Предисловие.

Настоящая книга написана на основе лекций, прочитанных автором на факультете Прикладной математики – процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета в 1992-1994 годах. Автор не стремился к полному изложению всей истории математики и выделил вопросы, представляющие наибольший интерес для студентов университетов и технических университетов.

Основной упор сделан на связи математики и ее приложений, на прикладной математике.

В первой части лекций делается общий очерк математики, начиная с Древнего Египта и Двуречья и кончая девятнадцатым веком.

Во второй части рассматриваются только избранные разделы истории математики – разделы, связанные с историей развития методов оптимизации, историей автоматического управления и регулирования, развитием представлений о корректных, некорректных и промежуточных математических задачах. В этих разделах изложение доводится до конца двадцатого века, то есть рассказывается не только о новой, но и новейшей истории прикладной математики, – по крайней мере, о некоторых ее разделах.

Автор благодарит Е. П. Ожигову, А. Е. Раик, Я. Г. Неуймина за их полезные замечания при подготовке рукописи; Фроленкова Д.Б. и Новогран С.С. за помощь при подготовке рукописи к изданию.

Часть первая.
Глава 1. Математика древнего мира.
А. Древний Египет и древний Вавилон.

Математика возникла одновременно с образованием первых земледельческих государств. До тех пор, пока люди жили племенами и малыми общинами, им хватало простейших навыков счета в переделах первых десятков. С появлением государств, объединивших десятки и сотни тысяч людей, общественная жизнь усложнилась. Появилась необходимость учитывать налоги и повинности, вносимые тысячами земледельцев и, следовательно, оперировать с многозначными числами. Стало нужно распределять земельные участки и значит вычислять их площадь; с появлением складов и амбаров для зерна возникла необходимость рассчитывать их вместимость, – то есть, вычислять объем. Таким образом, появилась потребность в определенном уровне математических знаний.

Математические знания, безусловно, существовали во многих древних землевладельческих государствах, однако, восстановить уровень знаний, который в них существовал, можно лишь по сохранившимся документам, найденным при археологических раскопках. Далеко не всегда документы сохранялись, и поэтому сколько-нибудь подробные данные мы имеем лишь о математике Древнего Египта и Древнего Вавилона. Египтяне писали на хрупком папирусе, но в сухой почве Египта некоторые папирусы пережили тысячелетия и дошли до нас. Вавилоняне писали клинописью на сырой глине, которая затем обжигалась. Найдены сотни тысяч обожженных глиняных табличек с клинописными текстами, некоторые из которых посвящены математическим расчетам.

Папирусные тексты с египетскими иероглифами и глиняные таблички с вавилонской клинописью оживляют перед нами седую древность. Сохранились тексты, дошедшие до нас от первых фараонов Египта (Древнее царство), а это – 2700-2000 лет до нашей эры. Не меньшую древность имеют и клинописные таблички, некоторые из которых относятся к эпохе первых вавилонских царей, правивших 2300-1900 лет до нашей эры.

Математика в Древнем Вавилоне достигла несколько большего развития, чем в Египте, поэтому рассмотрим более подробно вавилонскую математику, или более правильно – математику древнего Двуречья, ибо одна из самых древних земледельческих культур мира возникла по берегам двух текущих рядом великих рек – Тигра и Евфрата. Сейчас эту территорию занимает государство Ирак. Как сейчас, так и в древности Двуречье – это засушливая равнина, дождей мало, но почвы плодородны и при искусственном орошении дают богатые урожаи. Сохранились клинописные таблички, позволяющие подсчитать, что в государствах древнего Двуречья урожай (в современных мерах) достигал 30 центнеров с гектара. Это большой урожай. Именно он обеспечивал тот избыток, прибавочный продукт, на котором выросли культура и наука городов и государств, расположенных в долинах Тигра и Евфрата.

Великие реки Тигр и Евфрат – капризны, они то разливаются, то мелеют, несут с собой плодородный ил, но и грозят свирепыми наводнениями. Для того чтобы жить на этой негостеприимной земле, необходим согласованный труд тысяч людей. Только согласованный труд людей, подчиненных единой воле, оказался способен построить сеть каналов, проводящих животворную влагу на поля, построить систему дамб, ограждающих от наводнений и поддерживать все это сложное хозяйство в порядке. Сама природа толкала на объединение, и города-государства возникли здесь очень рано; еще за несколько тысячелетий до нашей эры в Двуречьи появились города шумерского народа – Ур, Урук, Лагаш, а в 23 веке до нашей эры уже существовало единое государство, объединившее все города Двуречья – государство со столицей в Вавилоне. Это было деспотическое государство, с неограниченной властью царя и регулярными общественными работами по строительству и поддержанию в порядке каналов, плотин и дамб. Этими работами руководило сословие писцов - сословие почетное и уважаемое. Писцами нередко становились даже сыновья правителей. «Писец должен уметь писать понятно, хорошо знать математику, уметь межевать земли, примирять спорящих» – читаем мы на одной из древних клинописных табличек. Из опыта писцов и возникли вавилонская математика, а опыт этот был велик, ибо царство вавилонское существовало долго. Если считать от царя Саргона Древнего, в 23 веке до нашей эры впервые объединившего Двуречье, и до персидского завоевания, покончившего в 538 году до нашей эры с самостоятельностью Вавилона, то мы насчитаем 17 веков независимого существования. Безусловно, математика не была одной и той же все это долгое время, она развивалась, но развитие было медленным, да и ограниченность числа дошедших до нас математических текстов не позволяет достаточно хорошо представить себе развитие вавилонской математики. Мы опишем только, что вавилоняне умели, – а умели они многое.

Вавилоняне пользовались шестидесятеричной системой счисления (именно от вавилонян идет традиция делить градус на 60 минут и минуту на 60 секунд). Они умели складывать и вычитать многозначные числа и дроби. Для облегчения умножения и деления они составили обширные таблицы. Имелись у них также таблицы степеней некоторых чисел, до десятой степени включительно, пригодные одновременно и для отыскания корней. Вавилоняне умели решать линейные и квадратные уравнения, умели правильно вычислять площади прямоугольников, треугольников, трапеций, объемы куба, параллелепипеда, призмы, пирамиды.

Однако мы не найдем у них самого привычного нам элемента математики – доказательства. Правила вычисления заучивались как догма и передавались от одного поколения писцов к другому. Порукой верности служила вековая практика. При этом не разделялись точные и приближенные формулы, если только приближенная формула удовлетворяла практическим требованиям.

Характерным примером служит использовавшееся еще в древнем Египте правило для вычисления площади произвольного четырехугольника со сторонами a, b, c, d. Египтяне считали, что площадь четырехугольника равна произведению полусумм пар противоположных сторон, то есть

$$S = \frac{a+c}{2}\frac{b+d}{2}. \qquad (1)$$

эта формула приближенная, и можно привести примеры четырехугольников, для которых ее погрешность сколь угодно велика. Так, например, площадь ромба со стороной a и острым углом β равна, как известно $S_T = a^2 \sin\beta$, в то время как по формуле (1) имеем $S_{пр}=a^2$. Чем меньше угол β, тем больше погрешность. Однако на практике формула (1) применялась в Египте для расчета площади земельных участков, форма которых обычно бывала близка к прямоугольнику, а в этом случае формула (1) давала достаточную точность. Сознавали ли древние землемеры, что формула (1) является приближенной, этого мы не знаем.

И точные, и приближенные формулы и правила заучивались учениками без доказательств, заучивались как рецепт, как догма.

Сходными чертами с математикой древнего Египта и древнего Вавилона обладала и математика государств, существовавших 1,5-3 тысячи лет назад на территориях Индии и Китая. Везде мы обнаруживаем большой арсенал практических знаний, умение проводить громоздкие вычисления с большими числами, но не обнаруживаем основного звена математики как науки – не обнаруживаем доказательства. Математика как наука возникла не в Египте, не в Двуречье, не в Индии и Китае – она возникла в древней Греции, и это произошло не случайно.

Б. Математика древней Греции.

Математика в древней Греции начала развиваться позже и на другой социально-экономической основе, чем математика древнего Египта и древнего Вавилона. Греция не имела таких плодородных орошаемых земель, как в долинах Нила, Тигра и Евфрата, однако с течением времени, при неуклонном совершенствовании орудий труда сравнительно мало плодородные почвы Греции стали приносить прибавочный продукт, служивший материальной базой для развития культуры и науки. Помимо земледелия, греки издавна занимались и рыболовством. Изрезанность береговой линии, обилие заливов и бухт способствовали тому, что греки рано стали морским народом. Торговые и завоевательные плавания греческих мореходов (они получили поэтическое отражение в эпических песнях «Илиады» и «Одиссеи», в мифах об аргонавтах), способствовали расширению кругозора греческого народа, воспитывали любознательность и пытливость.

К шестому веку до нашей эры греки, помимо собственно Греции, населяли многочисленные города по побережью Малой Азии и Италии. Все эти города были самостоятельны. Греция не знала централизации. Она делилась на самостоятельные города-государства («полисы»), наиболее знаменитыми из которых были Афины, Спарта, Милет, Сиракузы. К шестому веку до нашей эры в большинстве этих городов установилась демократическая форма правления, когда городские ремесленники, купцы, матросы, окрестные земледельцы на народном собрании непосредственно решали все государственные дела, избирали должностных лиц и предводителей войска, образовывали многочисленные коллегии присяжных, которые творили суд. Так в Афинах, например, суд присяжных - гелиэя – состоял из 500 человек и регулярно переизбирался, так что практически почти каждый гражданин участвовал в суде, привыкал к логике и доказательствам судебных ораторов. Демократия способствовала развитию личности, невиданному раньше расцвету производительных сил, культуры и науки. Греческая наука – и в том числе греческая математика – это творение свободных людей, полноправных участников общественных и государственных дел, людей, привыкших думать и рассуждать, выслушивать доводы и оспаривать их. Необходимо, разумеется, помнить об ограниченности греческой демократии, где рядом со свободными полноправными гражданами существовали массы рабов. Рабский труд оказывал глубочайшее влияние на древнюю Грецию. С одной стороны, создавая прибавочный продукт, он обеспечивал полноправным гражданам свободное время для занятия государственными делами, искусством и наукой, с другой стороны – массовое рабовладение, обесценивая труд свободных людей, подрывало самые основы греческой демократии, которая, поэтому, оказалась недолговечной. В шестом веке до нашей эры устанавливается демократическое правление в большинстве греческих городов–полисов, в пятом веке эти города победоносно отражают натиск персидского нашествия, а уже в четвертом веке до нашей эры внутренние раздоры среди демократии приводят к ее кризису, свободные города-полисы постепенно попадают под власть македонской монархии, а затем – римской империи.

Эпоха расцвета греческой демократии оказалась недолговременной (менее 300 лет), но в науке она оставила неизгладимый след.

«Отцом греческой науки» обычно считают, жившего в 640-548 годах до нашей эры в городе Милете, Фалеса Милетского – купца, политического деятеля, философа, астронома и математика. Наиболее известен Фалес, как философ, но он же был и первым греческим геометром, который доказал, например, что:

1. диаметр делит круг пополам;
2. углы при основании равнобедренного треугольника равны;
3. вертикальные углы равны;
4. если у двух треугольников сторона и два угла, прилежащих к ней, равны, то и треугольники равны.

Последнее утверждение Фалес использовал, в частности, для определения высоты египетских пирамид по длине отбрасываемой ими тени, для оценки расстояния кораблей на море.

Но главная суть того нового, что внес Фалес, было само понятие о доказательстве того или иного утверждения, то есть о выводе его из других, более очевидных и заведомо верных утверждений. Мы не знаем в деталях, как проводил свои доказательства Фалес, ибо работы Фалеса до нас не дошли, дошел лишь их пересказ в работах позднейших греческих ученых. Можно догадываться, что, например, теорему о равенстве вертикальных углов Фалес выводил из очевидного для него принципа (аксиомы), что если от двух равных величин отнять третью, то остатки будут равны.

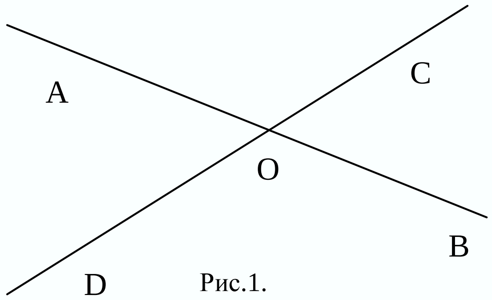

Рис.1.

Действительно, вертикальные угла AOD и COB можно рассматривать как остатки после вычитания из углов AOB и COD (рис.1) (равных каждый двум прямым) одного и того же угла AOC. Отсюда и следует, доказывал своим согражданам Фалес, что вертикальные углы равны.

Мы так привыкли к тому, что в основе математики лежит доказательство, что с трудом представляем себе, как может быть иначе. А ведь на самом деле доказательства появились только в древней Греции. Математики древнего Египта и древнего Вавилона не знали доказательств. Более того, математики Китая – не только древнего, но и средневекового Китая, математики Японии, вплоть даже до самого 18 века – тоже не знали, что такое доказательство. А ведь китайские и японские математики достигли в средние века высокого уровня развития. Китайцы умели, например, решать системы линейных уравнений со многими неизвестными (метод «фан-чен», аналогичный методу Гаусса последовательного исключения неизвестных был известен китайцам еще во 2 веке до нашей эры). Китайцы решали не только квадратные уравнения, но и уравнения высших степеней – так, например, уравнение

$$576x^4 - 2640x^3 + 1729x^2 + 3960x - 1695252 = 0$$

не испугало китайского математика 14 века Чжу-Ши-Цзе, который нашел его корень $x = 8\frac{2}{3}$. И в то же время доказательств китайцы (как и японцы до 18 века) не знали. В достоверности результатов они убеждались проверкой, например - подстановкой корня в уравнение, но не доказывали своих утверждений в современном смысле этого слова. Пример Египта и Вавилона, Китая и Японии показывает, что математика веками и тысячелетиями может развиваться совершенно особым, непривычным для нас, путем.

Греция является исключением. В Греции – и только в Греции – достигло развития математическое доказательство, а все другие страны – арабские государства средних веков, средневековая Европа – следовали уже проложенным путем.

Можно долго фантазировать на тему, – а что было бы, если, например, в пятом веке до нашей эры воевавшие с Грецией персы достигли успеха и погубили бы греческую науку? Когда, при каких условиях математическое доказательство возникло бы вновь? Или оно так и не возникло бы? Об этом можно долго спорить, факты же говорят об одном,– математическое доказательство было создано трудами ученых древней Греции, а математики всех других народов – Индии, стран ислама, средневековой Европы – использовали греческий опыт, опирались на уже выработанную греками традицию доказательства.

Почему традиции математического доказательства зародились именно в древней Греции, а не в других странах? Об этом можно высказывать только догадки. Безусловно, существенную роль сыграла привычка свободного гражданина греческого города-государства к демократическому обсуждению общественных дел, привычка выслушивать обстоятельные доводы ораторов в народном собрании, обвинителей и защитников в суде, привычка обсуждать эти доводы, взвешивать их обоснованность. И переходя к рассмотрению научных вопросов, греческий гражданин сохранял эту привычку: ему хотелось не только уяснить истину, но и убедить окружающих в своей правоте, привести убедительные доводы, привести доказательства своих утверждений. Так, по всей вероятности, возникла в древней Греции традиция математического доказательства.

Другая характерная черта греческой науки – это интерес греков не только к прикладным задачам, но и к чисто теоретическим вопросам. Греки развивали математику не только ради ее приложений, но и ради любознательности, ради постижения законов, управляющих миром, которые – как они впервые подметили – можно свести к числу и мере.

Числовые закономерности стали изучаться греческим философом Пифагором и его учениками. О самом Пифагоре, жившем с 564 по 473 годы до нашей эры, сохранилось мало достоверных сведений. В основном до нас дошли легенды, связанные с его именем – вроде легенды, что доказав теорему, известную сейчас под именем теоремы Пифагора, он велел принести в жертву 100 быков. Однако достоверно известно, что, занимаясь музыкой, Пифагор и его ученики подметили, что качественные отличия звуков обуславливаются чисто количественными различиями в длине струн. Если длины струн относятся как 1:2, 3:2 или 4:3, то разница в тонах будет октавой, квинтой или квартой и музыкальные интервалы благозвучны, при других отношениях длин возникает диссонанс и т.п. Так наблюдения над музыкой натолкнули пифагорейцев на великую мысль, что все закономерности мира можно выразить с помощью чисел, или, как впоследствии пересказал их идеи Аристотель: «элементы чисел являются элементами всех вещей, и весь мир в целом является гармонией и числом».

Новый подход греков к математической науке – подход, основанный на рассуждении и доказательстве, позволил грекам в немногие десятилетия далеко перекрыть все достижения древних египтян и вавилонян, накапливающиеся в течение многих веков. Греки быстро открыли множество фактов (теорем), относящихся к свойствам прямоугольников, параллелограммов и других геометрических фигур. Фактически вся та геометрия, которая сегодня изучается в средней школе, была открыта греками. Причем интересно, что греки основное внимание сосредоточили не столько на конкретных практических задачах, сколько на их обобщениях. Рассмотрим одно их таких обобщений – знаменитую задачу об удвоении куба. Еще в древности была известна задача об удвоении квадрата, – то есть о построении такого квадрата, площадь которого была бы в два раза больше данного. Такая задача часто возникала при распределении земельных участков, и греки быстро нашли ее решение. Умели они и строить квадраты, площадь которых в три, в четыре, в любое число раз больше данного. Все построения производились циркулем и линейкой и особых затруднений не вызывали. Однако у греков возникла мысль об обобщении задачи из плоскости в пространство, о построении куба, объем которого был бы ровно в два раза больше объема данного куба. Эта задача вряд ли возникла из практических потребностей, однако, древние греки с большим жаром отдавались ее решению. Возникла даже красивая легенда о том, откуда взялась сама эта проблема – проблема удвоения куба. Легенда рассказывает, что на греческом острове Делос разразилась эпидемия, от которой умирало много людей. Жители обратились за помощью к жрецам Аполлона – покровителя острова. Оракул храма Аполлона якобы ответил, что эпидемия прекратится тогда, когда будет удвоен (и в точности удвоен) жертвенник Аполлона, имеющий форму куба. Эта легенда отражает стремление греков объяснить, почему они столько сил и внимания отдали такой, не имеющей большего практического значения, задаче, как удвоение куба. А задача оказалась очень сложной и, не смотря на все приложенные усилия, ее никак не удалось решить с помощью линейки и циркуля. Нам теперь, конечно, понятна причина затруднений древних греков - ведь с помощью циркуля и линейки можно решать лишь задачи, сводящиеся к уравнению второй степени или цепочкам таких уравнений, а удвоение куба сводится к уравнению третьей степени. Действительно, если ребро данного куба равно «а», а ребро искомого куба обозначить через «х», то для определения «х» получаем уравнение третьей степени:

$x^3 = 2a^3$

не сводящееся к квадратному или цепочке квадратных уравнений. После долгих лет безуспешных попыток найти «х» с помощью циркуля и линейки, греки стали пробовать другие методы, и обнаружили, что задача об удвоении куба и многие другие, не разрешимые циркулем и линейкой, получают решение, если предварительно построить новые кривые – эллипс, гиперболу, параболу. Так задачи об удвоении куба дали первый толчок к изучению этих кривых – кривых второго порядка, которые впоследствии стали играть столь важную роль и в математике и в астрономии. Истинная роль этих кривых была полностью оценена лишь в 17 веке, когда Кеплер установил, что планеты движутся по эллипсам. А началось все со скромной, (но трудной), задачи об удвоении куба. Не меньшую популярность имели в древности и еще две знаменитые задачи – трисекции угла, (то есть, деления циркулем и линейкой произвольного угла на три равные части) и квадратуры круга – то есть, построении квадрата, в точности равновеликого данному кругу. И здесь мы видим процесс обобщения. Совсем не трудно разделить циркулем и линейкой любой угол на две равные части. Но заманчиво обобщить задачу и найти метод деления угла на «п» частей. Уже при п=3 обобщение оказалось неожиданно трудным. Традиционных инструментов геометрии – циркуля и линейки без делений, явно не хватало. Греки нашли остроумное решение, использующее дополнительный инструмент – линейку с нанесенными метками – но не оставляли упорных попыток найти «классическое» построение – то есть использующее только гладкую линейку и циркуль. Трудно представить, сколько труда и сил отняла эта задача; только в 19 веке было окончательно доказано, что циркулем и линейкой трисекция угла не осуществима. [1)] Та же судьба постигла и третью знаменитую задачу древности – квадратуру круга. Она была предметом пристального внимания и упорных усилий многих математиков древней Греции, и лишь в 19 веке было доказано, что циркулем и линейкой она не разрешима.

К сожалению, самая интересная ранняя эпоха древней математики – эпоха, когда в спорах и дискуссиях вырабатывались ее методы, мало известна нам. До нас дошли имена выдающихся греческих математиков – Архит из Тарента (428-347 гг. до нашей эры), Антифон (469-399 гг. до нашей эры), Гиппократ Хиосский (около 400 г до нашей эры), Евдокс Книдский, Феодор из Кирены, Теэтет – дошли и рассказы о задачах, которые они решали. Однако подлинные работы греческих математиков 6-4 веков до нашей эры до нас не дошли. Мы знаем о них лишь в пересказах позднейших математиков, работы которых уже дошли до нас, поэтому о самой интересной эпохе становления греческой математики мы знаем очень мало. Известно лишь, что и тогда кипели острые научные споры. Так, при вычислении площадей и объемов греки столкнулись с проблемой предельного перехода. Известно, что еще в 5 веке до нашей эры греки знали не только формулу для объема пирамиды (одна треть произведения площади основания на высоту), но и соответствующую формулу для конуса. Почти очевидно, что конус они рассматривали как предельный случай пирамиды с бесконечно большим числом боковых граней, и на этом пути получили правильную формулу для объема конуса.

Однако хорошо известно, что предельный переход – дело тонкое и при переходе от конечного к бесконечному возникают многие логические трудности и противоречия. На эти противоречия еще в 5 веке до нашей эры обратил серьезное внимание философ Зенон из Элеи, который придал им броскую и запоминающуюся форму «апорий» (парадоксов).

Вот одна из апорий: летящая стрела никогда не достигнет конца своего пути, потому что она должна сперва долететь до середины пути, затем до середины остатка и т.д. Прежде чем попасть в цель, стрела должна отсчитать бесконечное множество "середин" остающегося ей пути, и значит, никогда не достигает цели.

Вот другая, особенно знаменитая, апория – «Ахиллес и черепаха». Пусть впереди быстрого Ахиллеса ползет черепаха, начальное расстояние между ними – «а», а скорость Ахиллеса в «к» раз больше скорости черепахи. Сколь бы велико не было «к», указывает Зенон, Ахиллес никогда не догонит черепаху, – когда он пробежит разделяющее их первоначальное расстояние «а», черепаха проползет $\frac{a}{k}$, когда Ахиллес пробежит и его, черепаха отползет на $\frac{a}{k^2}$ - и т.д. Всякий раз между ними будет оставаться отличное от нуля расстояние $\frac{a}{k^n}$.

Не следует смотреть на апории упрощенно, как на остроумные софизмы. Греки прекрасно знали, что стрелы попадают в цель и Ахиллес догоняет черепаху. Однако им нужно было математически, – то есть не противоречиво - объяснить, как это происходит, а объяснение процесса реального движения является очень не простым делом.

Из курса философии мы знаем, (еще Гегелем доказано) что все достаточно сложные понятия – и уж во всяком случае, такие понятия как «движение», «бесконечность» – являются понятиями внутренне противоречивыми. Можно ли построить математическую теорию движения, свободную от противоречий самого понятия «движение»? Совершенно бесспорного ответа на этот вопрос мы не имеем и в наше время.

Древние греки были первыми из тех, кто серьезно задумывался над трудностями математического описания понятий движения и бесконечности. Вот одна из трудностей: запишем путь Ахиллеса до встречи:

$$S_A = a + \frac{a}{k} + \frac{a}{k^2} + \ldots$$

и путь черепахи:

$$S_ч = \frac{a}{k} + \frac{a}{k^2} + \ldots$$

каждому отрезку $\frac{a}{k^n}$ пути Ахиллеса соответствует отрезок $\frac{a}{k^{n+1}}$ пути черепахи. Поэтому к моменту встречи Ахиллес должен пройти столько же отрезков пути, сколько и черепаха. С другой стороны, можно рассуждать и иначе. Каждому отрезку пути черепахи $\frac{a}{k^n}$ можно сопоставить равный по величине отрезок пути Ахиллеса. Тогда получается, что к моменту встречи Ахиллес должен пробежать на один отрезок (начальный отрезок «а») больше, чем черепаха. Если обозначить количество отрезков, пройденных черепахой до встречи, через α, то тогда получается, что

$$\alpha = \alpha + 1$$

(не следует забывать, что α не является конечным числом). Таким образом, в мире бесконечного теряет свою силу одна из важнейших аксиом: «целое больше своей части».

С этой трудностью, стоящей на пути проникновения в бесконечное, встретились впоследствии и математики нового времени. Они пошли, как мы увидим, по другому пути, отличному от пути математиков Древней Греции. Греческие математики стремились, прежде всего, к безукоризненной логической строгости и поэтому они вообще отказались от понятия завершенной, «актуальной» бесконечности. Для вычисления площадей и объемов криволинейных фигур и тел они стали, начиная с 4 века до нашей эры, использовать предложенный Евдоксом метод «исчерпывания». В этом случае не используется актуальная бесконечность, – вместо этого доказывается, что потенциально, с увеличением числа шагов исчерпывания, разность между объемом искомого тела и некоторым заранее известным объемом может быть сделана сколько угодно малой.

Метод Евдокса строг, но очень громоздок, а главное – он позволял доказать уже известный результат, но не позволял находить площади и объемы новых фигур и тел.

Отказ от понятия актуальной бесконечности был первой большой жертвой, принесенной математиками Древней Греции ради требований строгости.

Вторая жертва была связана с открытием несоизмеримости. Несоизмеримость открыли пифагорейцы еще в 5 веке до нашей эры, обнаружив, что сторона квадрата несоизмерима с его диагональю. По отдельным замечаниям, сохранившимся у более поздних авторов, мы можем приблизительно восстановить ход рассуждений пифагорейцев: предположим, что в квадрате ABCD сторона AB и диагональ AC соизмеримы, то есть их отношение равно отношению двух целых чисел:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{m}{n}, \qquad (2)$$

причем m и n не являются оба четными, иначе дробь $\frac{m}{n}$ можно было бы сократить на два. Из (2) следует, что $(AC)^2 : (AB)^2 = m^2 : n^2$, но по теореме Пифагора $(AC)^2 = 2(AB)^2$ и, следовательно

$$m^2 = 2n^2. \qquad (3)$$

Из равенства (3) вытекает, что m – четное число, m=2t, а, следовательно, n – нечетное. Но, подставив соотношение m=2t в равенство (3) получим:

$$4t^2 = 2n^2,$$

или $n^2 = 2t^2$, откуда следует, что n должно быть четным. Таким образом, предположение о соизмеримости стороны квадрата и его диагонали приводит к противоречию. Отсюда, по мнению древних греков, следовало, что бесполезно искать число x, являющееся решением даже простейшего квадратного уравнения $x^2 = 2$. По мнению греков, такого числа (дроби) нет, ибо оно не может быть ни четным, ни нечетным. Довольствоваться приближенными значениями корней квадратных уравнений (как это делали вавилоняне, умевшие последовательными итерациями находить корни с любой желаемой степенью точности) греки не хотели, поскольку они стремились к безукоризненно строгому результату.

