зарубежных инвестиций и т. п.).

Такова цена неуважения к науке. Наука может улучшить благосостояние людей, может повысить уровень их безопасности. Но для того, чтобы благосостояние и безопасность действительно повысились, нужно прислушиваться к рекомендациям науки и реализовывать их.

Заключение

В "Заключении" мы изложим коротко основные положения настоящей книги:

1. Обнаружено интересное явление: возможность изменения корректности математической модели при совершенно эквивалентных (в классическом смысле) и широко используемых преобразованиях уравнений.

Применительно к системам дифференциальных уравнений, являющихся математическими моделями многих важных систем и устройств это явление выступает как возможность неожиданного изменения такого важного свойства системы как сохранение (или не сохранение) устойчивости при вариациях коэффициентов после широко используемых преобразований уравнений.

Таким образом, выявлено существование третьего класса задач математики, физики и техники — задач, промежуточных между известными классами корректных и некорректных задач.

2. Некоторая неожиданность обнаруженного явления связана с тем, что оно относился к такой хорошо изученной области математики как теория эквивалентных преобразований, которая в основном была завершена еще в восемнадцатом веке Л. Эйлером.

3. Практическая значимость изложенных в настоящей книге результатов заключается прежде всего в том, что они позволяют раскрыть причину ошибочных заключений о сохранении устойчивости и тем самым ликвидировать один из источников аварий и катастроф различных технических систем и устройств.

Кроме того, выявление третьего класса задач математики, физики и техники, способных изменять корректность при эквивалентных преобразованиях, позволяет выявить и устранить одну из причин ошибок в расчетах.

Исследование третьего класса задач математики, физики и техники ни в коей мере нельзя считать завершенным. Сделаны только первые шаги, выявлены интересные закономерности, но исследования в этом направлении, безусловно, следует продолжать.

Мы убедились, что даже в привычных, знакомых со школьной скамьи разделах математики, таких как эквивалентные преобразования уравнений, возможны интересные неожиданности, и неожиданности эти имеют большое практическое значение. До последнего времени недооценивалось, что эквивалентные преобразования, оставляющие неизменными решения уравнений, не обязаны оставлять неизменными такие важные свойства исследуемой системы как сохранение устойчивости, поскольку эти свойства зависят не от самих решений, а от окрестностей их. Эта недооценка может приводить к опасным аварам и для предотвращения их необходимо использование более точного математического аппарата, лучше отражающего все многообразие окружающей нас жизни.

Литература

1. Петров Ю.П. Синтез оптимальных систем управления при неполностью известных возмущающих силах. Л., Изд-во ЛГУ, 1987, 289 с.
2. Петров Ю.П. Расчет систем управления, сохраняющих устойчивость при вариациях параметров. Л, 1992, 35 с.
3. Петров Ю.П. Устойчивость линейных систем при вариациях параметров. Автоматика и телемеханика, 1994, N 11, с. 186—189
4. Петров Ю.П. О скрытых опасностях, содержащихся в традиционных методах проверки устойчивости. Известия ВУЗ, Электромеханика, 1991, N 11, с. 106—108.
5. Петров Ю.П. Предотвращение аварийности в системах управления. Известия ВУЗ, Электромеханика, 1994, N 1–2, с. 37—40
6. Зубов В.И. Методы А.М. Ляпунова и их применение. Л., Изд-во ЛГУ, 1957, 241 с.
7. Зубов В.И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л., Машиностроение, 1974, 335 с.
8. Зубов В.И. Лекции по теории управления, М., Наука, 1975, 495 с.
9. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. М., Наука. 1970, 240 с.

10. Воротников В.И. Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. М., Наука, 1991, 284 с.
11. Чанг Ш. Синтез оптимальных систем автоматического управления. М., Машиностроение. 1964, 440с.
12. Мэррием К. Теория оптимизации и расчет систем управления с обратной связью. М., Мир, 1967, 549с.
13. Летов А.М. Динамика полета и управление. М., Наука, 1969, 360 с.
14. Ларин В.Б., Науменко К.И., Сунцев В.Н. Синтез оптимальных линейных систем с обратной связью. Киев, Наукова думка, 1973, 150с.
15. Надеждин П.В. О потере грубости при элементарных преобразованиях дифференциальных уравнений управляемых систем. Автоматика и телемеханика, 1973, N 1,с. 185—187
16. Петров Ю.П. Оптимизация управляемых систем, испытывающих воздействие ветра и морского волнения. Л., Судостроение, 1973, 216 с.
17. Петров Ю.П. Вариационные методы теории оптимальною управления. (издание второе). Л., Энергия, 1977, 280 с.
18. Абдуллаев Н.Д., Петров Ю.П. Теория и методы проектирования оптимальных регуляторов. Л., Энергоатомиздат, 1985, 240 с.
19. Харитонов В.Л. Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства линейных дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения, 1978, N 11.
20. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Частотные критерии робастной устойчивости и апериодичности линейных систем. Автоматика и телемеханика, 1990, N 9.
21. Иванов В.К., Васин В.В., Танава В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М., 1978.
22. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных .задач. М, 1979, 285 с.
23. Уилкинсон Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М., Наука, 1970, 564 с.
24. Икрамов Х.Д. Несимметричная проблема собственных значений. М., Наука, 1991, 240 с.

25. Игнатьев М.Б. Голономные автоматические системы. Издательство АН СССР, 1963, 204 с.
26. Гайдук А. Р. К исследованию устойчивости линейных систем. Автоматика и телемеханика, 1997, N 3, с. 153—160
27. Гайдук А.Р. Синтез систем управления при слабо обусловленной полноте объектов. Автоматика и телемеханика, 1997, N 4, с. 133—144
28. Петров Ю.П. Математическая модель и физическая реальность. СПб., 1997, 58 с.
29. Петров Ю.П., Червяков В.В. Системы стабилизации буровых судов (издание второе, дополненное). СПб., Издательство СПбГТУ, 1997, 261 с.
30. Андронов А.А., Витт А .Л., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М., Наука, 1981, 568 с.
31. Петров Ю.П. Три очерка по истории оптимизации и оптимального управления. СПб. НИИХ СПбГУ, 1998, 53 с.
32. Петров Ю.П. Третий класс задач физики и техники — промежуточных между корректными и некорректными. СПб., НИИХ СП6ГУ, 1998,30 с.

Оглавление