В конечном счете, греки вообще отказались от поисков арифметического или алгебраического решения квадратных уравнений и стали применять очень громоздкий чисто геометрический метод, когда коэффициенты уравнения задаются в виде отрезков, а неизвестное x определяется построением, с помощью циркуля и линейки. При таком способе трудность несоизмеримости отпадает, получается точное, а не приближенное значение корня (если предположить, конечно, что мы располагаем идеальными инструментами), но если говорить о реальной точности, достигаемой при геометрических построениях реальными циркулем и линейкой, то она, конечно, гораздо ниже той, которая достигается при арифметическом вычислении корня после нескольких последовательных итераций.

Однако древних греков волновала не действительная точность, а принципиальная, поэтому они в математике с большим рвением отдавались геометрии и очень мало внимания уделяли реальным вычислениям.

Вообще, характерной чертой развития греческой математики является быстро нарастающий отрыв теории от практики, «чистой» математики от прикладной, хотя самих этих терминов – чистая и прикладная математика – тогда еще не употребляли. На заре греческой математики великий Фалес, доказав первые теоремы, сразу же применял их для определения высоты египетских пирамид по измерениям длины отбрасываемой ими тени, для измерения расстояния до корабля в море и для многих других практических приложений.

Однако в ходе дальнейшего развития греческой математики приложение ее к решению практических задач стало считаться все более и более второстепенным делом.

Эта особенность греческой науки неразрывно связана с самим фундаментом древнегреческого общества – рабовладением. Действительно, если труд – удел раба, то всю прикладную часть науки, все то, что расширяет возможности и могущество труда, греки постепенно начинали считать не стоящим внимания свободного человека.

Отрыв греческой математики от практической жизни был закреплен и усилен философской школой Платона, занявшей господствующее положение к 4 веку до нашей эры, к эпохе упадка греческой демократии. Платон, живший в 427-347 гг. до нашей эры, был философом-идеалистом и считал, что окружающий нас материальный мир, воспринимаемый нашими чувствами, есть лишь бледное, неверное отражение другого мира – мира бессмертных идей, не воспринимаемых чувствами, но постигаемых разумом.

Платон приводит интересное сравнение: представим себе, – говорит он - людей, живущих в глубине темной пещеры, не видящих ничего, кроме ее стен, на которые падают тени реальных предметов нашего мира. Люди, не видящие ничего кроме этих теней, могут начать считать именно тени единственной реальностью, и лишь усилие мысли позволит им понять, что истинный и прекрасный мир лежит далеко за пределами их темной пещеры. Природа не дала людям органов чувств для постижения мира бессмертных идей. Наши глаза, уши позволяют нам ощущать лишь тени мира идей – реальные, бренные предметы окружающего мира, а истинный мир бессмертных идей, как считал Платон, постижим лишь разумом, силой отвлеченной мысли.

Сейчас мы настолько привыкли к материалистическому мировоззрению, что нам уже не так легко постигнуть точку зрения Платона. Возьмем, например, понятие сферического тела. Для нас сфера – это математическая абстракция от реальных тел, форма которых близка к сферической. Для Платона настоящей, истинной, реальностью была идеальная сфера – геометрическое место точек, равностоящих от центра, а все реальные земные тела, близкие к сфере – это лишь искаженные отражения этой идеальной сферы.

Из философских воззрений Платона вытекает и та большая роль, которую он отводил математике.

Действительно, для последователей Платона было очевидным, что только математика могла помочь постичь законы, управляющие единственным истинным для них миром – миром идей, миром идеальных треугольников, окружностей, конусов, сфер. И единственным путеводителем в этом идеальном мире могло быть лишь строгое математическое рассуждение, очищенное от всякой наглядности, от всякой апелляции к нашим ощущениям, восприятиям, к нашей интуиции. Только строгое доказательство, а не свидетельство наших чувств – может, по Платону, установить истину.

Из философских идей Платона и его последователей берет свое начало такая характерная черта греческой математики как обостренное внимание к строгости доказательств.

Под несомненным влиянием философских идей Платона написана знаменитая работа греческой математики – трактат Евклида «Начала».

Говоря о математике древней Греции, мы не должны забывать, что почти все работы греческих математиков 5-4 веков до нашей эры не дошли до нас. Сохранились лишь отдельные, часто отрывочные, фрагменты из работ таких математиков, как Архит из Тарента, Феодор из Кирены, Теэтет, Гиппий из Элиды, Гиппократ Хиосский, Евдокс Книдский. Поэтому можно лишь с большим трудом и весьма неполно восстановить путь развития греческой математики, который, конечно, не был ровным и прямолинейным, протекал в ожесточенных спорах и дискуссиях – особенно о проблемах конечного и бесконечного, соизмеримости и несоизмеримости. Восстановить детали этих споров уже невозможно. О греческой математике мы судим, в основном, по итоговому, завершающему труду – по трактату Евклида «Начала». Этот трактат, состоящий из 13 книг, дошел до нас полностью в многочисленных списках. Евклид, живший в конце 4 века - начале 3 до нашей эры, подвел итоги предшествующему, примерно трехсотлетнему, развитию греческой математики. Надо отменить, что современники не слишком ценили Евклида, считали его лишь популяризатором своих великих предшественников. Но история оправдала Евклида. Именно его трактат выдержал испытание временем, многократно переписывался, а поэтому и дошел до нас через века в полном виде, в отличие от работ его предшественников, от которых до нас дошли отрывки и неполные пересказы.

Заметим, что в отличие от самого трактата, биография Евклида до нас не дошла. О жизни Евклида, как и о жизни других греческих математиков, мы почти ничего не знаем. Неизвестны даже точные годы его рождения и смерти.

Изложение у Евклида ведется строго дедуктивно. Начинается его трактат с определений, постулатов и аксиом. Определения Евклида («точка есть то, что не имеет частей», «линия есть длина без ширины») сразу подчеркивают, что дальнейшее изложение будет относиться не к реальному, а к идеальному миру, миру Платона, не постигаемому чувствами, но постигаемому разумом. Свойства этого мира надо логически выводить из аксиом и постулатов. Вот формулировки аксиом Евклида:

1. Равные одному и тому же, равны между собой.
2. И если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны.
3. И если от равных отнимаются равные, то и остатки будут равны.
4. И совмещающиеся друг с другом равны между собой.
5. И целое больше части.

А вот постулаты Евклида:

1. От всякой точки до всякой точки можно провести прямую.
2. Ограниченную прямую можно непрерывно продолжать по прямой.
3. Из всякого центра всяким раствором может быть описан круг.
4. Все прямые углы равны между собой.

И, наконец, знаменитый «пятый постулат» (о нем мы еще много будем говорить, когда дойдем до возникновения неэвклидовой геометрии):

5. Если прямая, пересекающая две прямые, образует внутренние односторонние углы, меньше двух прямых, то продолжение неограниченно эти две прямые встретятся с той стороны, где угла меньше двух прямых.

Опираясь на эти аксиомы и постулаты, Евклид методически доказывает десятки теорем.

В первой из 13 книг «Начал» излагается планиметрия прямолинейных фигур, устанавливаются основные свойства треугольников, прямоугольников и трапеций. Завершает первую книгу теорема Пифагора.

Во 2-ой книге излагаются элементы геометрической алгебры (геометрическое решение квадратных уравнений).

В 3-ей книге рассматривается свойства круга, его касательных и хорд.

В 4-й книге даются методы построения (циркулем и линейкой) правильных многоугольников при n=3,4,5,10 и 15.

В 5-й книге излагается теория отношений Евдокса и основанный на ней «метод исчерпывания», с помощью которого затем доказываются теоремы о площадях и объемах криволинейных фигур и тел.

В 6-й книге излагается учение о подобии и геометрический метод решения квадратных уравнений вида:

$$\frac{b}{c}x(a \pm x) = S$$

Книги 7,8 и 9 посвящены арифметике. В них изложены теория делимости, алгоритм нахождения общего наибольшего делителя двух чисел (алгоритм Евклида), приводится разложение любого натурального числа на простые множители, доказывается, что такое разложение единственно и, наконец, доказывается знаменитая теорема Евклида о том, что простых чисел бесконечно много. Доказательство этой теоремы гениально просто: допустим, что существует только конечное число простых чисел: $p_1; p_2 ... p_n$. Рассмотрим число $N = p_1 \cdot p_2 ... p_n + 1$. Оно будет либо простым и тогда мы имеем новое простое число, не совпадающее с нашими $p_1; p_2 ... p_n$, либо оно будет составным, и тогда оно делится на простое число q, снова не совпадающее ни с одним из $p_1; p_2 ... p_n$.

Однако простота и наглядность доказательства этой теоремы Евклида о простых числах является исключением. Вообще же доказательства Евклида длинны, сложны и трудны для читателя.

В 10-й книге Евклида говорится об отрезках, являющихся корнями квадратных и биквадратных уравнений и дается их классификация.

Одиннадцатая книга посвящена стереометрии. Она содержит теоремы о прямых и плоскостях в пространстве и о равновеликости параллелепипедов и призм.

В 12-й книге методом исчерпывания Евдокса доказано, что площади кругов относятся как квадраты диаметров, объемы шаров – как кубы их диаметров, и что объем пирамиды и конуса в три раза меньше объемов призмы и цилиндра с теми же основаниями и высотами.

Наконец, 13-я, завершающая, книга «Начал» посвящена построению пяти правильных многогранников – тетраэдра, куба, октаэдра, додекаэдра, икосаэдра и доказательству того, что других правильных многогранников не существует.

Отношение к великому труду Евклида не у всех одинаково. Для очень многих математиков более позднего времени он был образцом. В школах Англии еще в 18 и 19 веке учили школьников геометрии по дословным переводам «Начал» на английский язык. А вот Алексей Николаевич Крылов как раз по этому поводу писал: «Можно лишь удивляться, как общество «защиты детей от жестокого обращения и покровительства животным» допускало, чтобы 12-13 летних мальчиков мучили в школах переводами Евклида». (А.Н. Крылов «Значение математики для кораблестроения», 1938).

Надо сказать, что действительно «Начала» Евклида написаны очень тяжело, хотя с удивительной логичностью.

Евклид нигде не поясняет, для какой цели вводится та или иная теорема, нигде не определяет общего плана изложения. В ходе длинных и сложных доказательств многочисленных теорем он ни разу не указывает, не поясняет, почему выбран тот или другой путь доказательства, какие наводящие соображения могли бы натолкнуть читателя на понимание основной идеи доказательства. Поэтому читать и понимать Евклида – занятие трудное и сложное. Иной раз кажется, что Евклид и не стремится совсем к тому, чтобы его понимали, ему важно только, чтобы с ним соглашались. Если ты согласился с постулатами и аксиомами, то ты неизбежно должен согласиться и со всей последовательностью теорем, этого требует железная логика изложения. Евклид ведет читателя по лабиринту теорем, как ведут слепого; на каждом шагу читатель обязан согласиться с евклидовой логикой, должен признать, что теорема доказана, и доказана правильно, но общий план лабиринта и цель путешествия по нему остаются не раскрытыми.

Для того чтобы понять, почему Евклид писал так, а не иначе, полезно разобраться предварительно, а зачем вообще писал Евклид свои «Начала», и с какой целью изучали их его современники.

Мы уже упоминали, что практические приложения науки в эпоху Евклида, в эпоху развитого рабовладения, подорвавшего уважение к труду, не считались ни важным, ни нужным делом.

Поэтому прикладной стороне математики, возможности практического применения доказанных лемм и теорем Евклид специально и демонстративно не уделяет никакого внимания. Его цель – в другом. Евклид ставил своей задачей развить в читателях логику и (частично) эстетические чувства. Трактат Евклида предназначен для тренировки ума в логических построениях и для воспитания чувства прекрасного (от созерцания идеальных геометрических форм). А раз так, то действительно, зачем же Евклиду было стремиться к простоте и доступности изложения? Чем труднее изложение, – тем лучше протекает тренировка разума в логике, лишь бы изложение было безупречно логично и эстетически совершенно. И недаром завершает трактат Евклида книга о правильных многогранниках – тетраэдре, октаэдре, кубе, икосаэдре и додекаэдре – самых эстетически прекрасных объектах геометрии.

В английских частных школах 18-19 века, воспитывавших джентльменов, учили школьников по дословным переводам Евклида не для того, чтобы они потом хорошо вычисляли площади и объемы – этим джентльмены не занимались - а для того, чтобы школьники на примере геометрии учились логике рассуждения, для того, чтобы они потом могли красноречиво и логично выступать в суде, в администрации, в парламенте – ради этого и учили будущие английские джентльмены трудные «Начала» Евклида.

Что касается Алексея Николаевича Крылова, то он рассматривает математику совсем с другой стороны, он видит в математике орудия решение прикладных задач, которые ставит жизнь, и считает, что именно этому надо обучать школьников. А как раз решению практических задач Евклид не учит (мы уже рассмотрели, почему не учит) и поэтому А.Н.Крылов отрицательно относился к тому, чтобы в школах математика изучалась «по Евклиду». Современная школа, в общем, пошла за А.Н. Крыловым: современные школьные программы все больше отходят от традиций Евклида и это не случайно. Дело в том, что, стремясь к строгости изложения, греки принесли ради нее слишком много тяжелых жертв.

Стремясь избавиться от парадоксов актуальной бесконечности, греки не только закрыли себе путь к построению дифференциального и интегрального исчисления, но и должны были при доказательстве любой теоремы о площадях и объемах криволинейных фигур и тел прибегать к длинному, сложному и скучному «методу исчерпывания». Стремясь избавиться от парадокса несоизмеримости, греки должны были излагать понятия алгебры на чисто геометрическом языке. Даже для уравнений второй степени это отягощало и делало крайне громоздким изложение решения, а уравнения третьей и высшей степеней практически так и остались недоступными.

Жертвы, принесенные греками на алтарь строгости, были тяжелы, но к эпохе жизни Евклида сложились прочные убеждения в их необходимости. Мы уже упоминали, что о жизни Евклида не сохранилось достоверных биографических сведений. Сохранилось лишь несколько анекдотов, которые по всей вероятности отражают не реальные факты жизни Евклида, а общие представления людей того времени о математике и математиках.

В одном анекдоте рассказывается, что царь Птолемей, современник и покровитель Евклида, спросил: «неужели и ему, царю, для изучения геометрии нужно проходить столь долгим и трудным путем изучения лемм и теорем, непонятно как, связанных друг с другом?» На что Евклид, по преданию гордо ответил, что в математике и для царей не существует легкого пути. Возможно, что в анекдоте этом отразилось недоумение не одного царя Птолемея, но и многих греков – зачем, почему математики излагают свою науку столь сложно и трудно, а также и отразилась и твердая уверенность современных Евклиду математиков в том, что другого стиля изложения в настоящей науке нет и быть не может.

В другом анекдоте говорится о том, как ученик спросил у Евклида, – а какая польза может быть от изучения геометрической теории? Евклид якобы отвечал: «Раб, дай ему скорее обол (мелкую монету). Подумать только! Этот несчастный думает, что из геометрии можно извлечь какую бы то ни было практическую пользу». Этот анекдот тоже хорошо отражает мнение современников Евклида о практической значимости его науки.

Трактат Евклида подвел итоги развитию математики в самостоятельных греческих городах-полисах, но сам Евклид принадлежал к новой эпохе, эпохе эллинизма, когда после походов Александра Македонского в 336-323 гг. до нашей эры потеряли прежнюю самостоятельность города-полисы, но зато возникли новые эллинистические государства: государство Птолемеев на территории Египта, государство Селевкидов на территории Двуречья и ряд других. В новых эллинистических государствах уже не существовало демократии, деспотическая власть принадлежала царям, но наукам и искусству многие из царей покровительствовали. Особенно надо отметить царей из династии Птолемеев. Основателем династии был Птолемей 1, полководец Александра Македонского; после смерти в 323 г до н.э. своего повелителя Александра, он превратил Египет в самостоятельное царство, где династия Птолемеев царствовала почти 300 лет (последней царицей этой династии была Клеопатра, и после ее гибели в 31 г. до н.э. Египет был превращен Октавианом Августом в провинцию римской империи). Еще Птолемей 1 основал в новой столице Египта – Александрии особое учреждение - Мусейон (дом муз), в который были приглашены многие видные ученые того времени. Мусейон субсидировался государством, и ученые получали жалование. По сути дела это был прообраз нынешних научно-исследовательских институтов. Покоренный греками Египет продолжал жить во многом своей жизнью, но в городах – и, прежде всего в многолюдной Александрии – жило много греков, говорили по-гречески и традиции греческой культуры успешно развивались на новой, египетской почве.

В эпоху эллинизма греческая наука приобретает новые черты, наука начинает субсидироваться государством, появляются библиотеки (крупнейшая из них – библиотека при Мусейоне в Александрии – насчитывала до 700 тысяч рукописей) вокруг Мусейона формируется Александрийская научная школа – группа ученых, объединенная общими взглядами и общими традициями. К Александрийской школе (первой в истории научной школе) принадлежал и Евклид, ее традициям следовал он при написании «Начал», и, разбирая «Начала», мы уже рассмотрели основные из этих традиций: выдвижение на первый план безукоризненной строгости, геометрический стиль изложения, отказ от «актуальной бесконечности». Этим традициям следовал не только Евклид, но и другие математики Александрийской школы, наиболее выдающимися из которых были Аполлоний (265-170 гг. до н.э.) и Архимед (287-212 гг. до н.э.). Работы Аполлония посвящены в основном коническим сечениям – эллипсу, параболе и гиперболе, свойства которых Аполлоний с удивительным искусством выводит чисто геометрически, не пользуясь никакой алгебраической символикой, еще не известной в то время.

Более широкий круг вопросов рассматривался в математических работах Архимеда – одного из наиболее разносторонних и гениальных ученых всех времен. О самом Архимеде мы знаем несколько больше, чем о других математиках древности. Известно, что он родился в 287 году до нашей эры в богатом торговом городе Сиракузы в Сицилии, где и провел большую часть жизни, до 212 года до нашей эры, когда родной город Архимеда был взят римлянами и сам Архимед убит при штурме. Архимед много раз бывал в Александрии, пользовался ее библиотекой и был в дружеской переписке с Александрийскими учеными. Наиболее известны работы Архимеда в области физики («закон Архимеда» в гидростатике), изобретенные им машины, – например, «Архимедов винт» для подъема воды, и особенно известны многочисленные военные машины, которые построил Архимед в трудную пору, когда его родной город был осажден римлянами. Вот что пишет об этом Плутарх: «римляне напали с двух сторон, и сиракузяне растерялись и притихли от страха, полагая, что им нечем сдержать столь грозную силу. Но тут Архимед пустил в ход свои машины и в неприятеля, наступавшего с суши, понеслись всевозможных размеров стрелы и огромные каменные глыбы, летевшие с невероятным шумом и чудовищной скоростью, сокрушавшие все на своем пути и приводящие в расстройство боевые ряды. А на римские суда вдруг стали опускаться укрепленные на стенах брусья и либо топили суда силою толчка, либо, схватив железными руками или клювами, наподобие журавлиных, вытаскивали суда носом вверх из воды, а потом, кормою вперед, пускали ко дну».

Далее Плутарх рассказывает, что командовавший римлянами Марцелл отказался от приступов и перешел к блокаде города, поскольку «римляне были запуганы до крайности и, едва заметив на стенке веревку или кусок дерева, поднимали крик и пускались наутек в полной уверенности, что Архимед наводит на них новую машину».

В дальнейшем жители Сиракуз настолько уверовали в могущество машин Архимеда, что проявили беспечность, и город был взят внезапной ночной вылазкой. Архимед погиб при штурме.

Изумительные военные машины Архимеда в наибольшей мере запечатлелись в памяти современников, но и в области математики Архимед сделал очень много. Так, например, им были найдены площади круга и параболических сегментов, объемы шара, эллипсоида, сегментов шара. В сочинениях Архимеда все найденные им зависимости для площадей и объемов доказываются строго геометрически, – то есть доказывается, например, методом исчерпывания, по Евдоксу, что разность между объемом шара и величиной $\frac{4}{3}\pi r^3$ может быть сделана сколь угодно малой, но откуда берется сама величина $\frac{4}{3}\pi r^3$ - не поясняется.

Но для того, чтобы доказывать, что разность между объемом шара и величиной $\frac{4}{3}\pi r^3$ может быть лишь сколь угодно малой, нужно предварительно найти эту величину. И поскольку Архимед нашел не только объем шара, но и многих других тел (а также площади целого ряда фигур), то ясно, что Архимед владел способом, позволяющим находить (а не только доказывать) формулы для площадей и объемов. Но в чем состоял этот способ, долгое время оставалось неясным. И лишь в 20 веке была найдена новая рукопись Архимеда – письмо к его другу Эратосфену «О методе». В этом письме Архимед частично раскрывает свой метод отыскания площадей и объемов. Письмо это было найдено приват-доцентом Петербургского университета Пападуло-Керамевсом среди старых рукописей в одном из Иерусалимских монастырей. После опубликования в 1906 году этого письма стало ясно, почему Архимед не публиковал своего метода, раскрыл его только в письме к другу, которое оставалось неизвестным последующим поколениям математиков, и было найдено лишь случайно. Дело в том, что метод Архимеда был нестрог. Он рассматривал фигуры, как состоящие из бесконечно большого числа элементарных малых частей и свойства частей искусно переносил на фигуру в целом. Фактически метод Архимеда использовал актуальную бесконечность и был зародышем интегрального исчисления, но этот зародыш развития не получил. Не желая выслушивать упреков в не строгости и недоказательности своих рассуждений от изощренных в логике насмешливых математиков александрийской школы, Архимед не раскрывал методов, которыми он фактически находил интересующие его площади и объемы. Архимед фактически публиковал лишь наименее важную, заключительную часть своего исследования – педантично-строгие доказательства по Евдоксу. В результате самое важное в работах Архимеда – его метод, предвосхитивший позднейшую методику интегрального исчисления – не получил широкого распространения и поэтому в дальнейшем оказался прочно забыт и был заново открыт математиками Нового времени лишь 1800 лет спустя.

Так традиции, сложившиеся в греческой математике, оказались тормозом на пути дальнейшего развития науки.

И нельзя считать случайностью, что после Евклида, Аполлония, Архимеда в греческой математике наблюдается постепенный спад.

Еще не раз появлялись выдающиеся математики. Так во 2-3 веках до нашей эры работали Диокл и Никомед – их имена мы встречаем сейчас в названиях изучаемых ими кривых – циссоида Диокла (или Диоклеса, если следовать латинскому написанию его имени) и конхоида Никомеда. В 1 веке новой эры в Александрии жили Герон (с его именем связана известная «формула Герона» для вычисления площади треугольников) и Менелай, работавший в области сферической тригонометрии. К 3-му веку относятся оригинальные арифметические работы Диофанта, лежащие вне основного русла развития греческой математики (работы Диофанта посвящены не фигурам, а числам и уравнениям). В 4-5 веках нашей эры развивалась деятельность Паппа Александрийского, женщины-математика Ипатии, философа и математика Прокла (410-485). Именно по дошедшим до нас комментариям Прокла к 1 книге «Начал» Евклида, в которых Прокл дает краткий обзор истории геометрии до Евклида, мы имеем возможность составить представление о математических работах Фалеса Милетского и других математиков, предшественников Евклида, чьи рукописи погибли и до нас не дошли. Так что выдающиеся ученые были, но в целом греческая математика после великих свершений Евклида, Архимеда и Аполлония постепенно снижает свой уровень и вырождается.

История греческой математики дает нам возможность проследить не только рост, но и деградацию определенной области науки. За последние столетия наука почти беспрерывно растет и развивается, мы отвыкли связывать между собой такие понятия как «наука» и «деградация», и тем поучительнее для нас изучение истории греческой науки, и в том числе истории постепенного падения греческой математики.

Часто падение греческой математики объясняют внешними причинами – экономическими трудностями в приходящих в упадок эллинистических государствах, постепенно попадавших под влияние Рима, влиянием христианской церкви и т.п. Эти объяснения не выдерживают критики. Переход под власть Рима, в конечном счете, не только не подорвал, но упрочил благосостояние многих греческих городов. Александрия оставалась процветающим городом и греческим культурным центром вплоть до ее завоевания арабами в 641 году нашей эры, – то есть после смерти Архимеда у математиков александрийской школы было в распоряжении более 800 лет свободного развития и, если за эти 800 лет математика падала ниже и ниже, то причина, во всяком случае, лежит не в уровне благосостояния.

Ссылаются в оправдание упадка греческой математики на влияние христианской церкви. Но церковь вовсе не была враждебна к греческой науке вообще. К философии Платона и неоплатоников, к логике Аристотеля христианская церковь относилась с полным вниманием, развивала и продолжала их работы (разумеется, уже в своем духе). Единственный пример враждебности церкви к конкретному математику – гибель женщины-математика Ипатии, растерзанной в Александрии в 418 году нашей эры озверелой толпой, науськанной александрийским епископом Кириллом – является исключением, а не правилом.

Нет, греческая математика погибла вследствие не внешних, а внутренних причин. Мы уже указывали, что греческие математики александрийской школы развивали науку, не обращая внимания на ее приложения, а просто как безупречно строгое упражнение в логике и эстетике. Фактически, они превратили математику в интеллектуальную игру, и поэтому не следует удивляться, что греческую математику постигла жестокая судьба всех игр: со временем игра надоела и ее забросили.

Заметим, что судьба греческой математики отличается от судеб других ветвей античной науки. Такие науки как астрономия, медицина успешно развивались во времена Римской империи, в первые века нашей эры, и стали приходить в упадок лишь много позже, когда уже весь античный мир начал распадаться под ударами варварских племен, которые, начиная с 3 века нашей эры, усилили свой натиск на Западную Европу.

Античный мир пал во многом потому, что его наука, несмотря на отдельные достижения, еще не успела стать силой, способной повлиять на исход военных столкновений. Действительно, во многом ли отличалась военная техника варварских племен, сокрушивших западную Римскую империю в 5 веке, от военной техники самих римлян? Отличалась она очень немного. Исход столкновения решала численность войск, а варвары были многочисленнее.

Наука могла бы изменить это положение. На примере обороны Сиракуз, организованной Архимедом, мы помним, какой великой силой даже в те далекие времена становилась наука тогда, когда математические методы становились основой проектирования военных машин.

Но даже великий Архимед был не в силах в одиночку противостоять тенденциям своего времени, которые властно толкали математику подальше от приложений, и ради достижения строгости превращали ее в интеллектуальную игру. Мы помним, что Архимед даже не решился опубликовать методы, которыми он пользовался, не желая выслушивать упреков в не строгости, и методы его погибли вместе с ним. Другие математики имели еще меньше сил и возможностей противостоять традициям александрийской школы, и эти традиции неминуемо вели к упадку, а затем и к гибели античной математики; возродилась она много позже.

Глава 2. Возрождение математики в Западной Европе.

В пятом веке нашей эры западная Римская империя пала под натиском варварских племен. Нашествие варваров привело к упадку культуры. Если в Римской империи грамотность была правилом, и даже пароль в армии давался в письменном виде, то в 5-12 веках грамотность в Западной Европе была редчайшим исключением, грамотны были священники, да и то не все.

На многие века Западная Европа перестала быть центром передовой науки, в том числе и математики. В 7-12 веках традиции греческой математики, забытой в Западной Европе, были подхвачены арабами. В тот период именно в странах ислама переводились на арабский язык творения греческих ученых, рождались новые математические идеи, в частности – в области алгебры. Между прочим, само слово «алгебра» происходит от арабского термина «аль-джебр», арабы называли так правила переноса членов из правой части уравнения в левую, и наоборот, с учетом знаков.

В 13 веке нашествие монгольских завоевателей разорило большинство стран ислама. Одновременно в Западной Европе постепенно развивается хозяйство, повышается материальное благосостояние, растут многочисленные города, появляется интерес к культуре и науке. Центрами науки в Западной Европе стали университеты. В 12 веке появились первые университеты Европы – в Болонье (около 1100 г), затем в Париже, Оксфорде (Англия). В 1348 г. был основан университет в Праге, в 1364 г. – в Кракове, в 1365 г. – в Вене, в 1385 г. – в Гейдельберге, в 1409 г. – в Лейпциге, в 1469 г. – в Базеле. Крупнейшим университетом был парижский, в котором временами училось до 20 тысяч студентов.

Структура средневекового университета копировала цеховую структуру средневекового города. Ремесленники города делились на цехи. Были цехи суконщиков, каменщиков, плотников, пекарей и т.п. Производить изделия на продажу разрешалось только полноправным членам цеха – мастерам, которым помогали подмастерья. Подмастерья, а тем более, посторонние, не члены цеха, к самостоятельной работе не допускались. Стать мастером можно было, лишь проучившись несколько лет в подмастерьях, а главное – нужно было изготовить образцовое изделие – шедевр – и предъявить его товарищам по цеху. Лишь после одобрения шедевра (и после пирушки, задаваемой товарищам по цеху) подмастерье делался полноправным мастером.

Университеты копировали цеховую организацию. Преподавать имели право лишь лица, имевшие степень магистра, а для того чтобы стать магистром, надо было написать диссертацию и публично защитить ее перед коллегией магистров университета.

Интересно, что во всех других сферах деятельности цеховая структура исчезла, а в науке она сохранилась до нашей дней. Защита диссертации, ученые степени (магистра, доктора, много позже – кандидата наук) – все это идет от средневековых ремесленных цехов.

Организация преподавания в большинстве университетов была сходной: университет состоял из четырех факультетов – искусств, богословия, права и медицины. Студенты – обычно подростки – поступали сперва на факультет искусств, где учились шесть лет, после чего имели право перейти на один из старших факультетов, где они уже окончательно специализировались по богословию, праву или медицине. [2)] Математике, наряду с грамматикой, риторикой и т.п., обучали на факультете искусств, обычно в объеме первых книг «Начал» Евклида и основ сферической астрономии, оптики и теории движения планет. Отдельных кафедр математики не было, не было долгое время и преподавателей, специализирующихся на преподавании математики. По-видимому, первым преподавателем, специализирующимся на математических науках, был магистр Венского университета Иоганн из Гмундсена (1380-1442 гг.).

Математика в средневековых университетах следовала традициям греческой математики и, прежде всего – традициям Евклида. Основное внимание уделялось логическому рассуждению и доказательствам, особое внимание университетские схоласты уделяли парадоксам конечного и бесконечного, свойствам бесконечных рядов (так, например, Н. Орем (1323-1382 гг.) установил расходимость гармонического ряда $I+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$), в то же время вопросы применения математики университетских профессоров того времени интересовали мало: для них математика была, прежде всего, упражнением в логике. Поэтому параллельно с университетской математикой развивалась математика практическая, искусство вычисления, которое необходимо было купцам и менялам той эпохи. Выдающимся представителем вычислительной математики был Леонардо Пизанский (1180-1240), известный также под именем Фибоначчи. Отец его торговал также в Алжире, где Леонардо учился у учителей – арабов. Мы уже упоминали, что в 12-13 веках именно арабы располагали наиболее глубокими математическими знаниями. В основном труде Леонардо «Книга абака» (абак – это счетная доска, распространенная в то время) систематизированы, прежде всего, достижения арабской вычислительной математики, к которым Леонардо сумел прибавить также и много собственных результатов.

Прежде всего, Леонардо доказывает преимущества десятичной позиционной нумерации, которую сам Леонардо называл «индийской»; впоследствии ее стали называть арабской нумерацией. Именно после книги Леонардо начинается победоносное шествие арабских цифр по Западной Европе, которая до этого пользовалась неудобными «римскими» цифрами. Далее Леонардо излагает правила умножения и правило проверки результата по остатку от деления на девять сумм цифр сомножителей, излагает правила деления и признаки делимости на 2, 3, 5, 9, а также правила действий со смешанными числами и дробями.

Помимо арифметических действий, Леонардо описывает приемы решения задач коммерческой арифметики, основанные на пропорциях, тройном правиле и его обобщениях, правила раздела суммы пропорционально по паям участников и т.п., приводит знаменитую задачу о наименьшем числе гирь, с помощью которых можно взвесить все целые веса, меньшие некоторого заданного (и дает решение – гири должны иметь вес пропорциональный степеням тройки – 1, 3, 9, 27 и т.д.). Отдельно рассмотрены у Леонардо правила суммирования некоторых рядов – арифметической и геометрической прогрессий, ряда квадратов и названного впоследствии его именем знаменитого возвратного «ряда Фибоначчи»: $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$: отметим, что к изучению этого ряда привела Леонардо Фибоначчи практическая задача о вычислении потомства пары кроликов. Далее в трактате Леонардо рассматриваются многочисленные задачи из купеческой практики, сводящиеся к решению систем линейных уравнений и к квадратным уравнениям.

Таким образом, мы убеждаемся, что уже к 13 веку купеческие города Италии нуждались в довольно высоком уровне прикладных математических знаний, которые использовались купцами и менялами в их повседневной практике. Появилась потребность в преподавателях математики; излагая купцам элементарные методы вычислений, сами преподаватели работали над более сложными задачами. Так, например, преподавателем математики в Риме, Милане, Болонье и других городах был Лука Пачоли (1445-1515), современник и друг Леонардо да Винчи, изобретатель двойной («итальянской») бухгалтерии. В его работах начинает постепенно широко использоваться алгебраическая символика. Излагая методы решения квадратных уравнений, Пачоли отметил, что для решения кубических уравнений вида: $x^3 + ax = b$ «искусство алгебры еще не дало способа, как не дан еще способ квадратуры круга» (подразумевалось, естественно, не решение уравнений третьей степени путем последовательных итераций, а решение в радикалах). Однако спустя лишь несколько десятилетий итальянцы Сципион дель Ферро (1456-1526), Николо Тарталья (1500-1557), Джироламо Кардано (1501-1576) и Луиджи Феррари (1522-1565), (кстати, все они были преподавателями математики) нашли решение в радикалах уравнений не только третьей, но и четвертой степеней.

Первым нашел частные случаи решения уравнений третьей степени Сципион дель Ферро, однако он, не публикуя решения, сообщил его своему ученику Фиору, который использовал решение Ферро для выступления на математических турнирах, которые тогда были в моде. На одном из турниров, состоявшемся в 1535 году, Фиор встретился с Тартальей. Перед турниром Тарталья самостоятельно нашел правило решения, решил все задачи Фиора и вышел победителем турнира. Тарталья хранил свое правило в тайне и лишь под большим секретом сообщил его Кардано. Кардано самостоятельно нашел доказательство формул Тартальи, после чего счел себя в праве опубликовать их в 1545 году в своей книге «Великое искусство, или об алгебраических правилах», упомянув, впрочем, об авторстве Тартальи. Вот отрывок из книги

Кардано «Великое искусство» (цитирую по работе Гутер Р. С. Полунов Ю.Л. «Джироламо Кардано», М, «Знание», 1980): «В наше великое время Сципион дель Ферро открыл формулу» (подразумевается формула для решения неполного кубического уравнения). «Так как подобное искусство превосходит все человеческое остроумие и всю ясность ума смертного, то его нужно рассматривать как подарок небесного происхождения… Это настолько славное открытие, что от того, кто мог его достигнуть, можно ожидать, что он достигнет всего. Соперничая с ним (со Сципионом дель Ферро) Николо Тарталья из Брешии, наш друг, решил ту же самую проблему и после долгих просьб передал ее мне».

Мы видим, что авторство Тартальи оговорено, и все же, несмотря на это, за правилом решения кубичного уравнения в радикалах закрепилось название «формула Кардано». В той же книге было опубликовано найденное учеником Кардано – Феррари – правило решения уравнений четвертой степени. Формулы Кардано послужили поводом к исследованию и постепенному введению в математическую практику мнимых и комплексных чисел, – как известно, именно в том случае, когда кубичное уравнение имеет три действительных корня, они по формулам Кардано выражаются через корни из комплексных чисел.

Решение уравнений 3-й и 4-й степеней, недоступное ни математикам Древней Греции, ни математикам стран ислама, подчеркивало, что к 16 веку передовое место в науке прочно перешло к Западной Европе. Научные достижения опирались, прежде всего, на достижения экономические. В то время как страны Восточной и Центральной Европы, Западной Азии в 13-15 веках терпели разорение от нашествий татаро-монголов, а затем турок, в избавленной от нашествий Западной Европе быстрыми темпами развивалась экономика, которая стала предъявлять все новые и новые требования к уровню математических знаний. С 15 века, с путешествий Колумба и Васко де Гамы начинается эпоха великих географических открытий. Суда государств Западной Европы начинает бороздить моря и океаны. Появляется острая потребность в точной картографии, в методах навигации, а эта потребность в свою очередь стимулирует развитие тригонометрии, как плоской, так и сферической. Тригонометрией занимались немецкий математик Иоганн Мюллер (1436-1476), прозванный Региомонтаном, вычисливший в частности, таблицы синусов и тангенсов с семью десятичными знаками, и великий польский астроном Николай Коперник, составивший еще более точные таблицы. Необходимость в обширных вычислениях подготовила почву для изобретения логарифмов, которые и были изобретены независимо друг от друга шотландцем Джоном Непером (1550-1617) и швейцарцем Иостом Бюрги. Наибольшее распространение и популярность получила книга Непера «Описание удивительной таблицы логарифмов», изданная в Эдинбурге в 1614 году. В ней содержались вычисленные Непером логарифмы синусов и косинусов от 0 до 90° с интервалом в одну угловую минуту с семью десятичными знаками. Логарифмы Непера и Бюрги были близки к тому, что мы сейчас называем натуральными. Десятичные логарифмы были введены англичанином Генри Бригсом (1561-1631); в 1617 году он опубликовал таблицу десятичных логарифмов чисел от 1 до 1000 с четырнадцатью знаками.

Идея логарифмической линейки была впервые предложена Уингейтом в книге, вышедшей в 1624 году. К 1630 году У. Отред (1575-1660) и независимо от него Р. Деламей изготовили хорошо работающие экземпляры линеек. В 1654 году Р. Биссакер, тоже англичанин, усовершенствовал линейку, введя скольжение одной шкалы в пазах другой. После этого логарифмическая линейка приняла практически современный вид.

Возникнув как средство облегчения вычислений, логарифмы дали затем мощный импульс развитию теоретической математики, доставив пример новой функциональной зависимости – логарифмическую функцию.

Вообще математика в Западной Европе к 16-17 векам пошла по совершенно другому пути, чем математика Древней Греции. Ученые Западной Европы 16-17 веков – это, прежде всего инженеры, изобретатели, астрономы, философы; к математическим задачам их толкала неотвязная потребность решить вставшие перед ними практические проблемы, которые они решали в тесном контакте с мастерами и ремесленниками того времени. Решение практических задач открывало новые математические объекты, которые становились предметом дальнейшего изучения, в свою очередь, стимулируя теоретическую мысль. Рассмотрим характерный пример, связанный с работами Христиана Гюйгенса (1629-1695). Началом послужила одна из важнейших практических задач 17 века – усовершенствование маятниковых часов. Было подмечено, что период колебаний простого кругового маятника зависит от размаха и не позволяет ему быть точным измерителем времени. А между тем именно в это время точные часы были очень нужны, – прежде всего, для целей навигации. Широту в 17 веке уже умели определять довольно точно, измеряя высоту над горизонтом небесных светил. Теоретически долготу любого места в ходе плавания можно определять путем сравнения местного времени, определяемого по кульминации Солнца или звезд, со временем пункта отправления, – если только это время достаточно точно хранят хорошие часы. В качестве часов долгое время все и упиралось – обычные маятниковые часы, в которых центр тяжести маятника движется по окружности, нужной точности не обеспечивали, особенно в условиях качки корабля. Лучше других это понимал Христиан Гюйгенс, соединивший в своем лице талант изобретателя, выдающегося часового мастера, с талантом математика. Гюйгенс предложил и разработал несколько остроумных конструкций маятниковых часов, повышающих точность, и он же заметил, что главным препятствием к дальнейшему увеличению точности служит принципиальное свойство обычного маятника – зависимость периода колебаний от их амплитуды. На качающемся корабле не удавалось сохранить постоянную амплитуду колебаний, и часы неизбежно теряли точность. Гюйгенс поставил интереснейшую задачу, – по какой кривой (вместо окружности) должен двигаться центр тяжести маятника для того, чтобы период колебаний не зависел от амплитуды. Гюйгенс нашел эту кривую – с помощью удивительно остроумных рассуждений, приведенных в его трактате «Маятниковые часы», опубликованном в 1673 году, (трактат этот переведен на русский язык и издан в составе книги: Х. Гюйгенс «Три мемуара по механике», издат. Академии Наук СССР, 1651 г.). Искомая кривая оказалась циклоидой – кривой, которую описывает закрепленная точка окружности, катящейся по прямой без скольжения. Заметим, что сам Гюйгенс более живо определял циклоиду: это та кривая, «которую описывает в воздухе гвоздь, вбитый в обод колеса, при его качении». Как раз это незадолго до этого, в работах учеников Галилея Вивиани и Торричелли эта кривая была впервые описана; название «циклоида» было придумано самим Галилеем. В те же года вообще многие ученые интересовались свойствами различных кривых, свойствами касательных к этим кривым, свойствами эволют и эвольвент, поскольку было замечено, что новые кривые обладают неожиданными и часто полезными свойствами. Так, циклоида оказалась полезной при создании точных часов. Однако, как заставить центр тяжести маятника двигаться точно по циклоиде? Гюйгенс нашел оригинальное решение: путь нить подвеса маятника колеблется между двух «щек», изогнутых по кривым – эволютам циклоиды (рис.2). Для того чтобы правильно изогнуть «щеки», нужно было найти эти кривые – эволюты циклоиды. Гюйгенс нашел их, создав по пути саму теорию эволют и эвольвент. Эта теория позволила Гюйгенсу построить часы, в которых центр тяжести маятника двигался по циклоиде, в результате чего период колебания перестал зависеть от амплитуды.

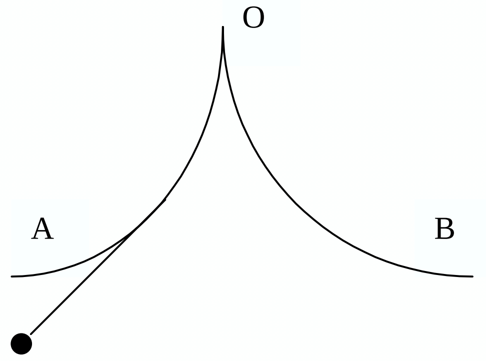

Рис.2. маятник Гюйгенса. АО и ОВ – направляющие щеки, изогнутые по дугам эволют циклоиды.

Хотя в дальнейшем часовая техника пошла по несколько другому пути, и циклоидный маятник Гюйгенса был заменен более совершенными устройствами, работа Гюйгенса с особенной наглядностью показала пользу соединения математики и практики, плодотворность применения математических методов и теорем к решению конкретных технических задач. Это была новая черта математики Западной Европы 17 века, коренным образом отличающая ее от математики Древней Греции, которая была прежде всего «интеллектуальной игрой».

Изучение кривых, их эволют и эвольвент, касательных и нормалей, вычисление длины различных кривых и площади фигур, ими ограниченных, стало серьезным и важным делом и привлекло внимание многих ученых. Развернулись поиски методов, позволяющих находить касательные и вычислять площади не для одной конкретной кривой или фигуры, а для целых классов их и эти поиски вскоре привели, как мы увидим, к построению основ дифференциального и интегрального исчисления.

Вот что писал об этом синтезе технических задач и математических методов решения Христиан Гюйгенс в 1673 году, в предисловии к своим мемуарам «Маятниковые часы, или геометрические доказательства, относящиеся к движению маятников, приспособленному к часам»: «при помощи геометрии я нашел новый, до сих пор неизвестный, способ подвешивания маятников. Я исследовал кривизну некоторой кривой, которая удивительнейшим образом подходит для обеспечения равенства времени качания маятника. После того, как я заставил маятник качаться по этой кривой, ход часов стал чрезвычайно правильным и надежным, как показали испытания на суше и на море. Эта кривая – та, которую описывает гвоздь, вбитый в обод колеса при его качении. Математики нашего времени называют ее циклоидой; из-за разных других ее свойств она исследовалась многими, а мною - ввиду ее пригодности для измерения времени, которую я обнаружил, исследуя ее по строгим методам науки и не подозревая еще ее применимости. Для применения моего изобретения к маятникам мне необходимо было установить новую теорию, а именно теорию образования новых линий при посредстве развертывания кривых» (на современном языке – это теория эволют и эвольвент). «Здесь я, - продолжает Гюйгенс, - столкнулся с задачей сравнения длины кривых и прямых линий. Я изучал этот вопрос несколько долее, чем нужно было для моей цели, так как теория показалась мне изящной и новой. Я показал полезность применения в часах сложного маятника. Для изучения его природы я должен был произвести исследование о центре качения… Я доказал при этом ряд теорем относительно линий, площадей и тел… Но всему этому я предпосылаю описание механического устройства часов и применение маятника в форме, оказавшейся наиболее удобной для астрономических целей».

На примере цитированных мемуаров Гюйгенса особенно ярко видна основная особенность стремительно развивающейся математики 16-17 веков: она начинает с решения конкретных практических задач, восходит к теоретическим обобщениям, а обобщения эти применяют для решения новых задач. Именно тесная связь с практикой, соединение в одном лице математика с философом, инженером, астрономом обеспечило бурное развитие математики Западной Европы, в короткий срок перекрывшей самые выдающиеся достижения греческих ученых.

Заметим, что в 16-17 веках переводятся на латынь и печатаются в Западной Европе труды Евклида, Архимеда, Аполлония, Паппа (в то время и вплоть до 19 века латынь была международным языком науки и это облегчало общение ученых). В этих трудах математики Западной Европы смогли почерпнуть новые идеи, которые стали отправной точкой их собственного творчества. Труды великих греков переводят, оживленно обсуждают – и это после того, как в течение многих веков рукописи великих греческих математиков пылились никому не нужные на самых дальних полках библиотек Византии; теперь наступила их вторая жизнь. Возрождение античной математики в Западной Европе связано с тем, что методы строгого дедуктивного рассуждения Евклида и его последователей были включены как составная часть в гораздо более богатый и разнообразный арсенал методов, которыми пользовались математики 16-17 века. Они были людьми тесно связанными практикой, с ее потребностями и не колебались (в отличие от древних греков) использовать для решения математических задач такие методы как неполная индукция (ее как раз на грани 16-17 веков горячо пропагандировал Ф. Бэкон (1561-1626)), а также такие методы, как аналогия, простая догадка, проверка на конкретных числовых примерах. Добавление к этим методам строгого дедуктивного рассуждения, так блестяще разработанного в Древней Греции, дало математике новый могучий импульс развития.

Таким образом, история показывает нам, что превратившаяся в чисто теоретическую науку математика Древней Греции хирела и постепенно погибла. В отличие от нее, наука Западной Европы 15-17 веков сумела соединить интерес к теории с решением практических задач, и этот синтез теории и практики стал основой дальнейшего развития математики.

Изменился и стиль изложения математических книг. Долгие века считался образцовым стиль Евклида: сначала – определения и постулаты, затем - цепочка теорем и их доказательства. Стиль Евклида был настолько популярен, что Б. Спиноза (1623-1677) даже свой знаменитый трактат по этике написал «по Евклиду», в виде цепочки теорем (трактат Спинозы так и назывался: «Этика, доказанная геометрическим путем»; в современных переводах его называют просто «Этика»).

Началом нового стиля можно считать опубликованную в 1637 году «Геометрию» Р. Декарта (1596-1650). Эта работа, заложившая, кстати, основу современной аналитической геометрии, написана уже как сплошное связное изложение, без разделения на теоремы, но с четкими подзаголовками, ясно указывающими, что полезного принесет читателю тот или иной раздел книги. Вот первые подзаголовки знаменитой книги Декарта: «Как исчисление арифметики относится к построению геометрии?», «Как следует получать уравнения, служащие для решения задач?», «Как они решаются?».

Декарт не пренебрегает доказательствами, его утверждения доказаны, но стиль изложения Декарта подчеркивает практическую направленность математического исследования. Изложив первые понятия зарождающейся аналитической геометрии, Декарт сразу указывает, что эти понятия имеют ценные практические приложения – в частности в оптике, при выборе формы линз для появившихся как раз в то время зрительных труб.

И вряд ли можно считать случайным, что турецкое нашествие, поглотившее в 15 веке Византийскую империю и страны Балканского полуострова, в 16 веке – Венгрию и Северную Африку, в 17 веке было победоносно отбито Западной Европой. Важную роль сыграло превосходство европейской артиллерии. Конечно, не нужно делать упрощенного вывода: «европейская артиллерия была лучше потому, что высокого уровня достигла европейская математика». Превосходство европейской артиллерии слагалось из многих факторов, но к числу их следует отнести и разработки математиков 16-17 веков по баллистике. Так, например, уже упоминавшийся нами итальянский математик Николо Тарталья помимо решения кубичного уравнения известен и работами по баллистике. Именно он, например, доказал впервые, что наибольшую дальность полета пушечного ядра обеспечивает угол подъема ствола равный 45 градусам.

Сыграло свою роль в отражении турок и превосходство европейской оптики – над совершенствованием ее, над расчетами зрительных труб работали Кеплер и Декарт, несколько позже – Ньютон.

Выбирая свой стиль изложения, столь отличный от стиля Евклида, Декарт стремился обеспечить читателю наиболее легкую, понятную и доступную дорогу к постижению математических истин, ту самую «царскую дорогу», возможность которой отрицал Евклид. В дальнейшем разные математики писали одни «в стиле Евклида», другие – «в стиле Декарта». Постепенно установилось разделение: работы по чистой математике чаще пишутся «в стиле Евклида», по прикладной математике – «в стиле Декарта»[3)]. Такой известный классик прикладной математики как А.Н. Крылов, формулируя свои результаты, вообще не употребляет слово «теорема». Конечно, никоим образом не следует делать вывода, что один стиль изложения «лучше» другого. И в «стиле Евклида» и в «стиле Декарта» написаны прекрасные книги. Все зависит от того, какую цель ставил перед собой тот или другой автор.

Вообще, в стиле изложения результатов исследований в области математики Декарт такой же новатор, как и в развитии ее основных идей. Вот что, например, писал о вкладе Декарта Ф. Энгельс («Диалектика природы», М., 1952, стр. 206): «поворотным пунктом в математике была декартова переменная величина. Благодаря этому в математику вошли движение и диалектика, и благодаря этому же стало немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление, которое тотчас и возникает, и которое было, в общем и целом, завершено, а не изобретено Ньютоном и Лейбницем».

К истории зарождения дифференциального и интегрального исчисления, которое именовалось первоначально «исчислением бесконечно малых», мы и перейдем.

Глава 3. Зарождение и развитие математического анализа.

Начиная с 17 века, математика настолько усложняется и разветвляется, что уже нет возможности в хронологическом порядке перечислять открытия, сделанные во всех ее областях. Поэтому в истории математики 17-18 веков мы осветим лишь ее центральный и наиболее важный для дальнейшего развития раздел – зарождение основ математического анализа, который первоначально развивался как исчисление бесконечно малых величин.

Зарождение исчисления бесконечно малых - предшественника современного дифференциального и интегрального исчислений - было важнейшим достижением математики 17 века. Древние греки отказались в свое время ради строгости от понятия актуальной бесконечности - и это обеднило содержание их результатов. Математики 17 века били гораздо смелее. При вычислении объемов, центров тяжести различных фигур они рассматривали фигуры как суммы бесконечно-большого числа бесконечно-малых элементов, при построении касательных рассматривали кривую как ломаную линию с бесконечно большим числом бесконечно- малых сторон.

В чем причина этой смелости? Математики 17 века хорошо знали трудности и парадоксы, подстерегавшие их при использовании понятия бесконечности. Переводы греческих авторов, писавших об этих трудностях, были им хорошо известны. Однако, в отличие от их греческих предшественников, для ученых 17 века математика была не упражнением в логике, а средством решения практических задач, выдвигаемых жизнью. Они ценили методику бесконечно-малых за то, что она позволяла им получить новые и важные результаты. Они видели, что использование бесконечно-малых может иногда приводить к ошибкам и парадоксам, но поскольку задачи, решаемые ими, были задачами практическими, сопоставление с опытом позволяло отсеивать неправильные решения, неправильные методы рассуждений, и позволяло постепенно вырабатывать методы, свободные от ошибок.

Методы исчисления бесконечно-малых развивались медленно, на протяжении всего 17 века. В работах Кеплера (1571-1630), Декарта (1596-1650), Кавальери (1598-1647), Торричелли (1608-1647), Ферма (1601-1665), Паскаля (1623-1662), Барроу (1603-1667), разбирались примеры построения касательных ко многим интересным кривым, были вычислены площади и объемы многих конкретных фигур[4)]. Во второй половине века, прежде всего в работах Ньютона и Лейбница, а также их учеников и последователей – Якова Бернулли (1654-1705), его брата Иоганна Бернулли (1667-1748), Лопиталя (1661-1704) и других - исчисление бесконечно-малых оформилось в единый и мощный метод исследования. Не имея возможности остановиться подробно на всех упомянутых нами предшественниках Ньютона и Лейбница, мы – помимо Декарта, о котором уже говорилось, – остановимся несколько подробнее на личности Пьера Ферма (1601-1665). По образованию Ферма был юрист, и после окончания университета в Тулузе (Южная Франция) многие годы занимал должность советника суда. Математикой он занимался в свободное время, как увлечением, но работы его проложили новые пути во многих отраслях математики. Наиболее известны исследования Ферме по теории чисел – малая теорема Ферма, утверждающая, что для любого целого числа a разность $a^p - a$, делится на p, где p – простое число, и знаменитая "великая" теорема Ферма, доказанная полностью лишь совсем недавно. В этой теореме Ферма утверждал, что уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет решений в целых числах при натуральном n>2. Запись этой теоремы сохранилась на полях принадлежащего Ферма экземпляра сочинений Диофанта. Ферма записал, что он знает доказательство этой теоремы, "но поля слишком малы, чтобы вместить его". Частные случаи ее были доказаны Эйлером (для n =3 и n =4), Дирихле (1805-1859) (для n=5), Куммером (1810-1893) для всех n≤100. Более подробно историю доказательства теоремы Ферма мы рассмотрим в главе 7.

Не менее важными, чем исследования в области теории чисел, были работы Ферма по определению максимумов и минимумов. Одним из первых Ферма ясно осознал, что максимум или минимум достигаются там, где скорость изменения переменной величины обращается в нуль, и поэтому задачи о максимумах находятся в тесной зависимости с задачами о построении касательной. Ферма решил задачи об определении конуса и цилиндра наибольшего объема, вписанных в шар, используя уравнения, которые мы (в современных обозначениях) записали бы как

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)=0\,.$$

Таким образом, начиная с работ Ферма, математика обрела новое, необычайно богатое поле приложений: если раньше ее методы использовались лишь для вычисления, то теперь методы отыскания максимумов и минимумов стали постепенно использоваться для поиска и построения оптимальных конструкций, оптимальных решений технических задач. Старая задача о построении касательной (т.е. фактически, о производной функции) наполнилась новым важным содержанием.

Теперь, опуская за недостатком места разбор работ других, кратко упомянутых нами зачинателей исчисления бесконечно-малых, перейдем к рассмотрению работ корифеев - Ньютона и Лейбница.

Исаак Ньютон родился в 1642 г. в семье небогатого английского фермера и в 1661 г. поступил в Кембриджский университет, в Тринити-колледж, В те годы английские университеты сохраняли очень много средневекового. Университет делился на колледжи, объединявшие по несколько кафедр; во главе колледжа стоял мастер. И кафедры, и колледжи основывались в основном на пожертвования частных лиц. Поэтому и возникло, например, такое положение, что Тринити-колледж долго не имел кафедры математики; она была основана в 1663 г., на крупное денежное пожертвование, внесенное Лукасом. Первым профессором лукасовской кафедры стал Барроу, учитель Ньютона. Сам же Ньютон начал свой путь в Кембриджском университете с самой низшей стадии - он поступил субсайзером. Студенты того времени делились на сайзеров и субсайзеров, пенсионеров и коммонеров-феллоу. Самую высокую плату вносили коммонеры. Они оплачивали не только право учения, но и некоторые привилегии, в число которых входила и такая привилегия, как право не посещать лекции. Пенсионеры оплачивали только жилье. Сайзеры и субсайзеры получали жилье и питание за счет колледжа, но часто должны были исполнять обязанности слуг. Получившие первую ученую степень (бакалавра) именовались феллоу и входили в совет колледжа.

В середине 17 века в Тринити-колледже насчитывалось 40 феллоу, 3 профессора, 30 сайзеров и субсайзеров, 144 пенсионера.

Поступивший в Тринити-колледж 19 летний Ньютон вскоре встретился там с выдающимся учителем - Исааком Барроу (1630-1667), который сам много сделал для зарождающегося исчисления бесконечно-малых. Уже в 1665 г. Ньютон получает степень бакалавра и в том же году жестокая эпидемия чумы, от которой только в Лондоне умерло около 100 тысяч человек, прерывает занятия в университете. Ньютон, подобно многим другим, спасавшимся от чумы, уезжает в деревню, где и проводит в уединении около двух лет. Это – самые плодотворные годы в научном развитии Ньютона, годы формирования его научных концепций.

В эти же годы формировалось постепенно и понимание Ньютоном исчисления бесконечно-малых. В основе его концепции лежало интуитивно-ясное для Ньютона понятие скорости. Если тело движется равномерно, то скорость определяется делением пути на время. А если движение не равномерное? Для Ньютона было очевидно, что и в этом случае в каждый момент времени тело имеет вполне определенную скорость, и за сколь угодно малое время проходится сколь угодно малый путь. Отношение пройденного пути ко времени, за которое он пройден, дает скорость. Для того чтобы получить мгновенную скорость, надо перейти к пределу, т.е. взять "последнее отношение" приращения пути к приращению времени, когда приращение времени стремится к нулю.

Таким образом, в основе построений Ньютона лежит физическое представление о непрерывно изменяющихся текущих величинах. Их Ньютон называл флюентами (от слова fluere - течь) и обозначал буквами x, y, z, а скорости изменения флюент Ньютон назвал флюксиями и обозначал теми же буквами, но с точкой: $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$.

Ньютон сформулировал две основных проблемы исчисления бесконечно малых. "Проблема 1. По данному соотношению между флюентами определить соотношение между флюксиями. Проблема 2. По данному уравнению, содержащему флюксии, найти соотношение между флюентами". Если перейти к более привычному для нас, языку, то флюенты Ньютона – это функции времени, а флюксии – это их производные. И тогда делается ясным, что первая проблема Ньютона - это проблема вычисления производной, а вторая проблема – это нахождение интеграла по его подынтегральному выражению, или в более общем случае – определение решения уравнения, связывающего производные, – т.е. дифференциального уравнения. Сформулировав эти две центральные проблемы, получившие окончательное решение много позже, Ньютон тем самым дал программу дальнейшего развития математического анализа на много десятилетий вперед. Каким же образом решал поставленные проблемы сам Ньютон? Производные (флюксии) он вычислял через предельный переход. Вот пример вычисления Ньютоном производной от функции x^n (из рукописи Ньютона, опубликованной впервые в 1704г), «Величина x течет равномерно. Требуется найти флюксию величины x^n». Для лучшего понимания дальнейшего текста Ньютона, заметим, что малое приращение он обозначает латинской буквой o, которую не следует путать с нулем, а обозначение Ньютона $\overline{x+o}^{\,n}$ соответствует нашему $(x+o)^n$. С учетом этого читаем далее у Ньютона: «В то же время, когда величина x в своем течении обращается в x+o, величина x^n переходит $\overline{x+o}^{\,n}$,

т.е. в

$$x^n + nox^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}o^2x^{n-2} + \ldots \quad \text{и т.д.} \qquad (1)$$

Приращения o и $\overline{x+o}^{\,n}$ относятся между собой, как единица относится к

$$nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}ox^{n-2} \text{ и т.д.}$$

Если теперь эти приращения исчезают, то последнее их отношение будет отношением единицы к nx^{n-1}, и поэтому флюксия величины x относится к флюксии величины x^n как единица к nx^{n-1}».

Далее Ньютон доказывает, что тем же методом последних отношений можно получить и другие флюксии. Мы убеждаемся, что метод Ньютона очень близок к тому, которым мы пользуемся и сегодня. Более сложной для Ньютона было решение второй проблемы, проблемы интегрирования. Ньютон непосредственно умел интегрировать только степенные функции, т.е. он владел формулой, которая в современных обозначениях записывается как

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c \qquad (2)$$

Для более сложных случаев Ньютон разлагал "флюксию" в ряд и интегрировал почленно. Применение разложения в ряд и почленного интегрирования является изобретением Ньютона.

Надо заметить, что мы изложили основные идеи Ньютона в области исчисления бесконечно-малых, которые у самого Ньютона формировались многие годы, – начиная с самых плодотворных годов 1665-1667, которые Ньютон провел в уединении из-за эпидемии чумы. Дальнейшие годы отмечены стремительным научным ростом Ньютона и признанием его со стороны коллег. В 1668 г. он получает звание феллоу, в том же году демонстрирует королевскому обществу построенный им телескоп-рефлектор. В 1669 г. Барроу уступает Ньютону лукасовскую кафедру, и молодой профессор объявляет курс лекций по оптике, в 1677 г. Ньютона избирают в члены Лондонского королевского общества, в 1687 г. выходит из печати его великий труд «Математические начала натуральной философии», в 1703 г. его избирают президентом Лондонского королевского общества. (Заметим, что на титульном листе первого издания «Математических начал натуральной философии» указан 1686 год, так что иногда самую знаменитую книгу Ньютона относят к 1686 г).

Все эти годы математические работы Ньютона по исчислению бесконечно-малых не публиковались; они лежали в рукописях, и содержание их лишь частично становилось известным через переписку и через тех друзей, которым Ньютон показывал рукописи.

Почему происходила столь длительная задержка с публикацией? Надо отметить, что Ньютон был душевно ранимым человеком, тяжело переносившим критику, а новые методы – это он чувствовал, – навлекли бы на себя сильные нападки со стороны ревнителей математической строгости. В работах Ньютона чувствуются эти опасения: «возражают, – пишет он, - что не существует последнего отношения исчезающих количеств, ибо то отношение, которое они имеют ранее исчезания не есть последнее, после же исчезания нет никакого отношения». «Могут также возразить, – пишет Ньютон в другом месте, - что если существуют последние отношения исчезающих количеств, то существуют и последние величины их самих и, следовательно, всякое количество должно состоять из неделимых, вопреки доказанному Евклидом».

Ньютон подробно опровергает эти возражения, но, наверное, он чувствовал и сам, что опровержения его не абсолютны и вовлекли бы его в нескончаемую полемику о строгости. Поэтому Ньютон предпочитал полемизировать делом. Вместо изложения своих методов и неизбежной полемики об их правильности, он просто применял их к решению конкретных научных задач.

В своих работах по механике он открыл новое богатейшее поле применения исчисления бесконечно-малых. Действительно, второй закон Ньютона, связывающий силу и ускорение, может быть записан в дифференциальной форме:

$$m\ddot{x} = F \qquad (3)$$

где m – масса тела, x – перемещение, F – сила.

Ньютон ясно сознавал, что уравнение (3) позволяет по перемещениям тел находить действующие на них силы – для этого достаточно прибегнуть к операции дифференцирования, или (по Ньютону) к нахождению флюксий по данным флюентам. И наоборот, если известны силы, то уравнение (3) позволяет находить скорости и перемещения тел – для этого достаточно выполнить операцию интегрирования или (по Ньютону) нахождения флюенты по данной флюксии. Вот что писал об этом сам Ньютон в «Математических началах натуральной философии»: «Сочинение это предлагается нами как математические основания физики. Вся трудность физики, как будет видно, состоит в том, чтобы по явлениям движения распознать силы природы, а затем по этим силам объяснить остальные явления. Для этой цели предназначены общие предложения, изложенные в книгах первой и второй. В третьей же книге мы даем пример вышеупомянутого приложения, объясняя систему мира, ибо здесь из небесных явлений математически выводятся сила тяготения тел к Солнцу и планетам. Затем, по этим силам, также при помощи математических предложений, выводятся движения планет, комет, Луны и моря".

Таким образом, Ньютон показал, что исчисление бесконечно-малых позволяет найти законы движения земных и небесных тел, а совпадение между найденными законами и прямыми наблюдениями дает возможность судить о правильности использованных математических методов. Только после триумфального успеха "Начал" в Англии, бесспорного признания результатов, полученных Ньютоном, он опубликовал некоторые из своих математических работ («Рассуждение о квадратуре кривых» в 1704 г., «Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов» в 1711 г.), а «Метод флюксий и бесконечных рядов», написанный в 1671 г., был опубликован в 1736 г., уже после смерти Ньютона, скончавшегося в 1727 г. (Заметим, что сами «Математические начала натуральной философии», вышедшие в 1687 г. написаны целиком в стиле Евклида, как цепочка строго доказываемых теорем, опирающихся на аксиомы, и методы исчисления бесконечно-малых в явном виде в них не появляются, хотя фактически, конечно, используются).

Столь позднее издание трудов Ньютона по исчислению бесконечно-малых ограничивало распространение его открытий. Для распространения идей нового исчисления не меньшую, а, пожалуй, даже большую роль сыграли работы великого современника Ньютона - Готфрида Вильгельма Лейбница (1646-1716).

Лейбниц родился в Лейпциге, в 1646 г., в семье профессора Лейпцигского университета. Он учился и в университете родного города, и в университете Иены, в 1666 г. защитил диссертацию «О запутанных случаях в праве», причем настолько блистательно, что одновременно с присуждением степени доктора права ему предложили профессуру, но Лейбниц отказался от нее и поступил на службу к одному из владетельных немецких князей – курфюрсту Майнца, а затем, в 1676 г. он переходит на службу к герцогу Ганновера, на должность библиотекаря и советника. Деятельность Лейбница была исключительно разносторонней. Он занимается философией, юриспруденцией, дипломатией, историей, лингвистикой, богословием. Трудолюбие его колоссально. Сохранилось более 14 тысяч писем Лейбница, и почти в каждом письме выдвигается новая мысль, новая идея. Для России наиболее интересна переписка и личные беседы Лейбница с Петром 1; (они встречались в 1711 и в 1712гг.) Лейбниц горячо отстаивал необходимость создания в России Академии наук, и не без влияния Лейбница было принято решение об основании Петербургской Академии наук в 1724 г. Ранее, в 1700 г., при содействии своей ученицы, дочери ганноверского герцога Софии-Шарлотты, вышедшей замуж за прусского государя, Лейбниц основал Академию Наук в Берлине и стал ее первым президентом. Он же был вдохновителем одного из первых научных журналов «Acta eruditorum»(Труды ученых). То огромное значение, которое имеют для развития научной мысли Академии наук и научные журналы, было одним из первых понято и оценено Лейбницем. Вообще о Лейбнице – одном из универсальнейших гениев всех времен - можно говорить очень долго. Мы остановимся только на одном аспекте многосторонней деятельности Лейбница – его работе в области исчисления бесконечно-малых. Заинтересовался впервые этой областью Лейбниц сравнительно поздно - в 1672 г., когда ему было уже 26 лет. К этому времени в области исчисления бесконечно-малых много отдельных задач было решено такими выдающимися учеными, как Ферма, Декарт, Паскаль. Лейбниц быстро изучил их труды и сумел пойти дальше своих предшественников. Предшественники Лейбница умели проводить касательные, т.е. собственно говоря, вычислять производные, находить максимумы и минимумы для целого ряда конкретных кривых, конкретных функций, прибегая каждый раз к использованию бесконечно-малых и к предельному переходу. Лейбниц посмотрел на дело шире, он поставил задачей найти единый автоматический метод, универсальный алгоритм, который позволил бы находить производные сразу для целого класса функций. И Лейбниц решил эту задачу, разработав правила дифференцирования для суммы, произведения, частного и для суперпозиции нескольких функций. Сам термин «дифференциал», столь привычный для нас, и знаки, «d» для дифференциала и « $\int$ » для интеграла были впервые введены Лейбницем, который не даром уделял столь большое внимание выработке удобной символики. «Следует заботиться, - писал он Чирнгаузу в 1678 г., – о том, чтобы обозначения были удобны для открытий. Это достигается в наибольшей мере тогда, когда знаки коротко выражают и как бы отображают глубочайшую природу вещи; при этом удивительным образом сокращается работа мышления». В обозначениях Лейбница особенно ясной и прозрачной стала важнейшая теорема о взаимной обратимости операций дифференцирования и интегрирования.

Вот что писал об этом сам Лейбниц в статье, опубликованной в 1686 г.:

«если известно, что $d\frac{1}{2}x^2 = xdx$, то, следовательно, и обратно: $\int xdx = \frac{1}{2}x^2$.

(у нас суммы и разности или $\int$ и d так же обратны, как степени и корни в обыкновенном исчислении)». Такова была первая формулировка будущей знаменитой теоремы о взаимной обратности действий дифференцирования и интегрирования – теоремы, получившей позднее имя Ньютона-Лейбница. Мы убеждаемся, что в 1686 г. Лейбниц еще не различал неопределенный и определённый интегралы. В статье 1694 г. он уже различает их и вводит в неопределённом интеграле постоянную интегрирования. Теорема о взаимной обратимости операций дифференцирования и интегрирования позволила Лейбницу найти интегралы многих функций. Если же интегрирование не выполнялось в конечном виде, то Лейбниц, как и Ньютон, прибегал к разложению в ряд. Правило оценки погрешности при суммировании знакопеременного сходящегося ряда было найдено Лейбницем, и применяется по сей день. Заметим еще, что Лейбниц предложил механизм для графического интегрирования, т.е., определения интеграла от функции, заданной графиком. Это был первый в истории интегрирующий прибор.

Сравнивая работы Ньютона и Лейбница по исчислению бесконечно-малых, мы убеждаемся, что их результаты во многом пересекаются. Работы Лейбница оказали большее влияние на современников потому, что они своевременно и регулярно публиковались в основанном самим Лейбницем научном журнале «Acta eruditorum» – первая статья - в 1684 г., последующие - в 1686, в 1693 и 1694 и т.д. Лейбниц одним из первых понял великое значение для развития науки периодического научного журнала и вообще своевременной научной публикации. Публикация в журнале является лучшим способом пропаганды новых научных идей, а публикация, сделанная своевременно, фиксирует приоритет.

Заметим, что именно споры о научном приоритете жестоко отравили последние годы жизни Лейбница. Началось все с того, что в 1704 г. в журнале «Acta eruditorum» был помещен не вполне одобрительный отзыв о недавно опубликованных математических работах Ньютона. Тогда один из учеников Ньютона, Кейль (1674-1721) выступил в Лондонском королевском обществе с обвинением Лейбница в плагиате, в заимствовании метода у Ньютона, в котором он якобы лишь изменил обозначения. Безусловно, что Кейль и поддержавшее его Лондонское королевское общество действовали из ложного понятного национального патриотизма, но ничего кроме вреда английской науке они не принесли. Англичане отказались от использования гораздо более удобной символики Лейбница, и это затормозило развитие английской математики, во многом изолировав ее от гораздо более быстро развивавшейся математики континента Европы. Лейбницу эти споры о приоритете и заимствованиях доставили на склоне его жизни много тяжелых минут, и только позднейшие исследования рукописей Лейбница неопровержимо доказали, что обвинения в заимствовании были совершенно необоснованными и что Лейбниц шел своим путем, отличным от пути Ньютона. Также в отличие от Ньютона, Лейбниц не уклонялся от острой полемики, возникшей вокруг вопроса о том, как понимать столь широко используемые в новом исчислении бесконечно-малые величины. По письмам Лейбница мы можем судить, что четкого понимания не было еще ни у самого Лейбница, ни у его корреспондентов. Иногда Лейбниц трактует бесконечно-малые как конечные, но пренебрежимо малые величины и даже делает сравнение: они пренебрежимы «как песчинка в сравнении с земным шаром». В других случаях он рассматривает бесконечно-малые величины как безгранично убывающие, и указывает, что ошибка отбрасывания их может быть сделана меньшей любого сколь угодно малого, но конечного числа.

Противоречия нового исчисления были очевидны, однако, оно работало, давало правильные и важные результаты, и это было тем главным, что привлекало к исчислению бесконечно-малых внимание новых и новых выдающихся исследователей.

Идеи Лейбница были подхвачены, прежде всего, братьями Бернулли - Яковом (1654-1705) и Иоганном (1667-1748) – уроженцами города Базеля в Швейцарии. Интерес к исчислению бесконечно-малых пробудился у них после прочтения статьи Лейбница в журнале «Acta eruditorum» в 1684г. Надо сказать, что эта статья Лейбница была очень краткой и по первому впечатлению Иоганна «представляла скорее загадку, чем объяснение». Однако уже к 1690 г. братья Бернулли не только освоили метод Лейбница, но и решили с его помощью широкий круг задач.

В эти же годы опубликованные статьи Лейбница заинтересовали знатного парижанина, маркиза Гийома Франсуа

Лопиталя (1661-1704). Именно Лопиталь стал автором первого учебника по новому исчислению, вышедшего в 1690 г. под названием «Анализ бесконечно малых для познания кривых линий». Лопиталь много заимствовал у братьев Бернулли, под руководством которых он изучал новое исчисление. Однако Лопиталь собрал воедино формальный аппарат нового исчисления и обработал его педагогически, подбирая необходимые примеры и задачи. Именно после создания первого учебника начинается массовое распространение новых идей и в следующем, 18-м столетии исчисление бесконечно-малых становится главным оружием математики. Дальнейшее его развитие связано с именами таких выдающихся ученых 18 века, как Эйлер, Лагранж, Клеро, Д.Бернулли, Лаплас, Даламбер, Лежандр, Риккати и многих других.

Остановимся на характерных чертах математики 18 века. Это – время, когда возможности математики, великая польза, которую она может принести государству, были осознаны государственными деятелями многих стран. В 18 веке математика развивается, в основном, в стенах Академий Наук - в Париже, Берлине, Петербурге, Лондоне. Именно в 18 веке появляются профессионалы-математики - люди, занимающиеся математикой, а не только ее преподаванием, как основной профессией и получающие за это занятие, как за решение конкретных задач, нужных государствам, так и за открытие новых математических зависимостей, деньги от правительства.

Характерна в этом отношении биография Эйлера. Леонард Эйлер родился в 1707 г. в Базеле (Швейцария) в семье пастора. В Базельском университете, который он посещал с 1720 г., он обратил на себя внимание преподававшего там Иоганна Бернулли. Блестяще окончив в 1724 г. университет, Эйлер имел желание остаться там преподавать, но возможности Швейцарии в отношении свободных вакансий на преподавательские должности были очень скромными, и Эйлер принял приглашение начать работу в Петербургской Академии Наук, куда, кстати, немного ранее переехали сыновья Иоганна Бернулли – Николай и Даниил. В Петербургской Академии Эйлер получил жалование – 300 рублей в год – и работал до 1741 г., когда он переехал в Берлин, в Берлинскую академию, где работал до 1766 г., оставаясь, впрочем, почетным членом Петербургской академии, в трудах которой регулярно печатались его труды. В 1766 г. Эйлера вторично, с большим почетом, уже на жалование в 3000 рублей в год, приглашают в Петербургскую академию, где он и работает до самой смерти в 1783 г., выполняя многочисленные важные поручения русского правительства.[5)]

Точно также и Жозеф Луи Лагранж (1736-1813) был членом Берлинской академии с 1759 г.; с 1766 г. он сменил Л. Эйлера в должности директора математического класса Берлинской академии, а в 1787 г. переехал в Париж, где стал членом Парижской академии.

Алексис Клод Клеро (1713-1765) был избран членом Парижской академии в 1731 г., еще в возрасте 18 лет, и работал в ней до самой смерти. Членом Парижской академии с 1741 г., (а с 1772 г. – ее непременным секретарем), был Жан Даламбер (1717-1783). С 1773 г. без перерыва работал в Парижской академии и Пьер Симон Лаплас (1749-1827).

Естественно, что правительства финансировали через Академии Наук прежде всего работы прикладного характера. Разделение математики на «чистую» и прикладную появляется в конце 18 века, когда в университетах появляются отдельные кафедры чистой математики и кафедры прикладной математики. Вообще чистая и прикладная математика тесно переплетаются между собой. До некоторой степени условно их можно разделить так: прикладная математика - это решение конкретных задач физики, техники и т.п. математическими средствами, а чистая математика – это исследование математических проблем самих по себе, без заранее намеченного конкретного применения (хотя решение абстрактной математической проблемы может в дальнейшем оказаться полезным при решении прикладных задач, – такие примеры в истории науки встречались нередко). Когда, например, Эйлер решал столь важную для морской практики задачу о зависимости усилия в канате, навиваемом на цилиндрический кнехт, от угла навивки (и получил знаменитую формулу $F = F_0 e^{\mu\theta}$, где μ - коэффициент трения, а θ - угол навивки), то он занимался прикладной математикой, а когда он суммировал ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ или доказывал, что уравнение $x^3+y^3=z^3$ не имеет решений в целых числах, то он работал в области чистой математики.

Математики 18 века – это, прежде всего прикладные математики. Все они много работали над решением прикладных задач и их теоретические работы возникали на основе обобщения этих решений. Тесная связь с практикой влияла на стиль и характер изложения математических работ того времени. Первостепенное внимание уделялось не строгости изложения, а получению новых результатов. Рассмотрим для примера, как Эйлер в первом томе своего «Введения в анализ бесконечных» (1748) находит разложения в ряды показательных функций (заметим, что вообще разложение в ряд являлось излюбленным приемом исследования для математиков 18 века). Вот каким путем выводит Эйлер знаменитый ряд $a^z = 1 + kz + \ldots$: «Так как $a^0 = 1$ и при возрастании показателя одновременно увеличивается значение степени, если только «a» больше единицы, то отсюда следует, что когда показатель бесконечно мало превышает нуль, то сама степень также бесконечно мало превзойдет единицу. Если «ω» будет числом бесконечно малым, то $a^{\omega} = 1 + \psi$, причем ψ также будет бесконечно-малым числом; положим ψ=kω, тогда,

$$a^{\omega} = 1 + k\omega,$$

а также

$$a^{i\omega} = (1 + k\omega)^{i}$$

какое бы число не подставить вместо i. Итак, будет

$$a^{i\omega} = 1 + \frac{i}{1}k\omega + \frac{i(i-1)}{2}k^2\omega^2 + \frac{i}{1}\frac{(i-1)}{2}\frac{(i-2)}{3}k^3\omega^3 + \ldots$$

Если положить $i = \dfrac{\omega}{z}$, где z обозначает какое-либо конечное число, то, так как ω - число бесконечно малое, число i будет бесконечно большим; но $\omega = \dfrac{z}{i}$, так что «ω» будет дробью с бесконечно-большим знаменателем, следовательно - бесконечно-малой, какой она и принята. Итак, подставим $\dfrac{z}{i}$ вместо ω; тогда будет

$$a^{z} = (1 + \frac{kz}{i})^{i} = 1 + kz + \frac{(i-1)}{1\cdot 2i}k^2z^2 + \frac{(i-1)(i-2)}{1\cdot 2i\cdot 3i}k^3z^3 + \ldots$$

Равенство это будет верным, если вместо i подставить бесконечно большое число, но тогда $\dfrac{i-1}{i} = 1$;

действительно, ясно, что чем большее число подставим вместо i, тем ближе значение дроби $\dfrac{i-1}{i}$ будет подходить к единице; если i станет больше всякого заданного числа, то дробь $\dfrac{i-1}{i}$ станет равна единице. Подобным же образом $\dfrac{i-2}{i} = 1; \dfrac{i-3}{i} = 1$ и так далее; отсюда следует, что

$\frac{i-1}{2i} = \frac{1}{2}; \frac{i-2}{3i} = \frac{1}{3}$ и так далее. Подставляя эти значения, получаем:

$$a^z = 1 + kz + \frac{k^2 z^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3 z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$$ и т.д. до бесконечности.

Это равенство вместе с тем показывает соотношение между числами а и к; действительно, если положить z =1, то будет

$$a = 1 + k + \frac{k^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$$

и если a =10, то приближенно k =2,30258».

Из этого отрывка видно, насколько свободно обращается Эйлер с бесконечными величинами и рядами, насколько далеки его методы от современных требований к строгости и, тем не менее, окончательные выводы Эйлера безусловно верны.

Иногда говорят, что «от ошибок Эйлера оберегала интуиция». Сами по себе эти слова верны. Надо лишь уточнить, что речь идет не об интуиции как о каком-то врожденном качестве, присущем Эйлеру от природы, интуиция Эйлера - это результат огромного количества реальных, расчетов, выполненных им, всесторонних проверок, которым он подвергал результаты своих расчетов.

Рассмотрим, для иллюстрации, одну работу Эйлера, на примере которой будет особенно ясен тот путь, на котором Эйлер и другие математики 18 века достигали правильных результатов.

Еще Я. Бернулли поставил задачу о вычислении суммы ряда обратных квадратов:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \qquad (4)$$

Однако задача оказалась трудной и самим Бернулли не была решена. Л.Эйлер для ее решения использовал новый метод, основанный на смелом предельном переходе от конечных полиномов к бесконечным степенным рядам.

Современникам Эйлера было хорошо известно, что если полином степени 2n имеет вид $b_0 - b_1x^2 + ...(-1)^n b_n x^{2n}$ и имеет 2n различных корней: $\beta_1; -\beta_1; \beta_2; -\beta_2; ...\beta_n; -\beta_n$, то его можно представить в виде:

$$b_0 - b_1x^2 + ...(-1)^n b_n x^{2n} = b_0(1 - \frac{x^2}{\beta_1^2})(1 - \frac{x^2}{\beta_2^2})...(1 - \frac{x^2}{\beta_n^2}),$$

причем коэффициент

$$b_1 = b_0(\frac{1}{\beta_1^2} + \frac{1}{\beta_2^2} + \frac{1}{\beta_3^2} + ...\frac{1}{\beta_n^2}). \tag{5}$$

Эйлер рассматривает функцию

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$

как «полином бесконечной степени», имеющий бесконечное число корней:

0; π; -π; 2π; -2π... и т.д.

Поделив на x, Эйлер переходит к полиному

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - ...,$$

имеющему корни: ±π; ±2π;…±nπ,

и по аналогии с конечными полиномами Эйлер заключает, что

$$\frac{\sin x}{x} = (1 - \frac{x^2}{\pi^2})(1 - \frac{x^2}{4\pi^2})(1 - \frac{x^2}{9\pi^2})...,\tag{6}$$

и тогда, с учетом равенства (5) имеем:

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + ...\frac{1}{n^2\pi^2}$$

откуда и следует

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{7}$$

Эйлер сам понимал, что его заключение о сумме ряда (4) "дерзко". Перенос свойств конечных полиномов на бесконечные степенные ряды мог привести и к ошибке, поэтому Эйлер счел необходимым многократно проверить свой метод и свой результат. Вот каковы были проверки, проделанные Эйлером:

1. Эйлер вычислил сумму (4) приближенно, с точностью до 6-го знака и нашел полное совпадение во всех знаках.

2. Пользуясь тем же методом исследования, но, сравнивая коэффициенты при x^2 в равенстве (6), Эйлер нашел сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$

и снова, вычисляя приближенно эту сумму прямым подсчетом, нашел полное совпадение до шестого знака.

3. Применяя тот же метод перехода от конечного полинома к бесконечному ряду для функции

$$1-\sin x = 1 - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \dots,$$

имеющей двойные корни, Эйлер нашел сумму ряда

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\dots=\frac{\pi}{4},$$

что совпало с уже известным результатом Лейбница. «Для нашего метода, - писал об этом совпадении Эйлер, - который некоторым может показаться недостаточно надежным, здесь обнаруживается великое подтверждение. Поэтому мы вообще не должны сомневаться в других результатах, выведенных тем же методом».

Однако Эйлер не жалел сил для дальнейших проверок своего метода:

4. Эйлер другим путем вычислил сумму ряда (4) и снова нашел, что $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. Совпадение результатов, получен-

ных двумя разными методами было дополнительным доводом в пользу их правильности.

5. Даниил Бернулли (1700-1782) обсуждая результат Эйлера, обратил внимание, что Эйлером не доказано отсутствие комплексных корней в уравнении sinx=0, наличие которых могло бы поставить под сомнение равенство (7). В ответ на эти сомнения Эйлер дополнительно доказал, что уравнение sinx=0 не может иметь комплексных корней.

Легко убедиться, что все проверки, проделанные Эйлером, не абсолютны: так, например, ясно, что из совпадения первых шести десятичных знаков суммы ряда (4) и числа $\frac{\pi^2}{6}$ еще не следует с абсолютной достоверностью, что совпадут и все остальные знаки; такие же замечания можно высказать и по поводу остальных пяти проверок. Но в целом проверки, проделанные Эйлером, обеспечивали (по выражению А.Н.Крылова) «ту разумную строгость, которая, избавляя от ошибок, сообщает непреложность выводам».

Проверки, проделанные Эйлером, для подкрепления достоверности вычисления суммы (4) с особенной ясностью проявляют характерную черту математики 18 века – преобладание прикладной математики, ее методов. Тщательные и многосторонние проверки - характерная черта прикладной математики (напомним еще раз, что прикладной математикой мы называем решение задач физики, техники и т.п. математическими средствами). Естественно, что в прикладной математике проверка окончательного результата необходима и именно она гарантирует, что задача решена правильно. Пример с суммой ряда (4) показывает, насколько глубоко проникнут Эйлер духом прикладной математики; он применяет ее методы прямых проверок даже к задаче чистой математики - суммированию ряда (4) - несмотря на то, что в области чистой математики любая прямая проверка только относительна; она повышает степень достоверности результата, не гарантируя сама по себе его абсолютной истинности. Эйлер это понимал и именно поэтому он не ограничивался одной единственной проверкой, а проверял свои результаты всесторонне, самыми различными методами.

В результате, как мы уже отмечали, практически все результаты Эйлера (за самыми ничтожными исключениями) оказались справедливыми.

Заметим, что математики девятнадцатого века в обеспечении достоверности своих результатов шли, как правило, по другому пути – они стремились обосновать свои выводы возможно более строгой дедукцией, а проверку результатов старались не вводить в публикуемый текст. Она оставалась как бы «за сценой». Вот почему так уникальны работы Эйлера. Они с наибольшей откровенностью вводят нас в творческую лабораторию математика, показывают нам не только как доказываются те или иные теоремы, но и как они создавались, путем каких догадок, проверок, отбраковки ошибочных догадок приходил к своим знаменитым теоремам Эйлер. В наше время новые математические результаты получают, собственно, таким же путем, но сейчас не принято писать о процессе своего творчества, публикуют только конечные результаты и поэтому столь полезно еще раз перечитать работы Эйлера. Многие (большинство) из них есть в русских переводах, (сам Эйлер писал большей частью на латыни – международном языке науки того времени).

Интересна и полемика, неоднократно вспыхивавшая между выдающимися математиками 18 века. В ходе научных дискуссий, которые так часто велись в 18 веке (гораздо чаще, чем в веке двадцатом) уточнялись понятия функции, тригонометрического ряда и т.п.

Заканчивая обзор развития математического анализа в 18 веке, заметим, что именно тогда в ходе прикладных исследований по механике, по астрономии, была получена основная часть тех результатов в области анализа и дифференциальных уравнений, которые используются в наше время в повседневной работе прикладного математика, и изучаются в ВУЗах. Почти все неопределенные интегралы, которые можно выразить через элементарные функции были найдены в 18 веке. 19 век здесь почти ничего не добавил. Почти все типы дифференциальных уравнений, которые можно проинтегрировать в элементарных функциях или в квадратурах также были найдены в 18 веке. Век 19 и здесь почти ничего не добавил – не потому, что в 19 веке дифференциальными уравнениями не интересовались, а потому что типов уравнений, интересуемых в квадратурах, немного и математики 18 века успели найти почти все. На долю 19 века выпали другие задачи.

Глава 4. Неевклидовы геометрии.

История математики 19 века настолько обширна и многообразна, что нет возможности систематически изложить даже основные ее разделы. В настоящей главе мы рассмотрим историю создания неевклидовых геометрий, поскольку это одна из интереснейших глав истории науки, и она раскрывает с особенной ясностью взаимосвязь между чистой и прикладной математикой.

Геометрия, разработанная древними греками - геометрия Евклида, - основывалась на следующих пяти допущениях (постулатах):

1. между любыми двумя точками можно провести прямую;
2. ограниченную прямую можно непрерывно продолжать по прямой;
3. из всякого центра любым раствором может быть описан круг;
4. все прямые углы равны между собой;
5. если прямая, пересекающая две прямые, образует внутренние односторонние углы, меньше двух прямых, то, продолженные неограниченно, эти две прямые встретятся с той стороны, где угол меньше двух прямых.

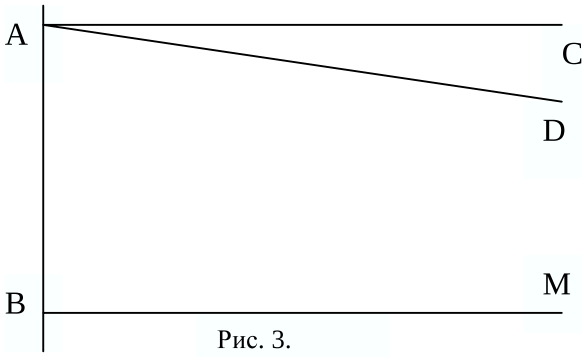

Рис. 3.

Из всех постулатов пятый постулат выделялся своей сложной формулировкой и недостаточной очевидностью. Он скорее напоминал теорему, и поэтому многие последователи и комментаторы Евклида считали, что пятый постулат может и должен быть доказан на основе других постулатов и аксиом Евклида (заметим, что в некоторых списках «Начал» постулаты и аксиомы не различаются и пятый постулат получает имя «одиннадцатой аксиомы»).

Так, в частности, греческий математик Прокл, живший в 5 веке нашей эры предложил следующее доказательство: пусть к прямой АВ (рис 3) проведены в точках А и В два перпендикуляра АС и ВМ, а через точку А - еще и наклонная АД. Тогда сумма внутренних углов ВАД и АВМ будет меньше двух прямых и, согласно пятому постулату, наклонная АД должна пересечься с перпендикуляром ВМ. Прокл доказывает это следующим образом: в различных точках прямой АС, все более удаляющихся от А, будем строить перпендикуляры к АС и продолжать их до пересечения с прямой АД. Длина этих перпендикуляров будет все время расти, поэтому рано или поздно, как считал Прокл, она превысит расстояние между точками А и В и тогда прямая АД пересечет прямую ВМ. Доказательство Прокла опирается на допущение, что расстояние точек одной из двух параллельных прямых до другой не может неограниченно возрастать. Но это допущение, как можно доказать, само эквивалентно пятому постулату Евклида.

Попытки доказать пятый постулат предпринимали очень многие математики: Сабит ибн Корра (9 век), Омар Хайям (1048-1131), Джон Валлис (1616-1703), Джироламо Саккери (1667-1733), Иоганн Ламберт (1728-1777), Адриан Лежандр (1752-1833), Фаркаш Бояи (1777- 1857) и многие другие. Никому из них доказательство не удалось. Незаметно для себя, они вводили в ходе доказательства новое допущение, равносильное пятому постулату, но также, как и он, не вытекающее из других аксиом и постулатов Евклида. Правда, работа этих математиков не пропала даром. Стало очевидным, что пятому постулату эквивалентны, например, такие допущения:

1. Сумма внутренних углов треугольника равна двум прямым углам.
2. На плоскости через точку, лежащую вне прямой проходит только одна параллельная к этой прямой (в современном школьном курсе геометрии именно в этой форме и записывается пятый постулат).
3. Существуют подобные треугольники.
4. Не существует наибольшего треугольника, т.е. треугольника, площадь которого нельзя было бы увеличить.

Потерпев неудачу в прямых попытках доказательства пятого постулата, многие математики предпринимали попытки доказать его «от противного» - т.е. ввести предположение, обратное пятому постулату - например, предположение, что сумма углов треугольника не равна двум прямым углам - и выводя из этого предположения следствия, показать, что они противоречат остальным постулатам и аксиомам. По этому пути шел, в частности, Джироламо Саккери. Довольно быстро он доказал, что предположение: «сумма углов треугольника больше двух прямых» действительно приводит к противоречию с остальными постулатами. Тогда он стал исследовать следствия из предположения «сумма углов треугольника меньше двух прямых». Следствия оказались исключительно запутанными и сложными; на какой-то момент Саккери показалось, что он нашел противоречие и доказал тем самым пятый постулат; затем обнаружилась ошибка в рассуждениях ...

Много сил отдал доказательству пятого постулата венгерский математик Фаркаш Бояи. Когда в 1820 г. его сын Янош заинтересовался этой же проблемой, он с ужасом писал сыну: «Ты не должен пытаться одолеть теорию параллельных линий. Я знаю этот путь, я проделал его до конца, я прожил эту бесконечную ночь, и весь свет, всю радость моей жизни я там похоронил. Молю тебя, оставь в покое учение о параллельных линиях; оно лишит тебя здоровья, досуга, покоя, оно погубит счастье твоей жизни. Этот глубокий бездонный мрак может поглотить тысячу таких гигантов, как Ньютон', это ужасная вечная рана в моей душе; да хранит тебя бог от этого увлечения, которое так сильно овладело тобой. Оно лишит тебя радости не только в геометрии, но и во всей земной жизни...

Учись на моем примере: из-за того, что я хотел постичь теорию параллельных линий, я остался безвестным. Это отняло у меня всю мою кровь, все мое время... Если бы я мог открыть загадку параллельных линий, пусть об этом никто бы не узнал, я стал бы ангелом... Непостижимо, что в геометрии существует эта непобежденная темнота, этот вечный мрак, туча, пятно на девственной, нетронутой истине... Дальше геркулесовы столпы, ни шагу дальше, или ты погибнешь!».

Так писал Ф.Бояи в 1820 г. А в 1829 г. Николай Иванович Лобачевский опубликовал работу, в которой древняя проблема пятого постулата получила новое, революционное решение: Лобачевский утверждал, что пятый постулат доказать нельзя, и что если принять, что сумма углов треугольника меньше двух прямых углов, мы придем к новой геометрии, отличной от геометрии Евклида, но имеющей такое же право на существование, как и евклидова. Правда, теоремы новой геометрии необычны. Вот некоторые из них:

1. В пространстве существует абсолютная единица длины, равная «k»;
2. Существует треугольник наибольшей площади, его площадь равна πk^2;

3. Не существует подобных фигур, в частности - и подобных треугольников;
4. Если разные треугольники с тремя равными сторонами не равны между собой, то их углы не равны;
5. Чем больше треугольник, тем меньше сумма его углов;
6. Сумма углов треугольника (в радианах) равна π-ω, где ω - «дефект», причем $0<\omega\leq\pi$; площадь треугольника может быть выражена через его дефект, а именно $S = k^2\omega$ (откуда, кстати, и вытекает существование треугольника наибольшей площади: при $\omega=\pi$ его площадь будет равна $k^2\pi$, этот треугольник будет обобщенным или несобственным, все три вершины его удалены в бесконечность);
7. Для прямоугольных треугольников несправедлива теорема Пифагора, вместо нее имеет место равенство:

$$ch\frac{c}{k} = ch\frac{a}{k}ch\frac{b}{k} \qquad (1)$$

и квадрат гипотенузы больше суммы квадратов катетов.

Несмотря на все своеобразие геометрии Лобачевского, различие между нею и эвклидовой обнаруживается лишь на расстояниях, больших по сравнению с «абсолютной длиной» «k». Так, если стороны треугольника «a», «b», «c» малы в сравнении с «k», то, разложив $ch\frac{a}{k};ch\frac{b}{k};ch\frac{c}{k}$ в ряды и удерживая первые два члена, получаем из формулы (1) с точностью до членов четвертого порядка малости (т.е. членов вида $\left(\frac{a}{k}\right)^4,\left(\frac{b}{k}\right)^4,\left(\frac{c}{k}\right)^4$) следующее равенство:

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad (2)$$

-т.е. для треугольников, размеры которых малы в сравнении с «k» выполняются с очень хорошей точностью обычные теоремы эвклидовой геометрии, в том числе и теорема Пифагора. В то же время, опираясь на астрономические наблюдения, Лобачевский доказал, что постоянная «k», если она существует, очень велика; она не может быть меньше, чем сто тысяч диаметров земной орбиты. Таким образом, для практических целей можно пользоваться как геометрией Эвклида, так и геометрией Лобачевского, и обе они имеют право на существование.

Расскажем теперь коротко о жизни основателя новой геометрии - Николая Ивановича Лобачевского.

Он родился в 1792 г. в Нижнем Новгороде, в семье уездного землемера. Рано лишившись отца, он с 1802 г. «на казенном коште» учился в Казанской гимназии, затем - в Казанском университете, тоже на «казенном коште», т.е. собственно, почти на казарменном положении. Время было суровое, и свободолюбивый характер молодого студента Лобачевского не раз навлекал на него неприятности. В «шнуровой книге» университета сохранилась запись, что Лобачевский «в значительной мере явил признаки безбожия». Это грозило отдачей в солдаты. Спасло лишь заступничество профессоров.[6)] Учился Лобачевский блестяще, и уже в 1816 г. стал профессором в том же Казанском университете, который он кончил за пять лет до того.

Первые годы профессорства Лобачевского были омрачены появлением в Казани Магницкого, известного реакционера. Обследовав университет, этот враг науки предложил императору Александру 1 «публично разрушить» Казанский университет, ибо, по его мнению, университет «причиняет общественный вред»... На разрушение университета Александр 1 все же не решился. "Зачем разрушать, - писал он Магницкому, - лучше исправить» - и в целях исправления назначил Магницкого попечителем. Новый попечитель не ограничился тем, что выгнал лучших профессоров. Были изъяты скелеты из анатомического театра медицинского факультета, их отпели в церкви и зарыли на кладбище. В такой обстановке начинал свою работу Лобачевский.

Мы потому останавливаемся на этих моментах его биографии, что они не остались без влияния и на его научную деятельность. Именно суровая юность и прошедшая в тяжелой борьбе с Магницким молодость выработала в Лобачевском тот железный, несгибаемый характер, который был так необходим творцу новой геометрии. Трудностей на его пути было немало. С Магницким, правда, удалось справиться: реакционер проворовался и новым императором Николаем 1 был снят. В 1827 г. Лобачевского избрали ректором университета; он пробыл на этом посту до 1846 г. Уже в 1826 г. он сделал на заседании факультета доклад «Сжатое изложение начал геометрии», а в 1829 г., в «Казанском вестнике» была опубликована работа Лобачевского «О началах геометрии». Это была первая в мире, опубликованная работа по неэвклидовой геометрии. В ней и в последующих работах Лобачевского давался вывод основных теорем новой геометрии, оценка «дефекта» треугольников и возможного значения постоянной «k» из астрономических наблюдений; давалось применение новой геометрии к вычислению некоторых определенных интегралов.

В 1832 г. работа Лобачевского была послана на отзыв в Академию наук, где попала к знаменитому русскому математику академику М. В. Остроградскому (1801-1861). Остроградский дал отрицательный отзыв. Он отметил тяжелый стиль изложения (что, кстати, справедливо); указав, что предположение о том, что сумма углов в треугольнике меньше двух прямых углов прилагается Лобачевским к вычислению определенных интегралов, Остроградский заметил, что один из этих интегралов легко получить классическим путем, а другой неверен.

Поскольку отзыв М. В. Остроградского сыграл роковую роль в судьбе Лобачевского, необходимо остановиться на этом отзыве более подробно. М. В. Остроградский - выдающийся математик, человек, оставивший заметный след в истории математики, его нельзя обвинить ни в пристрастии, ни в некомпетентности. Его ошибка в том, что к труду Лобачевского он подошел как к работе по прикладной математике, обратив основное внимание на помощь новой геометрии в вычислении некоторых определенных интегралов. И Остроградский был прав в том, что уж если говорить только об интегралах, то их, конечно, можно вычислить много проще, не прибегая к построению целой новой геометрии. Однако Остроградский не заметил самого главного в работе Лобачевского - того, что эта работа относится не к прикладной, а к чистой математике и прокладывает в этой области новые пути.

Короче, ошибка Остроградского заключалась в том, что он к работе, посвященной чистой математике, применил критерий ценности прикладной математики.

Пример Остроградского показывает, что этого ни в коем случае нельзя делать. Нельзя к исследованиям по прикладной математике применять критерии чистой математики. Нельзя поступать и наоборот.

Через два года после отзыва Остроградского в журнале «Сын отечества», который издавали известные доносчики и агенты Третьего отделения Булгарин и Греч, была помещена (анонимно) откровенно издевательская статья о Лобачевском. Вот отрывок из нее: «...даже трудно было бы понять и то, каким образом г. Лобачевский из самой легкой, самой ясной в математике науки, какова геометрия, мог сделать такое тяжелое, такое темное и непроницаемое учение, если бы он сам отчасти не надоумил нас, сказав, что его Геометрия отлична от употребительной, которой мы все учились и которой, вероятно, уже разучиться не можем, а есть только воображаемая. Да, теперь все понятно. Чего не может представить воображение, особливо живое и вместе уродливое? Почему не вообразить, например, черное белым, круглое четырехугольным, сумму всех углов в прямолинейном треугольнике меньше двух прямых? Очень, очень можно, хотя для разума все это и непонятно».

Лобачевский послал в журнал ответ на эту статью; журнал отказался опубликовать его. Лобачевский, как ректор, обратился к министру народного просвещения, который приказал поместить ответ. Однако Булгарин и Греч, сотрудничающие с всесильным Третьим отделением, имели возможность пренебречь и приказом министра. Тогда Лобачевский опубликовал ответ в «Ученых записках Казанского университета» в 1835 г. В том же году он напечатал еще одну работу – «Воображаемая геометрия», в 1836 г. – «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам», в 1838 г. – «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных». Лобачевский печатается и за границей: в 1837 г. в журнале Крелле на французском языке публикуется «Воображаемая геометрия», а в 1840 г. в Германии в издательстве Финке отдельной книгой выходят «Геометрические исследования» на немецком языке. Наконец, в 1855 г., уже больной и ослепший, Лобачевский диктует свой последний труд – «Пангеометрия», а в следующем году он выходит во французском переводе.

Так упорно и целеустремленно пропагандировал Лобачевский свои идеи о новой геометрии. И все же до последних лет жизни он оставался одинок.

А между тем неэвклидовой геометрией занимался не он один. В Венгрии по тому же пути шел Янош Бояи (1802-1860), сын математика Фаркаша Бояи, о котором мы уже говорили. (Заметим, что фамилии этих математиков на венгерском языке пишутся так: «Bolyai», но их произношение русскими буквами передается по-разному. Так, К. А. Рыбников в «Истории математики (издат. МГУ, 1994 г.) пишет «Больяи», в «Математическом энциклопедическом словаре» 1988 года дается написание «Бойаи», в издании

«Математика 19 века» под редакцией А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича и в «Кратком очерке истории математики» Д. Я. Стройка используется написание «Бояи», которому мы и следуем. Разумеется, во всех случаях речь идет об одних и тех же людях). Полное ужаса письмо Фаркаша Бояи, узнавшего, что и его сын заинтересовался пятым постулатом, мы цитировали. Однако сын продолжал заниматься теорией параллельных и в 1832 году Фаркаш Бояи согласился напечатать как приложение к своему учебнику небольшую работу Яноша: «Приложение, содержащие науку о пространстве абсолютно истинную, не зависящую от истинности или ложности одиннадцатой аксиомы Эвклида (что a priori никогда решено быть не может)».

В этом «Приложении» (по латыни «Appendix» - под этим именем работа Яноша и вошла в историю науки) были кратко изложены основные положения неэвклидовой геометрии. В первую очередь Янош послал свою работу на отзыв великому Гауссу - старому другу своего отца. Ответ Гаусса, адресованный его отцу, глубоко поразил молодого ученого: «Я не должен хвалить ее, - писал Гаусс о работе Яноша, - хвалить ее значило бы хвалить самого себя; все содержание этой работы, путь по которому твой сын пошел и результаты, которые он получил, почти сплошь совпадают с моими собственными достижениями, которые частично имеют давность в тридцать, тридцать пять лет... Я имел намерение о своей работе, кое-что из которой я уже нанес на бумагу, при жизни ничего не публиковать».

Ответ Гаусса обескуражил Яноша Бояи. Одиночество, непризнание привели его постепенно к тяжелой моральной депрессии. Больше по неэвклидовой геометрии он ничего не публиковал - до самой смерти в 1860 году. Только в 1848 году познакомился он с работами Лобачевского (с книгой «Геометрические исследования», на немецком языке). Сохранились записи Я. Бояи, показывающие, что он был внимательным читателем и критиком - но Лобачевскому он ничего не написал. А Лобачевскому, по-видимому, осталась неизвестной единственная работа Я. Бояи. Пути этих двух творцов неэвклидовой геометрии не пересеклись - и это было трагедией для обеих.

Перейдем теперь к третьему из творцов неэвклидовой геометрии - к великому немецкому математику Карлу Фридриху Гауссу (1777-1855). Он родился в семье мастера - водопроводчика, в мелком немецком княжестве Брауншвейг. Блестящие математические способности он проявил с раннего детства, а первое выдающееся открытие опубликовал в девятнадцать лет, в 1796 году, еще будучи студентом Геттингенского университета. Гаусс доказал, что циркулем и линейкой можно построить правильный семнадцатиугольник - это было первым существенным продвижением в задаче о построении правильных многоугольников со времен древних греков. Юношеское открытие оставалось всю жизнь любимой работой Гаусса. И на надгробном памятнике он завещал выгравировать вписанный в круг правильный семнадцатиугольник. Всемирную славу принесла Гауссу работа по определению орбиты планеты по малому числу наблюдений. Интересна история этого открытия. В первую ночь нового 19 века, (01 января 1801 г), итальянский астроном Пиацци (1746-1826) случайно открыл новую планету (ее потом назвали Церерой). Он наблюдал ее девятнадцать раз, затем облачная погода заставила сделать перерыв в наблюдениях, а после перерыва планета исчезла. Сделанных наблюдений было мало для вычисления орбиты планеты, а без этого вычисления было почти невозможно отыскать планету вновь. Попытки ряда математиков и астрономов вычислить орбиту по наблюдениям Пиацци не приводили к успеху, пока за решение не взялся Гаусс. Он разработал новый метод вычисления орбиты, предсказал положение Цереры, и 31 декабря

1801 года она была открыта вновь именно на месте, предсказанном Гауссом!

Но и после этого великого открытия, за которым последовало множество других, Гаусс оставался на скромном положении приват-доцента.

Только после того, как Петербургская Академия наук пригласила Гаусса в Россию, герцог Брауншвейгский, опасаясь потерять столь выдающийся талант, назначил Гауссу жалованье в 400 талеров в год. После этого Гаусс отказался от переезда в Россию; в 1807 году он стал профессором Геттингенского университета и директором астрономической обсерватории, что, наконец, обеспечило его материально. С годами слава Гаусса неуклонно возрастала. К 1820 году он уже считался признанным «королем» математиков.

Еще с юных лет Гаусс интересовался пятым постулатом Эвклида и возможностью его доказательства. Не раз обсуждал он эту проблему со своим другом Фаркашем Бояи. Примерно к 1817 году у Гаусса сложилось убеждение, что пятый постулат недоказуем и возможна новая геометрия, построенная на его отрицании (Высказано это было в письме к астроному В.Ольберсу). В 1824 году Франц Тауринус, юрист по образованию и математик по склонности души, написал Гауссу о заинтересовавших его любопытных выводах, вытекающих из допущения, что сумма углов треугольника меньше 180 градусов. Гаусс ответил Тауринусу замечательным письмом:

«Допущение, что сумма трех углов треугольника меньше 180 градусов приводит к своеобразной, полностью отличной от нашей (эвклидовой) геометрии; эта геометрия совершенно последовательна, и я развил ее для себя абсолютно удовлетворительно; я имею возможность в этой геометрии решить любую задачу, за исключением определения некоторой постоянной, значение которой иначе как из опыта установлено быть не может. Чем большее значение придадим мы этой постоянной, тем ближе подойдем к эвклидовой геометрии, а бесконечно большое ее значение приведет обе системы к совпадению. Теоремы этой геометрии отчасти кажутся парадоксальными и непривычному человеку даже несуразными, но при строгом и спокойном размышлении оказывается, что они не содержат ничего невозможного. Так, например, все три угла треугольника можно сделать сколь угодно малыми, если только взять достаточно большие стороны; площадь же треугольника не может превысить некоторого предела, как бы велики не были стороны. Все мои старания найти в этой неэвклидовой геометрии противоречия или непоследовательности оставались бесплодными, и единственно, что в этой системе противится нашему разуму, это то, что в пространстве, если бы эта система была справедлива, должна была бы существовать некоторая сама по себе определённая (хотя нам и неизвестная) линейная величина. Но мне кажется, что мы, кроме ничего не выражающей словесной мудрости метафизиков, знаем очень мало или даже ничего не знаем о сущности пространства; мы не можем смешивать то, что нам представляется неестественным, с абсолютно невозможным. Если бы неэвклидова геометрия была истинной, и упомянутая выше постоянная находилась в определенном отношении к таким величинам, которые доступны нашему измерению на небе или на земле, то ее можно было бы определить из опыта. Я поэтому иногда в шутку высказывал пожелания, чтобы эвклидова геометрия не была истинной, ибо мы тогда имели бы абсолютную меру длины».

Это письмо показывает, что Гаусс действительно владел основными идеями неэвклидовой геометрии. Но он ничего не публиковал. Более того, в конце письма к Тауринусу, он предупреждает, что письмо его не должно быть опубликовано (оно стало известно лишь после смерти Гаусса).

Мы уже описывали, как отнесся Гаусс к работе Яноша Бояи, и какую роковую роль его ответ сыграл в судьбе Яноша. Но это - человеческая слабость Гаусса. Он не любил спешить с публикацией своих исследований, но если кто-либо другой публиковал первым свои результаты в тех областях, над которыми работал Гаусс, он упорно подчеркивал свой идейный приоритет. За это он получил однажды отповедь от Лежандра: «Не существует открытия - пишет Лежандр, - которое нельзя было бы приписать себе, сказав, что те же вещи были найдены на несколько лет раньше; но если не дано этим словам доказательства состоящего в указании места, где они опубликованы, то это утверждение становится беспредметным и представляет собой только обиду для истинного автора открытия.

В математике случается очень часто, что находят те же самые вещи, которые уже были открыты другими и которые уже известны; подобное случалось со мной много раз, но я никогда не упоминал о них и не называл «нашим принципом» принцип, который другой опубликовал раньше меня». (Эти совершенно правильные слова Лежандра полезно помнить и в наше время).

Прочел Гаусс и работы Лобачевского (прежде всего - книгу «Геометрические исследования», опубликованную на немецком языке в 1840 г.). Он даже изучает русский язык, чтобы читать Лобачевского в оригинале. Он осыпает его похвалами в письмах к друзьям, он намеревается написать Лобачевскому. Но письмо остается ненаписанным. Нигде публично о неэвклидовой геометрии Гаусс не высказывается, а главное - он ничего не публикует.

Почему Гаусс не опубликовал ничего по неэвклидовой геометрии? Иногда на этот вопрос дают очень прямолинейный ответ: все дело в том, что Гаусс боялся нападок консервативно настроенных ученых, чьи привычные представления о геометрии он разрушил бы своей публикацией. Нет, такой ответ слишком принижает Гаусса и не вяжется с его жизнью. Не боялся же Гаусс публиковать другие свои открытия, не менее великие и революционные, чем неэвклидова геометрия.

Я думаю, что дело здесь в другом. Действительно, вспомним, с чего начинались исследования по неэвклидовой геометрии и Лобачевского, и Бояи, и Гаусса? Началось все с попыток показать, что следствия из отрицания пятого постулата Эвклида приведут к противоречию, и пятый постулат будет тем самым доказан. Вместо противоречия перед ними возникало величественное здание неэвклидовой геометрии, возникали новые, интересные и парадоксальные теоремы. Развивая их, можно было идти вперед и вперед, видимого противоречия не возникало. Но, может быть, противоречие запрятано глубже? Может быть, при дальнейшем развитии оно проявится, и тогда пятый постулат будет доказан, а вся неэвклидова геометрия окажется фикцией, заблуждением? Можно ли публиковать исследования по неэвклидовой геометрии, если не доказана ее непротиворечивость? Мне кажется, что именно такое сомнение и было истинной причиной отказа Гаусса от публикаций.

Надо отметить, что Янош Бояи в своей первой работе еще не думал о доказательстве непротиворечивости неэвклидовой геометрии, а в дальнейшем он отошел, как известно, от работы над ней. Лобачевский, в отличие от Бояи, понимал необходимость доказательства непротиворечивости, и ему казалось, что он такое доказательство нашёл. Однако более подробный анализ показывает, что доказательства Лобачевского не были полными и непротиворечивость не доказывали. Надо отметить, правда, что неполнота доказательств непротиворечивости современниками Лобачевского не была замечена, и самому Лобачевскому они казались убедительными. Гаусс в этом отношении был критичнее. Вообще в творчестве Гаусса, жившего на стыке 18 и 19 веков, наблюдается уже перелом от «более вольного» стиля 18 века к скрупулезной строгости чистой математики девятнадцатого столетия. Надо заметить, что Гаусс работал как в области чистой математики, так и в математике прикладной. В работах по прикладной математике Гаусс не стремился к строгости; он применял, например, разложения в ряды не доказывая даже их сходимости. Он поступал так потому, что в прикладных задачах он мог проверить справедливость решения сравнением с экспериментом. Другое дело – чистая математика. Здесь критерий истинности совсем другой. Единственным критерием истинности в чистой математике, считал Гаусс, является отсутствие противоречий, и Гаусс не жалел сил для доведения доказательств чистой математики до наибольшей доступной ему степени строгости.

Знаменитую теорему о том, что любое алгебраическое уравнение имеет хотя бы один корень, он доказывал 50 лет, и дал четыре варианта доказательства (в 1799, 1815, 1816 и 1849 годах).

Можно ли доказать истинность неэвклидовой геометрии опытным путем, прямым экспериментом? Гаусс пытался это сделать в 1828 году, когда в ходе геодезической съемки он с наивысшей возможной степенью точности измерил углы треугольника между вершинами трех отдаленных гор и убедился, что сумма его углов равна 180 градусов, а возможное отклонение заведомо меньше, чем ошибки измерения. Заметим теперь, что астрономические наблюдения параллаксов звезд, которые анализировал Лобачевский, вообще не могут дать принципиального ответа на вопрос об истинной сумме углов треугольника, поскольку в этом случае измеряются не три угла треугольника, а два. Астрономические наблюдения могут дать только верхнюю оценку возможного отклонения («дефекта») суммы углов треугольника от двух прямых углов, и Лобачевский показал, что даже для треугольника со сторонами, разными диаметру орбиты земли, это отклонение не превзойдет 3,72 $\cdot 10^{-4}$ секунды дуги.

Следовательно, вопрос об истинности или противоречивости неэвклидовой геометрии не мог быть разрешен опытным путем и для уверенности в истинности неевклидовой геометрии надо было доказать ее непротиворечивость. Гаусс не видел путей к доказательству непротиворечивости - и именно этим, по-видимому, объясняется его нежелание публиковать свои результаты.

Однако история математики показала, что воздержание Гаусса от публикаций и публичных выступлений и его чрезмерная забота о строгости были ошибочны. Публикации работ Лобачевского (хотя в них и не было строгого доказательства непротиворечивости) постепенно заинтересовали математиков мира и в 1868 году, уже после смерти и Гаусса (1855 г.), и Лобачевского (1856 г.), и Бояи (1860 г.) итальянский математик Бельтрами (1835-1900) доказал непротиворечивость неевклидовой геометрии Лобачевского (точнее, Бельтрами доказал, что неевклидова геометрия в такой же степени непротиворечива, как и евклидова). Бельтрами стал рассматривать поверхности постоянной отрицательной кривизны, – например, поверхности, образованные вращением трактрисы вокруг оси абсцисс. Для геодезических кривых на этой поверхности выполняется геометрия Лобачевского. В 1871 году еще одно доказательство непротиворечивости нашел Феликс Клейн (1849-1925).

Однако еще до открытия Бельтрами непротиворечивости геометрии Лобачевского новые идеи в обосновании геометрии были выдвинуты немецким математиком Бернгардом Риманом (1826-1866). Б. Риман родился в Ганновере, в бедной пасторской семье, учился в Геттингенском и

Берлинском университетах. В 1851 году он завершает диссертацию «Основы общей теории функций комплексного переменного», и в эти же годы интенсивно работает над проблемой обоснования геометрии. Риман добивается места преподавателя университета, что дало бы ему хоть какое-то материальное обеспечение. По правилам того времени, соискатель должен был прочитать пробную лекцию перед профессорами университета. Соискатель приготовлял три темы – совет университета утверждал одну из них. Из трех тем, предложенных Риманом, совет Геттингенского университета (возможно, не без влияния Гаусса) утвердил третью – «О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии». И вот 10 июня 1854 года, в присутствии Гаусса, Риман прочел свою «пробную лекцию» (напечатана она была лишь двенадцать лет спустя).

Судя по краткому обзору истории вопроса, сделанному Риманом в начале лекции, он не был знаком с работами Лобачевского и Бояи. Не были известны ему и мысли Гаусса, к этому времени еще не опубликованные. Тем замечательнее глубина и самостоятельность мысли Римана. Вот начало его «пробной лекции»: «Общеизвестно, что геометрия предполагает заданным как понятие пространства, так и первые основные положения, которые нужны для выполнения пространственных построений. Она дает номинальные определения понятий (Риман, очевидно, имеет в виду такие определения Евклида, как «линия есть длина без ширины»), тогда как существенные свойства определяемых объектов входят в форме аксиом. При этом взаимоотношение между этими предпосылками остается невыясненным: не видно, является ли, и в какой степени, связь между ними необходимой; не видно так же, a priori (до опыта), возможна ли такая связь. Начиная от Евклида и кончая Лежандром (я называю наиболее выдающегося из новейших исследователей основ геометрии) ни математиками, ни философами упомянутые неясности не были устранены». (Из этой фразы как раз и можно сделать заключение, о котором мы уже говорили, что с работами Лобачевского и Бояи Риман не был знаком). Далее Риман продолжает: «Причина этому обстоятельству, как полагаю, заключается в том, что общая концепция многократно протяженных величин, к которым относятся и пространственные величины, оставалась вовсе не разработанной.

В связи с этим я поставил перед собой задачу: исходя из общего понятия о величине, сконструировать понятие многократно протяженной величины. Мы придем к заключению, что в многократно протяженной величине возможны различные мероопределения; необходимым следствием явится то, что предложения геометрии не выводятся из общих свойств протяженных величин; напротив, те свойства, которые выделяют пространство из других мыслимых трижды протяженных величин, могут быть почерпнуты не иначе, как из опыта.

Возникает задача установить, из каких простейших допущений вытекают метрические свойства пространства - задача, естественно, не вполне определенная, так как не исключено, что возможны несколько систем простых допущений …Важнейшая из них… есть система, положенная в основу геометрии Евклидом. Допущения, о которых идет речь, не являются (как и всякие допущения) необходимыми; достоверность их носит эмпирический характер; они – не что иное, как гипотезы. Их правдоподобие... надлежит подвергнуть исследованию, и затем судить о том, могут ли они быть распространены за пределы наблюдения как в сторону неизмеримо большого, так и в сторону неизмеримо малого».

Одним из наиболее ярких следствий идей Римана была возможность многих неевклидовых геометрий и в частности – геометрии, в которой пятый постулат Евклида заменен допущением: «сумма углов треугольника больше двух прямых». Эту геометрию сейчас называют геометрией Римана. В свое время еще Саккери доказал противоречие предположения о том, что сумма углов треугольника больше двух прямых с остальными постулатами Евклида. Поэтому геометрия Римана - в отличие от геометрии Лобачевского - отвергает не только пятый постулат Евклида. Первый постулат Евклида – «между двумя точками можно провести прямую и притом только одну» заменяется на новый: «существуют точки, между которыми можно провести бесчисленное множество прямых, не совпадающих между собой». Исходя из этих новых постулатов, в геометрии Римана можно доказать ряд теорем, столь же своеобразных, как и в геометрии Лобачевского (и в некотором отношении похожих на теоремы геометрии Лобачевского). Вот некоторые из теорем геометрии Римана:

1. Параллельных прямых не существует. Любые две прямые пересекаются в двух точках, расстояние между которыми конечно.

2. Не существует подобных фигур. Если у двух треугольников не равны стороны, то не могут быть равны и углы.

3. Теорема Пифагора несправедлива. Квадрат гипотенузы меньше суммы квадратов катетов.

4. Сумма углов треугольника (в радианах) равна $\pi+\varepsilon$, где $\varepsilon>0$; сумма углов тем больше, чем больше площадь треугольника. Площадь треугольника может быть выражена формулой: $S=\xi^2\varepsilon$, где ξ - некоторая абсолютная единица длины.

5. Существует треугольник наибольшей площади.

Для геометрии Римана – в отличие от геометрии Лобачевского – легко найти наглядную интерпретацию. Рассмотрим сферу радиуса ξ. На сфере геодезическими линиями (кратчайшими расстояниями между двумя точками) являются дуги больших кругов. Если эти дуги назвать «прямыми линиями», то для этих «прямых» будет выполняться геометрия Римана. В необычных на первый взгляд теоремах геометрии Римана можно при такой интерпретации узнать известные формулы сферической тригонометрии. Действительно, как известно, на сфере большие круги всегда пересекаются в двух точках; подобных сферических треугольников не существует; сумма углов сферического треугольника равна $\pi+\varepsilon$, площадь его равна $\xi^2\varepsilon$, где ξ – радиус сферы и площадь любого сферического треугольника конечна при конечном радиусе сферы ξ.

Таким образом, теоремы геометрии Римана легко интерпретируются и, следовательно, она столь же непротиворечива, как и геометрия Евклида.

Правда, из геометрии Римана вытекает на первый взгляд парадоксальное следствие: получается, что пространство конечно. Однако Риман еще в своей «пробной лекции» четко заявил: «При распространении пространственных представлений в направлении неизмеримо большого следует различать свойства неограниченности и бесконечности: первое есть свойство протяженности, второе - метрическое свойство... Неограниченности пространства свойственна гораздо большая эмпирическая достоверность, чем какому бы то ни было другому продукту внешнего восприятия. Но отсюда никоим образом не следует бесконечность пространства: напротив, если мы припишем пространству постоянную меру кривизны, то придется допустить конечность пространства, как бы ни мала была мера кривизны, лишь бы она была положительной».

Отметим, что из идей Римана вытекает возможность существования многих неевклидовых геометрий; простейшими из них являются геометрии с постоянной кривизной пространства; если кривизна меньше нуля, то приходим к геометрии Лобачевского, если кривизна равна нулю – к геометрии Евклида, если кривизна положительна – к геометрии Римана.

Настоящий триумф идеям Римана принес двадцатый век, когда общая теория относительности Эйнштейна (1879-1955) провозгласила, что геометрия нашего мира является неевклидовой и кривизна пространства зависит от средней плотности масс в наблюдаемой нами части Вселенной. В настоящее время оценки для средней плотности масс еще недостаточно точны для того, чтобы с полной определенностью утверждать – геометрии Лобачевского или геометрии Римана подчиняется окружающий нас мир, но со временем, безусловно, это будет установлено и уточнено.

Мы не знаем, предугадывал ли все это Риман, но в конце его «пробной лекции» стоят следующие пророческие слова, как будто намекающие на появление в будущем теории относительности: «решение этих вопросов (о метрике пространства) можно надеяться найти лишь в том случае, если исходя из ныне существующей и проверенной опытом концепции, основа которой положена Ньютоном, станем постепенно ее совершенствовать, руководясь фактами, которые ею объяснены быть не могут. Такие исследования, как произведенные в настоящей работе, а именно исследования, имеющие исходным пунктом общие понятия, служат лишь для того, чтобы движению вперед и успехам в познании связи вещей не препятствовали ограниченность понятий и укоренившиеся предрассудки.

Здесь мы стоим на пороге области, принадлежащей другой науке - физике, и переступать его не даёт нам повода сегодняшний день». Этими словами заканчивается «пробная лекция» Римана. Прочитана она была в 1854 году, опубликована – в 1868 году.

Рассмотрим теперь - что нового внесли в понимание математики и окружающего нас мира неевклидовы геометрии. Прежде всего, они разрушили идеалистические представления (восходящие еще к Платону) о том, что геометрия является умозрительной наукой, которая исходит из очевидных аксиом и безукоризненно строго приходит к более достоверным и точным знаниям о мире, чем это может дать эксперимент. Поясним сказанное примером. Наверняка еще Платон подметил, что при измерении земными, конечной точности, инструментами гипотенуз и катетов треугольника, мы не получим идеально-точного равенства: квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. В зависимости от точности инструмента мы будем получать либо $a^2+b^2>c^2$, либо $a^2+b^2<c^2$. Из этого Платон сделал вывод, что измерение и эксперимент вообще являются принципиально неполными, неточными, а в целом – недостоверными средствами познания мира по сравнению с логическим рассуждением и строгой дедукцией. Только дедукция, по Платону, позволяет делать точные выводы и утверждать, что если угол между сторонами в точности прямой, то выполняется точное равенство $a^2+b^2=c^2$. Неевклидовы геометрии показали, что возможны различные системы аксиом, причем из одной системы аксиом следует, что $a^2+b^2<c^2$ (геометрия Лобачевского), из другой - что $a^2+b^2=c^2$ (геометрия Евклида), из третьей – что $a^2+b^2>c^2$ (геометрия Римана). Ответ на вопрос о том, какое же из трех соотношений между a^2,b^2,c^2 соответствует реальности, может дать только опыт, практика. Подчеркнем, однако, что слова «опыт», «практика» надо понимать не в конкретно-эмпирическом смысле, а как обобщенную практику человечества. Не нужно понимать дело так, что для проверки - какое из трех соотношений - $a^2+b^2>c^2$, $a^2+b^2=c^2$, $a^2+b^2<c^2$ – соответствует реальному миру надо измерять стороны конкретных треугольников. На этом пути мы заведомо ничего не достиг-

нем. Имеющиеся оценки для величины постоянной «k» в геометрии Лобачевского и постоянной «ξ» в геометрии Римана показывают, что ξ и k настолько велики, что отклонения от равенства $a^2 + b^2 = c^2$ при гипотенузе с равной, например, одному километру или даже миллиарду километров будут заведомо меньше, чем погрешности самых точных измерений. Прямым, непосредственным экспериментом правильность теоремы Пифагора проверить невозможно. Однако если мы установим, наконец, среднюю плотность масс в наблюдаемой части Вселенной (а для этого требуется обобщение всех опытных фактов физики и астрономии, накопленных практикой), то мы и установим тогда, какое же все-таки из трех неравенств: $a^2 + b^2 > c^2, a^2 + b^2 = c^2, a^2 + b^2 < c^2$ соответствует истине в окружающем нас реальном мире. Развитие неевклидовой геометрии сыграло, тем самым, важную роль в становлении и развитии материалистического понимания математики.

История становления неевклидовой геометрии, история научных поисков и взаимоотношений ее творцов дает обильную пищу для размышлений и выводов об этической позиции ученого, роли его характера и взаимоотношений с окружающими в общем прогрессе науки.

Мы можем убедиться, какую роль сыграл в этом отношении характер Лобачевского, его непреклонная убежденность в собственной правоте, его уверенность в том, что нужно всемерно пропагандировать истину всеми доступными тебе путями, что люди поймут эту истину и оценят ее, пусть даже и не сразу. Мы можем вспомнить, какую роковую роль в судьбе Яноша Бояи сыграл недружеский отзыв Гаусса, а из истории вариационного исчисления (смотри главу 8) мы увидим, каким контрастом этому были отношения Эйлера и юного Лагранжа, и какую роль эти отношения сыграли в быстром развитии вариационного исчисления.

Вообще история математики – это не только история развития математических идей, но и история людей, создавших эти идеи, и история жизни этих людей, их характеров и взаимоотношений во многом поучительная для нас.

Коснемся коротко некоторых мифов, связанных с неевклидовой геометрией. Распространен, в частности, такой миф: «все отвлеченно-математические работы рано или поздно находят признание. Вот Н. И. Лобачевского ругали за отвлеченность и не понимали современники. А потомки оценили. Поэтому и я, - рассуждают часто молодые математики, – буду заниматься теорией, которая интересует только меня и никого другого. Потомки меня оценят и используют мою теорию». Этот миф основан на недостаточном знании истории математики. Геометрия Лобачевского получила, в конце концов, мировое признание лишь потому, что вопросы, решаемые ею, лежали на центральной дороге развития математики 19 века. Но история математики знает сотни и тысячи теоретических работ, погребенных в запыленных журналах. Эти работы не лежали на магистральной дороге развития науки, поэтому они мало кого интересовали при жизни авторов и уж заведомо никого – после их смерти.

В этом отношении у работ прикладного характера более счастливая судьба. Работа, решившая животрепещущую проблему текущей эпохи, вызывает интерес у потомков. В основе этого интереса лежит простое соображение, – если данная работа помогла решить одну задачу, то она может помочь решить и вторую задачу, третью и т.д.

Мы хорошо помним имена Эйлера, Лагранжа, Лапласа потому, что мы пользуемся их методами, их уравнениями, их преобразованиями. А пользуемся мы их методами потому, что, решая конкретные практические задачи своего времени, для нас уже неинтересные, эти великие математики разработали методы, полезные для решения широкого круга задач, в том числе и тех, которые стоят перед нами сегодня.

Поэтому если молодой математик решил трудную прикладную задачу новым методом, он может надеяться, что его метод послужит в будущем для решения широкого круга задач и забыт не будет.

Недаром писал И. Бернулли еще в 1697 году, что решением «трудной, но почетной» задачи «возможно и славу приобрести и оставить по себе вечный памятник».

Глава 5. Проблема обоснования анализа и математики в целом в 19 и 20 веках.

Математики 18 века широко и смело оперировали бесконечными рядами, понятиями бесконечно малых и бесконечно больших величин. Девятнадцатый век принес с собой гораздо большие требования к строгости доказательств.

Рассмотрим, почему это произошло. Почему в 18 веке математики свободно обращались, например, с бесконечными рядами (в том числе и с расходящимися рядами), а в 19 веке стали скрупулезно обосновывать сходимость, а расходящихся рядов тщательно избегали?

Одна из существенных причин заключается в изменении общественного положения математиков 19 века в сравнении с веком восемнадцатым. Мы уже упоминали в предыдущих разделах, что 18 век принес с собой появление математики как профессии; впервые в 18 веке появились профессиональные математики, получающие средства к жизни за то, что они решали для правительств важные прикладные математические задачи, порождаемые потребностями общества того времени. Наиболее выдающиеся представители математики 18 века – это члены Академий Наук того времени и занимались они прежде всего решением прикладных задач.

19-й век принес с собой дальнейшее развитие профессии математика. Появились профессиональные математики, не занимающиеся прикладными задачами. Математику стали преподавать в средних школах (лицеях Франции, гимназиях Германии и России, военных училищах), а в университетах появились специальные математические кафедры, одной из задач которых и стала подготовка учителей для средних школ.

Ведущие математики 19-го века, определившие основные тенденции ее развития, – это профессора университетов. Многие из них – и в том числе такие гиганты, как Вейерштрасс, Риман, Кантор, Гильберт, – не занимались систематически прикладными задачами, а сосредотачивали все свои силы на преподавании и на решении внутренних математических проблем, т.е. развивали математику как фундаментальную науку. Для математиков, не занимающихся приложениями, был не интересен такой путь проверки правильности выводов, как сопоставление с опытом и наблюдением. Поэтому они особое внимание обращали на выяснение логической структуры положений, лежащих в основе математики, и на строгость выводов и доказательств, стремясь к тому, чтобы сформулированные ими теоремы были бы верны и непреложны сами по себе, без всякой дополнительной проверки практикой.

Можно подметить, что при выяснении и уточнении логических основ анализа и математики в целом преследовались две не совпадающие между собой цели; их можно условно назвать «программой-минимум» и «программой-максимум».

Программа-минимум заключала в себе стремление обеспечить ясность и непротиворечивость преподавания математического материала, входящего в курс обучения, добиться того, чтобы студент, окончивший курс, был уверен, что используемый им аппарат будет давать верные результаты, без необходимости проверки сравнением с экспериментом на каждом шагу.

Программа-максимум шла дальше, она стремилась обеспечить незыблемую истинность всей математики как науки, замкнутой в себе самой, поставить математическое знание на внутреннюю прочную и свободную от противоречий опору.

Забегая вперед, отметим, что программа-минимум была выполнена, а программа-максимум не реализована и до настоящего времени. Можно предположить, что она и никогда не будет выполнена, поскольку уже в начале 19-го века Гегелем было показано, что любое достаточно богатое понятие внутренне противоречиво. Заметим, что Гегель не отрицал формальной логики. По Гегелю, она имеет право на существование, но область ее применимости ограничена. Как только мы от простейших конечных соотношений арифметики или геометрии переходим к исследованию движения, приходится столкнуться с понятиями потенциальной и актуальной бесконечности и со всеми диалектическими противоречиями, с ними связанными. Впервые с этими противоречиями столкнулись еще древние греки. «Апории» Зенона – в том числе и известная апория о том, что Ахиллес не догонит черепахи – это и есть отражение диалектически противоречивой сущности движения. Более детальная разработка математического аппарата может отодвинуть далее это диалектическое противоречие, но не может ликвидировать его целиком. Так, разработав методы суммирования бесконечных рядов – и, в частности, простого ряда

$$1+\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}+\ldots+\frac{1}{k^n},$$

сумма которого равна времени, в течение которого Ахиллес догонит черепаху, – мы преодолеем трудности Зенона, но столкнемся с противоречиями в теории бесконечных рядов и бесконечных множеств.

Таким образом, на основе философии Гегеля можно было бы ожидать, что программу-минимум, поставленную математиками 19-го века, выполнить можно, а программа-максимум окажется невыполнимой.

Рассмотрим теперь действительный ход истории обоснования анализа и математики в целом в 19-м и 20-м веках.

Одним из первых провозвестников нового подхода – подхода 19-го века – к строгости доказательств был Бернард Больцано (Bolzano) (1781–1848). В своей работе 1817 г. он первый счел необходимым дать чисто аналитическое доказательство того, что непрерывная для $a \le x \le b$ функция, имеющая при $x = a$ и $x = b$ разные знаки, обязательно принимает и значение нуль. Больцано сознает, что эта теорема геометрически очевидна. «Против верности, а также против очевидности этой теоремы,– пишет Больцано,– возразить нечего. Но столь же очевидно также, что нетерпимым нарушением хорошего метода является то, что истину чистой (или общей) математики (т.е. арифметики, алгебры или анализа) желают вывести из соображений, которые принадлежат только прикладной (или специальной) ее части, а именно - геометрии... Ведь доказательства в науке вовсе не должны быть лишь удостоверениями, а, наоборот, обоснованиями, т.е. изложениями того объективного основания, которое имеет доказываемая истина». И Больцано дает первое аналитическое доказательство прохождения непрерывной функции через значение $x = 0$.

Интересно сложилась личная судьба Б Больцано. Философ и богослов по образованию, он с 1805 г. занимал кафедру истории религии в Пражском университете, одновременно интересуясь математикой, но в 1820 г. он был навсегда отстранен от преподавания австрийским правительством за пропаганду свободомыслия. Ему было запрещено поступать на государственную службу, выступать в печати. Без средств к существованию Больцано жил в деревне у друзей, продолжая заниматься математикой. Важнейшая его работа – «Парадоксы бесконечного» – увидела свет лишь посмертно, в 1851 г.

Более непосредственную роль в становлении новых стандартов математической строгости имела деятельность Огюстена Коши (Cauchy) (1789-1857), многолетнего преподавателя Политехнической школы во Франции. В 1821 г. он опубликовал свой «Курс анализа», во многом определивший стиль преподавания на последующие десятилетия[7)]. Положив в основу анализа теорию пределов, Коши во многом урезал ту свободу манипулирования с рядами и предельными переходами, которыми пользовались математики 18-го века. «Прежде чем приступить к суммированию каких-либо рядов, – пишет Коши, – я должен рассмотреть, в каких случаях ряды можно суммировать, каковы условия их сходимости». Расходящиеся ряды Коши изгнал вовсе, объявив их «не имеющими суммы». Коши сознавал, что его нововведения обедняют эвристическую сторону математики, но считал достаточной компенсацией достигаемую при таком ограничении строгость. «Что касается методов, – писал Коши, – то я стремился придать им всю строгость, требуемую в геометрии».

История показала, что эта гордая программа не была выполнена. «Курс анализа» Коши не оказался строгим; так, оказалась ошибочной теорема Коши о непрерывности суммы сходящегося ряда непрерывных функций. Уже в 1826 г. норвежский математик Н. Абель построил контрпример – ряд

$$S = \sin a - \frac{1}{2}\sin 2a + \frac{1}{3}\sin 3a + \ldots, \tag{1}$$

терпящий разрыв при $a = (2n+1)\pi$.

Уровень строгости, достигнутый О. Коши, был существенно углублен Карлом Вейерштрассом (1815-1897), который, в частности, ввел понятие «равномерной сходимости». Только «равномерная сходимость ряда непрерывных функций» – гласила уточненная формулировка Вейерштрасса – будет гарантировать непрерывность суммы ряда.

Вообще работы К. Вейерштрасса во многом определили стиль математики 19-го века. Остановимся поэтому несколько подробнее на его биографии. Обычно для выдающихся математиков характерно раннее развитие, еще в юношеские годы они поражают своими успехами окружающих. Однако раннее развитие таланта не является непременным атрибутом математика, и характерным примером служит как раз Карл Вейерштрасс. Он родился в 1815 г., учился в 1834-38 гг. в Боннском университете (почти одновременно с молодым К. Марксом), причем посещал сперва лекции по юриспруденции и лишь потом перешел на математику, был активным членом студенческой корпорации, завсегдатаем трактира и фехтовального зала. Дуэли на шпагах были любимым развлечением немецких студентов тех лет, и молодой Вейерштрасс увлекался ими с особенным рвением. После окончания в 1838 г. университета Вейерштрасс, - как и большинство студентов математических отделений университетов того времени, стал учителем математики в гимназии небольшого города и продолжал работу учителя до 1854 г., переезжая из одного провинциального города в Германии в другой. С 1844 г. он начал – и потом упорно и целеустремленно продолжал – работу над теорией аналитических функций. Постепенно его работы завоевали призвание, и в 1854 г. его пригласил университет г. Кенингсберга, а в 1856 г. Вейерштрасс перешел в Берлинский университет, где читал лекции более 30 лет. Звание ординарного профессора он получил лишь в 1864 г., на 49-м году жизни. Публиковать свои работы Вейерштрасс не любил, идеи свои он развивал в лекциях, и через записи этих лекций, сделанных его учениками, идеи Вейерштрасса получали распространение в математическом мире, завоевывая медленно и постепенно безоговорочное признание. В частности, понятие равномерной сходимости рядов и интегралов было опубликовано впервые Зейделем ($\ddot{S}eidel$) (1821-1896) и Стоксом (Stokes) (1819-1903), но еще ранее излагалось Вейерштрассом на его лекциях. Именно от Вейерштрасса ведет свое начало изложение анализа «на языке δ–ε». Вот отрывок из конспекта лекций Вейерштрасса, прочитанных в 1861 г.: «Если $f(x)$ есть функция от x, и $x -$ определенное значение, то при переходе x в $x+h$ функция переменится и будет $f(x+h)$. Если можно определить для h такую границу δ, что для всех значений h, по абсолютному значению меньших, чем δ, разность $f(x+h)-f(x)$ становится меньше, чем сколь угодно малая величина ε, то говорят, что бесконечно малым изменениям аргумента соответствуют бесконечно малые изменения функции».

Чтобы показать ненадежность интуиции, Вейерштрасс построил пример функции

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

которая является непрерывной, но не дифференцируемой; ни в одной точке у нее не существует конечной производной.

Идеи Вейерштрасса распространялись медленно – частично потому, что он, как мы уже упоминали, не любил печатать своих работ, и идеи его распространялись только в устном изложении, через лекции и записи лекций, сделанных его учениками. Однако в последней четверти века Вейерштрасс завоевал несравненный авторитет в научном мире, и его построение курса анализа считалось образцовым. Уровень строгости учебников О. Коши был существенно превзойден; образцовой считалась «вейерштрассовская строгость».

Однако и работы К. Вейерштрасса еще не обеспечивали достижения должного уровня строгости в основаниях анализа. Коль скоро в анализе идет речь о функциях, определенных на бесконечном множестве значений аргумента, то необходимой предпосылкой обоснования анализа должно было стать исследование свойств бесконечных множеств. Это исследование было выполнено немецким математиком Георгом Кантором (Cantor) (1845-1918). От работ Г. Кантора (публиковывавшихся начиная с 1872 г.) ведет свое начало теория множеств, лежащая в основе современной математики. Надо отметить, что уже во времена Галилея было подмечено, что бесконечные множества обладают особыми свойствами, не сводящимися к свойствам множеств конечных. Так, для них несправедливо положение о том, что целое больше своей части. Галилей рассматривал (в 1638 г.) вопрос: каких чисел больше – квадратов натуральных чисел, или же всех целых чисел вместе – квадратов и не квадратов? С одной стороны ясно, что множество квадратов является лишь частью множества всех целых чисел, а с другой стороны – поскольку каждое натуральное число можно рассматривать как квадратный корень из некоторого квадрата, то между каждым квадратом и каждым натуральным числом можно установить взаимнооднозначное соответствие, и тогда уже нет основания утверждать, что целых чисел больше, чем квадратов натурального ряда. Галилей объяснял эти затруднения тем, что (как говорит он устами Сальвиати) «рассуждая нашим ограниченным разумом о бесконечном, мы приписываем ему свойства, известные нам по вещам конечным и ограниченным. Между тем это неправильно, так как такие свойства, как большая или меньшая величина и равенство неприменимы к бесконечному, относительно которого нельзя сказать, что одна бесконечность больше или меньше другой».

Следующий шаг к познанию и изучению бесконечного был сделан Георгом Кантором, который ввел новое важное понятие – понятие «мощности» множества. Два множества – по Г. Кантору – имеют одинаковую мощность тогда, когда между их элементами можно установить взаимнооднозначное соответствие, когда каждому элементу первого множества может быть поставлен в соответствие элемент второго, и наоборот. Сразу видно, что понятие мощности является обобщением понятия равенства на бесконечные множества. Действительно, два конечных множества будут иметь одинаковую мощность лишь тогда, когда число элементов первого равно числу элементов второго. Для конечных множеств понятие «мощности» не вносит ничего нового по сравнению со старым понятием числа элементов множества. Однако для всех бесконечных множеств число элементов бесконечно, а вот мощности бесконечных множеств могут быть разными. Таким образом, используя понятие «мощности», введенное Г. Кантором в 1878 г., мы получаем возможность анализировать различные бесконечности, сравнивать их между собой.

Прежде всего, Кантор доказал, что одинаковую мощность имеют:

1. множество всех натуральных чисел;
2. множество положительных четных чисел;
3. множество чисел – квадратов натуральных чисел;
4. множество всех рациональных чисел – целых и дробных.

Все эти множества Кантор назвал счетными, поскольку их потенциально возможно «пересчитать» – поставить в соответствие числам натурального ряда. Однако существуют и множества существенно большей мощности - мощности континуума. Кантор доказал, что мощность континуума имеют, например, следующие множества:

1. множество всех действительных чисел (рациональных и иррациональных);
2. множество всех точек континуума – отрезка единичной длины;
3. множество всех точек квадрата со стороной единичной длины.

Доказательства несложны. Докажем, например, что множество всех точек единичного отрезка имеет мощность больше, чем множество натуральных чисел. Поставим в соответствие каждой точке отрезка число – ее расстояние от начала отрезка. Это число может быть либо рациональным, т.е. конечной или периодической десятичной дробью, либо иррациональным, т.е. бесконечной непериодической десятичной дробью. Предположим теперь, что мы все эти числа перенумеровали – поставили в соответствие числам натурального ряда (по совершенно произвольному закону). Тогда получится следующая бесконечная таблица:

$$1 \to 0{,}2427...$$
$$2 \to 0{,}3542...$$
$$3 \to 0{,}2537...$$
$$4 \to 0{,}1538...$$
....

(Изображено, естественно, только начало таблицы). Теперь покажем, что существует такое иррациональное число, которое заведомо не содержится в этой таблице. Это число построим следующим образом: на первое место после запятой ставим цифру, отличную от той, что стоит на первом месте в первом числе нашей таблицы, на второе - цифру, отличную от той, что стоит на втором месте во втором числе нашей таблицы и т. д. Получившееся число не будет совпадать ни с одним из чисел нашей таблицы. Таким образом, мы доказали, что множество точек отрезка не является счетным, оно имеет мощность большую, чем множество всех рациональных чисел. Отсюда, кстати, сразу вытекает существование иррациональных чисел. Иррациональных чисел даже (условно говоря) «гораздо больше», чем рациональных (точнее, мощность множества иррациональных чисел больше, чем множества рациональных чисел).

Интересно отметить, что переход от отрезка к квадрату, к кубу и к пространству любого конечного числа измерений не увеличивает мощности: множество всех точек квадрата, куба и т. д., как доказал Г. Кантор в 1877 г., имеет ту же мощность, что и множество точек единичного отрезка. Это доказательство Кантора вызвало особое удивление у его современников.

Кантор доказал также, что существуют множества сколь угодно высокой мощности и высказал гипотезу, что не существует множеств, имеющих мощность промежуточную между мощностью континуума и мощностью счетного множества (знаменитая «гипотеза континуума» Г. Кантора).

Отношение современников к исследованиям Г. Кантора было двойственным. Были математики, горячо поддержавшие Кантора с самого начала (тут надо отметить прежде всего немецкого математика Рихарда Дедекинда (1831-1916); его регулярная дружеская переписка с Кантором сыграла большую роль в оформлении теории множеств). Многие математики встретили идеи Кантора враждебно, особенно непримиримо выступал против Кантора влиятельный математик Л. Кронекер (Kronecker) (1823-1891). Резкие нападки Кронекера были одной из причин тяжелого заболевания Г. Кантора, который начиная с 1885 г. почти не печатал новых работ.

Однако постепенно идеи Кантора завоевали математику, и к концу 19-го века она уже прочно опиралась на теорию множеств как на свой основной фундамент. «Никто не может изгнать нас из рая, созданного для нас Г.

Кантором», – провозгласил Д. Гильберт (Hilbert) (1862-1943). В основе обучения математике в университетах теория множеств лежит и сегодня. Одно время казалось, что теория множеств действительно позволила выполнить честолюбивый план построения математики как логически безупречной науки, имеющей критерий истины внутри себя. Знаменитый французский математик Анри Пуанкаре (Poincare) (1854-1912) писал в 1900 г. в адресе второму всемирному математическому конгрессу: «Теперь (после появления теории множеств) математика полностью арифметизирована. Мы можем сказать сегодня, что в математике достигнута абсолютная строгость».

Однако как раз на грани 19-го и 20-го веков в теории множеств были обнаружены противоречия (парадоксы), не разрешенные целиком и до сих пор; они сделали сомнительной веру в абсолютную истинность и строгость математики самой по себе, без ее сопоставления с реальным миром.

Рассмотрим, для примера, один из парадоксов теории множеств, обнаруженный Б. Расселом (Russell) (1871-1970) в 1903 г. Большинство множеств не содержат само себя в качестве элемента. Так, множество всех натуральных чисел – это не натуральное число; множество всех людей земли – это не человек. Назовем такие множества обыкновенными. Однако существуют и необыкновенные множества, содержащие само себя в качестве элемента. Таково, например, «множество всех мыслимых множеств», оно само является множеством.

Рассмотрим теперь «множество всех обыкновенных множеств», назовем его «множеством М». Каким будет это множество – обыкновенным или необыкновенным? Предположим, что оно необыкновенное. Тогда оно встречается среди своих элементов, а этого не может быть, ибо, по условию, элементами множества М являются лишь обыкновенные множества. Таким образом, первое предположение приводит к противоречию. Остается второе предположение: множество М – обыкновенное. Но тогда оно не встречалось бы среди своих элементов, которые исчерпывают собой все обыкновенные множества. Следовательно, множество М должно быть необыкновенным, что опять приходит в противоречие с нашим условием. Таким образом, и первое, и второе предположения приводят к противоречию. Это противоречие (парадокс Б. Рассела) не является единственным; в теории множеств существуют и другие противоречия (парадокс Бурали-Форти, парадокс Ришара и т.п.). Теория множеств, лежащая в основе современной математики, внутренне противоречива.

Этому не следует удивляться, поскольку математика отражает действительность (действительность внешнего мира и действительность нашего мышления), а действительность в своих глубоких основах, как показал еще Гегель, всегда диалектически противоречива.

Наличие противоречий в основаниях математики (в теории множеств) не подрывает и не должно подрывать доверия к истинности математических теорем. И в математике критерием истины является опыт, практика. Не нужно только понимать этот критерий слишком прямолинейно и упрощенно. Единичный опыт, действительно, не может ни подтвердить, ни опровергнуть математической теоремы. Под критерием практики следует понимать человеческую практику в целом, в ее историческом развитии. А история математики показывает нам, что математические истины – как и истины других наук – развиваются, совершенствуются, уточняются (а иногда и опровергаются, т.е. оказываются не истинами) в ходе деятельности людей.

Обнаружение противоречий в основаниях математики опровергло лишь претензии идеалистически настроенных математиков на «абсолютную строгость» их науки, единственным критерием истинности которой является, якобы, отсутствие противоречий, а не опыт, не практика человечества, взятая в целом. Так, Анри Пуанкаре писал в своей работе «Наука и метод»: «Математика не зависит от существования материальных вещей; в математике слово «существовать» может иметь только один смысл – оно означает устранение от противоречия». Там же Пуанкаре писал в 1900 г. (мы уже цитировали), что «сегодня в математике достигнута абсолютная строгость». Развитие математики (и теории множеств в том числе) опровергло эти претензии Пуанкаре.

Рассмотрим теперь очень коротко основные направления исследований по основаниям математики в 20-м веке, после обнаружения парадоксов теории множеств. Наличие противоречий в основаниях математики, естественно, вызывало беспокойство и побуждало к напряженным исследованиям, тем более что логические следствия теории множеств приводили иногда и к весьма странным теоремам. Так, польские математики С. Банах (Banach) (1892-1945) и А. Тарский (Tarski) (1901-1983) доказали теорему о том, что сферу радиуса R можно разбить на конечное число таких неперекрывающихся частей, что перемещая их как твердые тела и прикладывая их друг к другу соответствующим образом, можно получить новую сферу радиуса 2R, причем не теряется ни одной точки первой сферы и не вводится новых точек.

Д. Гильберт писал в 1925 г.: «Надо согласиться, что состояние, в котором мы находимся сейчас в отношении парадоксов, на продолжительное время невыносимо. Подумайте: в математике – этом образце достоверности и истинности – образование понятий и ход умозаключений, как их всякий изучает, преподает и применяет, приводят к нелепости. Где же искать надежность и истинность, если даже само математическое мышление дает осечку?»

Отметим сразу, что обнаружение противоречий в основаниях логических рассуждений математики не оказало отрицательного влияния на доверие к практическим выводам и рекомендациям прикладной математики. В прикладной математике все выводы и рекомендации, перед тем как быть переданными для использования, все равно всесторонне проверялись – даже в те времена, когда искренне верили, что безупречно проведенное математическое доказательство обеспечивает абсолютную строгость. Проверка была необходима уже потому, что доказательства проводят люди, а история математики много раз показывала, что человеку свойственно ошибаться, и не допустить ни одной элементарной ошибки в длинной цепи логических рассуждений весьма трудно. Поэтому открытие диалектических противоречий в основаниях математики доверия к прикладным результатам не подорвало.

Отметим, что в 20-х годах двадцатого века работы А. Тарского по математической логике показали, что грамматики естественных языков (русского, английского, польского и т.д.) не обладают должной степенью однозначности для того, чтобы обеспечить абсолютную строгость доказательства. Поясним результаты А. Тарского наглядным сравнением: пусть некоторый математический текст, написанный на русском языке, переводчик А переводит на английский язык, затем другой переводчик В переводит обратно на русский, новый переводчик С – переводит снова на английский и т. д. Даже если все переводчики квалифицированны и добросовестны, после достаточно длинной цепочки прямых и обратных переводов получим текст, сильно отличающийся от исходного. Цепочка прямых и обратных переводов подчеркивает и выявляет неполную однозначность выражений, свойственную любому естественному языку.

Из результатов А. Тарского следует, что доказательство, сформулированное на любом из естественных языков, уже по одному этому не может быть абсолютно строгим. Для преодоления ограничений, связанных с неоднозначностью естественного языка, были разработаны целиком формализованные языки математической логики; эти языки, однако, очень сложны. Поэтому и до сего дня подавляющее большинство математических работ пишется на естественных языках, хотя это и не строго. Это обстоятельство просто подчеркивает еще раз, что поиски абсолютной строгости бессмысленны, и что вообще строгость рассуждений и доказательств – это, хотя и важное, но далеко не самое главное в математике.

Обнаружение парадоксов теории множеств стимулировало развитие еще одного интересного направления – так называемой конструктивной математики. Представители этого направления отрицают законность применения в математике абстракции актуальной бесконечности (на этой абстракции, собственно, и основывается современная математика). Признав незаконность актуальной бесконечности, представители конструктивной математики должны были тем самым отказаться от закона исключенного третьего вне сферы конечных множеств, отказаться от использования теорем существования и т.п. Все это резко осложняет математические построения. Возможно ли обойтись в математике без понятия актуальной бесконечности – этот вопрос пока остается открытым. Однако новый подход к основам математики со стороны представителей конструктивного направления позволил им получить ряд новых и интересных результатов. В области конструктивного направления успешно работали и работает ряд российских математиков — Андрей Андреевич Марков (1903-1979), Николай Александрович Шанин (род. 1919 г.) и другие.

Не менее интересными были исследования в области аксиоматики, аксиом геометрии и арифметики, начало которым положили работы Н.И. Лобачевского, оживившие интерес к аксиоматике геометрии. Подробный анализ показал, что аксиомы и постулаты, введенные Евклидом в попытке дать безукоризненно строгое обоснование геометрии, не достигают поставленной Евклидом цели. Фактически Евклид при доказательствах своих теорем пользуется в неявном виде аксиомами, не включенными в начальный список и нигде точно не сформулированными. Неудовлетворительными были и определения Евклида (например, «точка есть то, что не имеет частей», «линия есть длина без ширины» и т.п.).

Поэтому в конце 19-го века Пеано (Peano) (1858-1932), Паш (Pasch) (1843-1911) и особенно – Д. Гильберт (1862-1943) произвели пересмотр определений и аксиом Евклида. Ими было предложено ввести первичные, не определяемые понятия – «точка», «прямая», «плоскость». Свойства этих понятий выражаются через систему аксиом. Д. Гильберт предложил разделить предлагаемые им аксиомы геометрии на группы:

А. Аксиомы соединения.

1. Две точки определяют единственную проходящую через них прямую.

2. На каждой прямой лежит не менее двух точек; существуют, по крайней мере, три точки, не лежащие на одной прямой.

3. Через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит единственная плоскость. В каждой плоскости лежит, по крайней мере, одна точка.

4. Если две точки прямой лежат в одной плоскости, то и все точки этой прямой лежат в той же плоскости.

5. Если две плоскости имеют одну общую точку, то они имеют и еще, по крайней мере, одну точку.

6. Существуют, по крайней мере, четыре точки, не лежащие в одной плоскости.

Б. Аксиомы порядка.

1. Если B лежит между A и C, то A, B и C – различные точки прямой, и B лежит также между C и A.

2. При данных двух точках A и B на прямой существует и точка C, лежащая между A и B.

3. Из трех данных точек на прямой не более чем одна лежит между двумя другими.

4. Прямая, лежащая в той же плоскости, что треугольник ABC и пересекающая отрезок AB, пересечет обязательно отрезок BC или отрезок AC (аксиома Паша).

Аксиомы конгруэнтности.

1. На любой прямой из любой ее точки можно отложить отрезок, равный данному.

2. Два отрезка, равные третьему, равны между собой.

3. Пусть A, B, C - точки одной прямой и A_1, B_1, C_1 – тоже точки одной прямой и $AB=A_1B_1$; $BC=B_1C_1$; если отрезки AB и BC, а также A_1B_1 и B_1C_1 не имеют общих точек, то $AC=A_1C_1$.

4. От любой точки прямой по данную ее сторону можно построить один и только один угол, равный данному; каждый угол равен самому себе.

5. Если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ стороны $AB= A_1B_1$, и $AC= A_1C_1$, и угол BAC равен углу $B_1A_1C_1$, то угол ABC равен углу $A_1B_1C_1$.

Четвертая группа состоит из одной «аксиомы о параллельных»: через данную точку в данной плоскости можно провести не более одной прямой, не пересекающей данной. Как мы уже упоминали, это эквивалентно пятому постулату Евклида.

Пятая группа – аксиомы непрерывности:

1. Если AB и CD - два произвольных отрезка, то на AB существует ряд точек A_1, A_2, ..., A_n , таких, что $AA_1=AA_2=...=AA_n=CD$, и точка B лежит между A_{n-1} и A_n (аксиома Архимеда).

2. Точки прямой нельзя дополнить новыми точками, которые можно было бы считать принадлежащими той же прямой без нарушения других аксиом.

Эта система аксиом, сформулированная впервые Д. Гильбертом в 1899 году, лежит в основе современной геометрии. Читателю полезно сопоставить ее с аксиомами и постулатами Евклида, приведенными в главе первой. Сопоставление показывает, какой большой путь проделала математика за 24 века своей истории – от Евклида до Гильберта. К системе аксиом в настоящее время предъявляются следующие требования:

1. полноты (т.е. любую теорему можно доказать, не прибегая к новым аксиомам, кроме уже сформулированных);

2. независимости (т.е. никакую аксиому нельзя вывести как теорему из остальных);

3. непротиворечивости (т.е. из аксиом нельзя вывести противоречивые следствия).

Наиболее трудно доказать непротиворечивость системы аксиом. Мы уже рассказывали, какие трудности возникли перед Н.И. Лобачевским и Гауссом при попытках доказать непротиворечивость геометрии Лобачевского. В конце концов Бельтрами и Ф. Клейн решили этот вопрос путем сведения его к другому – они доказали, что геометрия Лобачевского непротиворечива, *если* непротиворечива евклидова геометрия. Но возник вопрос – а сама евклидова геометрия противоречива или нет?

Д. Гильберту в начале 20-го века удалось сделать следующий шаг и доказать, что евклидова геометрия непротиворечива в той же мере, что и арифметика; *если* непротиворечива арифметика, то непротиворечива и геометрия.

Исследования Д. Гильберта подвели прочный фундамент аксиом под геометрию. Теперь встал вопрос – а нельзя ли построить систему аксиом, на которой основывалась бы арифметика (а через посредство арифметики – и математический анализ)? Долгое время казалось, что такая система аксиом возможна. Тем неожиданнее оказался результат, полученный молодым австрийским математиком Куртом Геделем (*Gödel*) (1906-1978) в 1931 году.

Гедель показал, что для арифметики (как и для большинства других дисциплин – геометрия является исключением) невозможно составить полную систему аксиом, и невозможно это сделать потому, что всегда найдутся истинные теоремы, которые тем не менее нельзя доказать, исходя из любой системы аксиом – как бы мы эту систему ни расширяли. Гедель показал, что существует различие между истинностью и выводимостью – существуют теоремы истинные, но не выводимые, не доказуемые в рамках данной системы аксиом. Постараемся представить себе наглядно результат Геделя. Пусть мы взяли за основу некоторую систему аксиом и выводим из нее всевозможные следствия. Начиная от Евклида и до 1931 года математики были уверены, что эти следствия образуют некоторый «материк истины», и до любой точки этого материка мы можем добраться «сухопутным путем», путем дедуктивного рассуждения из принятых аксиом. Гедель показал, что структура истины сложнее и напоминает скорее материк, окруженный островами. Существует бесконечное количество утверждений истинных, но не доказуемых в рамках принятой системы аксиом, как бы мы ее ни расширяли. Эти утверждения образуют «острова истинности» за пределами дедуктивного материка.

Исследования Геделя существенно уточнили наши представления о математике. Они показали утопичность надежд на построение единого здания чисто дедуктивной, «безупречно-строгой» математики – по образцу «Начал» Евклида.

Еще одним уточнением наших представлений об основаниях математики явились результаты Курта Геделя и американского математика Коэна в области «гипотезы континуума» Георга Кантора.

Мы уже упоминали, в главе четвертой, что в основе математики в целом и особенно в основе математического анализа лежит теория множеств и одной из важнейших теорем теории множеств является «теорема о мощности континуума», сформулированная еще Г. Кантором. Утверждение теоремы заключается в том, что не существует множеств, имеющих мощность, промежуточную между мощностью счетного множества и мощностью континуума. Г. Кантор упорно пытался доказать эту важнейшую теорему, но потерпел неудачу. Поэтому теорему стали называть «гипотезой континуума». Многие математики пытались доказать «гипотезу континуума», но без успеха. Было предложено принять «гипотезу континуума» в качестве аксиомы и основывать на ней построение теорем множеств. К. Гедель показал в 1939 году, что «гипотеза континуума» не противоречит остальным аксиомам теорем множеств и поэтому можно строить теорию множеств, основываясь на «аксиоме континуума».

Окончательно «проблема континуума» была решена в I960-63 гг. американским математиком Коэном (*Cohen*) (родился в 1934 г.).

За успехи в области исследования теории множеств Коэн в 1966 году был удостоен высшего отличия математика – медали Филдса.

Коэн показал, что остальным аксиомам теории множеств не противоречит ни «гипотеза континуума», ни ее отрицание, т.е. допущение о том, что существуют множества промежуточной мощности, лежащей между мощностью счетного множества и мощностью континуума. Ситуация очень напоминает ту, которая сложилась в геометрии после исследования Лобачевского и Бельтрами: подобно тому, как существуют две логически непротиворечивых геометрии – Лобачевского и Евклида – и вопрос о том, какая из них правильнее отображает свойства действительного мира, должен решаться на основе критерия опыта, практики, точно так же существуют и две логически непротиворечивых теорий множеств: в основе первой лежит «гипотеза континуума», в основе второй – ее отрицание.

Можно предполагать, что в дальнейшем выяснится, какая из двух возможных теорий множеств (теория, опирающаяся на «гипотезу континуума», окончательно переведенную в ранг аксиомы, или теория, опирающаяся на ее отрицание, на существование множеств промежуточной мощности) будет лежать в основе математики и математических доказательств.

Глава 6. Развитие математики в России. Петербургская математическая школа.

Еще со времен Киевской Руси восточно-славянские племена оживленно общались с другими народами, обменивались с ними знаниями и навыками. Уровень математических знаний древней Руси был вполне сопоставим с уровнем знаний ее соседей. Наши предки умели выполнять арифметические действия с многозначными числами, вычислять площади земельных участков, умели и многое другое.

Реформы Петра I, при котором московское царство преобразовалось в Российскую империю, способствовали еще более тесным связям России с Западной Европой. Потребности молодого государства требовали широкого использования научных знаний и 24 января 1724 года Петр I подписал Указ об организации Академии наук, а при ней — университета и гимназии. В 1999 году Российской Академии наук и Санкт-Петербургскому университету исполнилось 275 лет.

Первые профессора молодой академии приглашались из-за границы; так, в 1727 году был приглашен Леонард Эйлер, который работал в Петербурге с 1727 года по 1741 год, а затем еще раз с 1766 по 1783 годы.

Деятельность Эйлера в Академии наук и в университете была многообразна. Он выполнял многочисленные поручения правительства – в области картографии России, артиллерии, оптики, публиковал как глубокие теоретические работы, так и учебники, воспитал ряд учеников, которые продолжали его дело – правда, уже не на том высочайшем уровне, как он.

В первой половине 19 века наиболее известными математиками России были академики Виктор Яковлевич Буняковский (1804-1889) и Михаил Васильевич Остроградский (1801-1861), опубликовавшие ряд первоклассных работ. Однако в Западной Европе к тому времени еще не привыкли со вниманием относиться к российской науке и следовать за ее достижениями. Поэтому выдающиеся результаты российских ученых с опозданием усваивались мировым научным сообществом.

Так знаменитое и широко используемое неравенство Буняковского

$$\left(\int_a^b u(x)\,v(x)\,dx\right)^2 \le \int_a^b u^2(x)\,dx \cdot \int_a^b v^2(x)\,dx$$

за рубежом связывают с именем Шварца, хотя Шварц открыл его только в 1875 году, на 16 лет позже публикации В.Я. Буняковского.

В 1834 году в изданиях Российской Академии наук был опубликован мемуар М.В. Остроградского, а через шесть лет, в 1840 г. Парижская Академия наук объявила конкурс на премию за решение той же самой, уже решенной Остроградским, проблемы. Лишь в 1861 г. мемуар М.В. Остроградского в полном переводе на английский язык был издан как приложение к книге Тотгентера по истории вариационного исчисления (цитирую по книге Б.В Гнеденко «Очерки по истории математики в России», М., Л.: ОГИЗ, 1946).

Мировое признание российской математики пришло после того, как во второй половине девятнадцатого века заявила о себе петербургская математическая школа, сформировавшаяся прежде всего вокруг великого русского математика Пафнутия Львовича Чебышева (1821 –1894) (кстати, его фамилию обязательно следует произносить с ударением на последнем слоге; об этом не раз упоминает сам Чебышев).

Чебышев родился в 1821 году в старинной дворянской семье в Калужской губернии. Первоначальное образование он получил дома, затем с 1837 года учился в Московском университете, окончив его в 1841 году. В Москве, в 1846 году, Чебышев защитил магистерскую диссертацию «Опыт элементарного изложения теории вероятностей», но уже в

1847 году переехал в Петербург, где был утвержден доцентом Петербургского университета и начал чтение лекций. В 1850 году он был избран экстраординарным, а в 1860 году – ординарным профессором Петербургского университета, в котором он читал лекции 35 лет – с 1847 по 1882 год. Одновременно П.Л. Чебышев работал в Академии наук, куда он в 1853 году был избран адъюнктом, а в 1858 году – академиком, а также много и плодотворно работал в Артиллерийском комитете; таким образом – и это весьма важно отметить – П.Л. Чебышев не был «исключительно преподавателем»: с преподаванием он соединял и научную, и чисто практическую деятельность; это не могло наложить отпечатка и на его преподавание в Университете.

Первые выдающиеся работы П.Л. Чебышева были посвящены наиболее отвлеченному отделу математики – теории чисел. Этой теме была посвящена его докторская диссертация «Теория сравнений» (1849 г.) и знаменитая статья «Об определении числа простых чисел, не превосходящих заданной величины», опубликованная в 1851 году.

Однако постепенно научные интересы Чебышева перемещаются в область механики. В 1852 году он получает заграничную командировку. Чебышев использовал командировку для личного знакомства с выдающимися зарубежными математиками – Коши, Лиувиллем, Эрмитом – и одновременно он с величайшим интересом знакомился с передовой в те годы французской промышленностью, центральным звеном которой была паровая машина. «Из многих предметов исследования, – писал П.Л. Чебышев в своем отчете о заграничной командировке, – которые представились мне при рассмотрении и сличении между собой различных механизмов передачи движения – особенно в паровой машине, где и экономия в топливе, и прочность машины много зависят от способов передачи работы пара, я особенно занялся теорией механизмов, известных под названием параллелограммов». Шарнирные механизмы, известные под названием параллелограммов, широко применялись в паровых машинах того времени. Задачей этих механизмов было обеспечение движения поршня, в наименьшей мере отклоняющегося от прямолинейного. В ходе исследования параллелограммов Чебышев, по его собственным словам, «встретил вопросы анализа, о которых до сих пор знали очень мало». Это были вопросы о построении функций наилучшего приближения. Чебышев глубоко разработал теорию подобных функций и, в частности, открыл знаменитые полиномы, в наименьшей степени уклоняющиеся от нуля – полиномы вида

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x); \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Эти полиномы в дальнейшем были названы полиномами Чебышева и получили многообразные применения.

Таким образом, теоретические открытия Чебышева вырастали из вопросов практики, на которые он горячо откликался. Этот путь – от насущных практических задач к теоретическим обобщениям – он считал наиболее плодотворным. Вот что говорил об этом сам Чебышев в речи на торжественном акте петербургского университета в 1856 году: «науки математические с самой глубокой древности обращали на себя особенное внимание; в настоящее время они получили еще более интереса по влиянию своему на искусства и промышленность. Сближение теории с практикой дает самые благотворные результаты и не одна только практика от этого выигрывает; сами науки развиваются под влиянием ее: практика открывает им новые предметы для исследования или новые стороны в предметах, давно известных».

И тут же, в своей актовой речи (кстати, названной им «Черчение географических карт») Чебышев дает пример этого благотворного взаимодействия конкретных задач практики и их теоретического обобщения. Чебышев рассматривает одну из центральных задач картографии – какая проекция является наиболее выгодной для создания карты конкретной страны – и показывает, что задача эта не сводится к обычным задачам дифференциального или вариационного исчисления, но может быть решена на основе теории функций, наименее уклоняющихся от нуля, разработанной им ранее для задач о параллелограммах паровых машин. На основе этой теории Чебышев дает решение как в общем виде (в форме принципа: «на границе изображения масштаб постоянен»), так и конкретное решение для карты Европейской части России, которое позволило снизить погрешность изображения с $\frac{1}{34}$ (достигаемой при стереографической проекции) до $\frac{1}{50}$.

Любопытно, что доказать строго свой принцип выбора наилучшей проекции («на границе изображения масштаб постоянен») Чебышеву в то время не удалось, хотя он проверил его на примерах, был уверен в его правильности и широко им пользовался. Полное доказательство принципа Чебышева было дано лишь сорок лет спустя, в 1896 году, русским математиком Дмитрием Александровичем Граве (1863-1939) в его докторской диссертации «Об основных задачах математической теории построения географических карт», защищенной В Петербургском университете уже после смерти П.Л. Чебышева.

Мы рассмотрели только немногие из научных результатов П.Л. Чебышева; всего, с 1843 по 1894 год, им опубликовано 69 работ, многие из которых получили мировую известность. (Любитель сравнений может заметить, что П.Л. Чебышев опубликовал вдесятеро меньше работ, чем О. Коши, но это лишь еще раз подчеркивает, что дело не в количестве работ, а в их значимости.) Не меньшее значение имела и деятельность П.Л. Чебышева в качестве профессора Петербургского университета. Вот что пишет о лекциях Чебышева его ученик А.М. Ляпунов: «Курсы его не были обширными, и при изложении их он заботился не столько о количестве сообщаемого материала, сколько о выяснении принципиальных сторон трактуемых вопросов. Отличаясь живым и увлекательным изложением, лекции его сопровождались множеством интересных замечаний относительно значения и важности тех или других вопросов или научных методов. Замечания эти высказывались иногда мимоходом по поводу какого-нибудь конкретного случая, но всегда глубоко западали в умах его слушателей. Вследствие этого лекции его имели высокое развивающее значение и слушатели его после каждой лекции выносили нечто существенно новое в смысле большей широты взглядов и новизны точек зрения.

П.Л. Чебышев почти не пропускал лекций. По крайней мере за два года, в течение которых я был его слушателем, я не помню, чтобы хотя один раз его лекция не состоялась. В аудитории он появлялся всегда точно в назначенное время и тотчас же, не теряя ни секунды, приступал к продолжению выводов, начатых в предшествовавшую лекцию. Вычисления он производил чрезвычайно быстро, вследствие чего, несмотря на то, что был прекрасным калькулятором, часто делал ошибки в выкладках и за ходом вычислений нужно было следить очень внимательно, чтобы вовремя предупредить о сделанной ошибке, о чем он всегда просил своих слушателей. Когда, наконец, получался желаемый вывод, П.Л. Чебышев садился на кресло, ставившееся для него всегда у первой парты, и вот тут-то и начинались те разнообразные замечания, которые придавали особый интерес его лекциям и которых с нетерпением ждала вся аудитория. Весьма часто по поводу только что решенного вопроса Чебышев высказывал свое мнение о тех или других работах, относящихся к тому же вопросу. Иногда он вспоминал при этом некоторые эпизоды из своих заграничных поездок, рассказывал о беседах по поводу того же вопроса с кем-либо из иностранных ученых. После более или менее продолжительной беседы этого рода, служившей для него отдыхом, П.Л. Чебышев, быстрый как в речи, так и во всех своих действиях, быстро вставал, брался за мел и приступал к дальнейшим выводам. К характеристике внешней стороны его лекций должно прибавить, что он никогда не оставался в аудитории по окончании времени, назначенного для лекции и бросал мел в тот же момент, как раздавался звонок, на каком бы месте при этом ни пришлось оборвать начатые вычисления».

Заметим, что лекции П.Л. Чебышева по вычислению определенных интегралов, теории конечных разностей и теории вероятностей, дословно записанные А.М. Ляпуновым, были изданы АН СССР в 1936 году и желающие могут с ними ознакомиться. Наибольшей научной заслугой П.Л. Чебышева А.М. Ляпунов справедливо считает создание школы математиков, известной как петербургская математическая школа, к которой принадлежали А.Н. Коркин, Е.И. Золотарев, А.А. Марков, К.А. Поссе, Д.А. Граве, В.А. Стеклов, Г.Ф. Вороной и прежде всего сам А.М. Ляпунов, о творчестве которого мы будем говорить отдельно, в главе, посвященной теории автоматического управления и регулирования.

Отметим, что до известной степени к петербургской математической школе можно отнести и Софью Васильевну Ковалевскую (1850-1894). Хотя она училась в Германии, у К. Вейерштрасса, но, вернувшись в 1874 г. в Россию, в Петербург, она активно общалась с П.Л. Чебышевым и его учениками. В 1889 г. по предложению Чебышева ее избрали членом-корреспондентом Академии наук. В тесном контакте и оживленном общении с петербургскими математиками она работала до своего отъезда в Швецию в 1883 году.

Вот как определяет А.М. Ляпунов основные черты петербургской школы: «П.Л. Чебышев и его последователи остаются постоянно на реальной почве, руководясь взглядом, что только те изыскания имеют цену, которые вызываются приложениями (научными или практическими), и только те теории действительно полезны, которые вытекают из рассмотрения частных случаев.

Детальная разработка вопросов, особенно важных с точки зрения приложений и в то же время представляющих особенные теоретические трудности, требующие изобретения новых методов и восхождения к принципам науки, затем обобщение полученных выводов и создание этим путем более или менее общей теории – таково направление большинства работ П.Л. Чебышева и ученых, усвоивших его взгляды.

Насколько подобное направление может быть плодотворным в чисто научном отношении, это, вероятно, показывает вся научная деятельность П.Л. Чебышева, который пришел к постановке и решению совершенно новых и важных вопросов анализа, исходя из задач прикладного характера, иногда притом чисто практических.

Таков, впрочем, путь многих важных открытий в области математики», – заканчивает А.М. Ляпунов.

Отметим теперь, что, несмотря на традиции петербургской математической школы, в начале XX века на физико-математическом факультете Петербургского университета (до 1919 года этот факультет объединял и физиков, и математиков) наблюдался крен в сторону математической абстракции, от которого страдали прежде всего физики объединенного факультета. Особенно тяжело приходилось молодым физикам, готовившимся к сдаче магистерских экзаменов. Математики объединенного факультета не хотели признавать, что человек, готовящийся к профессии физика, может (и должен) предъявлять к своему математическому образованию совсем другие требования, чем «чистый» математик и экзаменовали молодых физиков «по всей строгости» своей науки. Это приводило ко многим трагедиям. В воспоминаниях о Павле Сигизмундовиче Эренфесте (1880-1933) приводился характерный эпизод: в 1912 году, на Всероссийском съезде естествоиспытателей и врачей в Москве П.С. Эренфест с увлечением рассказывал о выдающемся научном открытии молодого тогда физика Д.С. Рождественского (1876-1940). Работа действительно была блестящей и аудитория закидала П.С. Эренфеста вопросами: «А где же сам автор работы?» «Где?» – со слезами на глазах переспрашивал П.С. Эренфест и отвечал: «Автор этого открытия, имеющего мировое значение, не имел времени приехать в Москву; он не разгибая спины готовится к магистерскому экзамену по математике. Чтобы сдать эти экзамены, надо прочесть вот какие книги». Эренфест подошел к доске и, волнуясь от негодования, начал выписывать длинную колонку книг, ознакомление с которыми требовалось программой экзаменов.

И это была, конечно, участь не одного Рождественского. О сложившемся положении со стилем преподавания математики на физико-математическом факультете А.Ф. Иоффе говорил в 1910 году: «Это – трагедия петербургской физики» (цитирую по книге В.Я. Френкеля «Пауль Эренфест», М., 1977).

И не удивительно, что когда в 1919 году из физико-математического факультета Петроградского университета был выделен факультет физический и к организации его был привлечен Д.С. Рождественский, он прежде всего провел реформу преподавания математики, приведя ее в соответствие с действительными нуждами физики. Реформа встретила яростное сопротивление профессоров-математиков. «Университет будет теперь выпускать поверхностно образованных людей, – утверждали они, – вместо выпускников, приученных к математической строгости мышления». Д.С. Рождественский, по свидетельству мемуариста, «отвечал математикам резко, даже с оттенком презрительности, как людям, которые оторвались от жизни и не понимают ее требований» («Воспоминания о Рождественском», издательство «Наука», 1976).

Рождественский довел реформу до конца: новый курс математики, учитывающий нужды физиков, был составлен Владимиром Ивановичем Смирновым (1887-1974) совместно с Тамаркиным Я.Д., который впоследствии эмигрировал, и Смирнов продолжил работу уже один. Из этой работы вырос потом столь известный «Курс высшей математики» В.И. Смирнова в пяти томах. Популярность этого курса (переведенного на многие языки мира) определилась тем, что он излагал математические вопросы с точки зрения приложений и, прежде всего, приложений в физике. Деятельность петербургской математической школы наглядно показала, насколько плодотворным для математики может быть влияние приложений.

Представителем петербургской математической школы, с особенным успехом работавшим в области прикладной математики, был Алексей Николаевич Крылов (1863-1945).

А.Н. Крылов родился в 1863 г. в небогатой дворянской семье, в 1878 году поступил в Морское училище, которое закончил в 1884 г., получив воинское звание мичмана. Еще в Морском училище, во многом под влиянием А.М. Ляпунова, своего двоюродного брата по матери, А.Н. Крылов начал глубоко интересоваться математикой, изучая самостоятельно университетские курсы. После окончания Морского училища А.Н. Крылова привлекли к работе по изучению девиации магнитного компаса и методам ее уничтожения. В 1888-1890 годах А.Н. Крылов учился в Морской академии, где курс математики вел Александр Николаевич Коркин (1837-1908) – один из лучших представителей петербургской математической школы. По окончании академии А.Н. Крылов много лет преподавал в Морском училище и Морской академии, совмещая преподавание с большой практической работой. В разное время А.Н. Крылов работал заведующим судостроительным бассейном (с 1900 г.), главным инспектором кораблестроения (с 1908 г.), председателем Морского технического комитета (с 1908 г.), директором Главной физической обсерватории (с 1916 г.), начальником Морской академии (с 1919 г.), директором Физико-математического института Академии наук с 1927 года (действительным членом Академии наук А.Н. Крылов был избран еще в 1916 году).

Все эти практические работы А.Н. Крылова не могли не оказать влияния на направленность его математических трудов. А.Н. Крылов блестяще знал математику, но его работы почти исключительно были посвящены математике прикладной. А.Н. Крылов – это классик прикладной математики. А поскольку наши «Лекции» посвящены прежде всего прикладной математике, то мы и разберем более подробно основные особенности работ А.Н. Крылова.

Тематика работ А.Н. Крылова разнообразна: они посвящены теории и расчету качки корабля на морском волнении, теории показаний, корабельных гирокомпасов и магнитных компасов, расчету напряжений и деформаций в элементах судовых конструкций и многим другим практическим задачам кораблестроения и мореходного дела. Какие же основные черты пронизывают все эти столь разнообразные труды А.Н. Крылова? Что позволяет считать эти труды классическими работами по прикладной математике? Отметим прежде всего, что важнейшие работы А.Н. Крылова – будь это работы по исследованию качки судов, показаний компасов или других явлений – прежде всего включают в себя подробный выбор, анализ и обоснование принимаемой им математической модели исследуемого явления. Именно обоснование правильного выбора математической модели исследуемого объекта – а это, в свою очередь, невозможно без хорошего знания физической сущности и практических особенностей работы объекта – и составляет самую важную, решающую часть исследований А.Н. Крылова. Крылов исследует предлагаемую им математическую модель с двух, в равной мере важных, точек зрения: во-первых, математическая модель должна достаточно хорошо отражать хотя бы основные черты изучаемого явления – для того, чтобы результаты расчета по математической модели достаточно хорошо совпадали с реальностью, а, во-вторых, математическая модель должна быть разрешимой, должна допускать конкретное, доведенное до конца решение, которое можно было бы сопоставить с экспериментом. В выборе такой подходящей математической модели и заключается главная трудность работы прикладного математика, а в преодолении этой трудности и проявляется прежде всего его искусство. Действительно, бесчисленное количество плохих работ по прикладной математике отличаются от работ хороших присутствием одного из двух решающих недостатков: либо избранная автором математическая модель не соответствует в должной мере реальному процессу и поэтому все исследование бесполезно, либо избранная модель чрезмерно сложна и превышает возможности автора довести решение до конца. А.Н. Крылов умел избегать обоих этих недостатков и поэтому изучение его работ является столь поучительным для всех, работающих в области прикладной математики – тем более, что работы эти доступны, они собраны в опубликованном Академией Наук СССР в 1948-51 годах двенадцатитомном собрании его сочинений.

Еще одна характерная черта работ А.Н. Крылова, делающая его классиком прикладной математики – это доведение результатов до ясных, четких и понятных практических рекомендаций. «Чистые» математики часто ограничиваются формулировкой и доказательством теорем. В противоположность этому А.Н. Крылов при изложении своих результатов вообще не пользуется словом «теорема». Вместо этого он подробно и досконально объясняет читателю – почему, на каких основаниях выбрал он математическую модель; каким образом следует проводить вычисления по этой модели для того, чтобы получить согласие между вычислением и реальной действительностью, какие практические трудности могут встретиться в вычислениях и как лучше всего эти трудности преодолеть. Для работ прикладного характера такой способ изложения чрезвычайно важен.

В сочинениях А.Н. Крылова можно найти и его взгляды на преподавание прикладной математики, выраженные с присущей А.Н. Крылову яркостью и силой.

Во второй половине 19-го века наметилось расхождение в стиле преподавания математики в университетах и в технических учебных заведениях. Вот что писал об этом А.Н. Крылов в 1916 г.: «В последние 30-40 лет большая часть первоначальных положений и определений математических понятий подвергалась обстоятельнейшей критике, приведшей, с одной стороны, к уточнению этих понятий и полной логической строгости выводов, но, с другой стороны, – это уточнение привело к растянутости многих рассуждений, к утрате, так сказать, наглядной самоочевидности выводов.

В технической школе такая постановка преподавания противоречит самому духу школы, всей дальнейшей деятельности ее питомцев, самому ее назначению – прежде всего вырабатывать сметку, глазомер, решимость, веру в чертеж и в свидетельства чувств, а не ту как бы умственную трусость, которая заставляет изыскивать доказательства таких истин, которые технику кажутся до доказательства яснее, чем после такового».

Очень интересно говорил А.Н. Крылов и относительно объема сведений по математике, который необходимо давать в технической школе. Вот отрывок из его вступительной лекции, прочитанной в 1932 году для слушателей, желающих повысить знания по математике в Военно-морской академии: «Я сорок пять лет занимаюсь разными вопросами морского дела, требующими приложения математики. За это время некоторые разделы математики приходилось прилагать чуть ли не ежедневно, другие – раз в месяц, третьи – раз в год, а были и такие, которые мне понадобились один раз в сорок пять лет.

Представьте себе, что я стал бы читать все эти отделы, и вот вам что-либо из этих разделов понадобилось через 37 лет; поверьте, что вы к тому времени так это забудете, что вам придется это как бы вновь выучить, прежде чем прилагать.

Хотя вы и готовитесь быть профессорами в нашей академии, но вы и теперь, и в будущем будете работать над практическим делом, которое всегда требует не столько общих рассуждений, а конкретного ответа; значит, прежде всего надо уметь производить численные вычисления быстро и верно.

Численные вычисления вам понадобятся каждый день, поэтому методы их производства и должны быть усвоены в первую очередь.

В общем курсе вы изучали ряды и их общие свойства, но вы не имели практики в применении их к вычислениям с точки зрения быстрого и верного, с требуемой точностью, получения результата.

Вы мне не поверите, что в точнейшей из наблюдательных наук – астрономии – нет ни одной точной формулы: всегда пользуются приближенными и получают результат с требуемой степенью точности не только быстрее, но, если можно так выразиться, «вернее», нежели по точной формуле. Вот этим и придется пополнить то, что вы знаете о рядах; в практике с этим вы будете встречаться раз в неделю.

Надо будет также показать вам, как интегрировать с требуемой степенью точности любое обыкновенное дифференциальное уравнение; это вам будет встречаться по крайней мере раз в месяц, а то и чаще.

Раз в год будут вам встречаться обыкновенные дифференциальные уравнения, в которых требуется удовлетворить не только заданным начальным, но и заданным граничным условиям; мы постараемся пояснить и этот вопрос».

Конечно, перечень А.Н. Крылова отражает объем знаний по математике, требуемый прикладными задачами кораблестроения в современное А.Н. Крылову время. В другое время и для других специальностей перечень может быть и сокращен, и расширен.

Но неизменно плодотворной остается основная идея А.Н. Крылова: учить надо тому, что действительно потребуется в жизни; круг задач, с которыми будут повседневно сталкиваться выпускники учебного заведения, должен определять собой уровень и программу обучения.

(Заметим, что это положение отнюдь не является очевидным: такой яркий представитель университетской математики, как Карл Якоби (1804-1851) – мы будем говорить о нем подробнее в главе, посвященной вариационному исчислению – считал, например, что «единственная цель науки – это служить доблести человеческого ума» и что с этой точки зрения изучение теории чисел не менее важно, чем изучение дисциплин, раскрывающих нам картину мира).

Хотя замечания и пожелания А.Н. Крылова по преподаванию прикладной математики непосредственно адресованы высшим техническим учебным заведениям, они во многом относятся и к факультетам прикладной математики университетов. Действительно, положение этих факультетов двойственное: с одной стороны, они находятся в стенах университетов и над ними довлеют традиции университетского преподавания математики; с другой стороны – их выпускники будут сталкиваться со столь же конкретными прикладными задачами, как и выпускники технических вузов. В этих условиях учет исторического опыта поможет выработать правильный стиль преподавания.

С Петербургской математической школы берет начало всемирная известность и авторитет российской математики (а не только отдельных гениальных ученых, как ранее). Несколько позже не меньшую известность получила Московская математическая школа, а в двадцатом веке плодотворно работающие математические коллективы существовали во многих городах Советского Союза и России.

Некоторое общее представление об авторитете российской математической науки в разные годы можно получить из анализа состава Международных математических конгрессов, проводящихся регулярно каждые четыре года. Подробный анализ провел В.И. Арнольд («Вестник РАН», том 69, № 2, февраль 1999 г.). Вот некоторые результаты его анализа: в 1897 году, на первом конгрессе из 208 участников 12 человек было из России. В 1990 году на конгрессе в Киото из 15 математиков, удостоенных чести сделать пленарный доклад, четверо были представителями российской математической школы. На конгрессе 1994 года их было 3 из 16, на конгрессе 1998 года – ни одного.

В 1990 году из 139 докладчиков на секциях конгресса было 19 представителей российской математической школы (13,8 %), в 1994 году их было 14 из 156 (т.е. 9 %), в 1998 году – 26 из 168 (13,5 %), но из этих 26 только двое работали постоянно в России и еще шесть указали Россию как одно из мест своей работы.

Последнее десятилетие двадцатого века – это трудное время и для российской математики и для российской науки в целом. Будем надеяться, что в 21 веке работы российских ученых восстановят пошатнувшийся авторитет русской науки.

Глава 7. История некоторых примечательных теорем.

В данном разделе мы рассмотрим частный вопрос – историю доказательств трех примечательных теорем. Мы рассмотрим теорему Л. Эйлера о числе граней, вершин и ребер многогранника, теорему о числе красок, достаточных для раскрашивания карты («теорема о четырех красках») и совсем недавно доказанную Великую теорему Ферма.

Мы разберем эти теоремы потому, что на их примере делается особенно наглядным и ясным существо математического доказательства, да и историк их доказательств любопытна сама по себе.

1.Теорема Л. Эйлера о многогранниках

Каждый многогранник имеет определенное число граней (Г), вершин (В) и ребер (Р). Соотношение между ними подметил впервые Эйлер в 1750 г.; оно выражено формулой:

$$Г + В - Р = 2. \quad (1)$$

Зная методы работы Эйлера (а именно он из всех математиков писал о своих методах наиболее откровенно), нетрудно восстановить тот путь, которым Л. Эйлер пришел к формуле (1).Он начал с подсчета числа вершин, граней и ребер у конкретных многогранников (т.е. он начинал с «конкретного эксперимента»; между прочим, это и есть тот пункт, с которого начинается большинство математических открытий). Экспериментируя с конкретными многогранниками, Л. Эйлер мог составить, например, следующую таблицу:

Многогранники	**Г**	**В**	**Р**
Трехгранная пирамида	4	4	6
Четырехгранная пирамида	5	5	8
Трехгранная призма	5	6	9
Куб	6	8	12
Октаэдр	3	6	12
Икосаэдр	20	12	30
Додекаэдр	12	20	30

Внимательно рассматривая подобные таблицы, он и подметил соотношение (1).Это – обычный путь естествоиспытателя: от конкретного эксперимента – к обобщению. Однако для математики этого мало: формула (1) должна быть установлена не только для приведенных в таблице семи видов многогранников, но и для всех видов, а это означает, что формулу (1) надо доказать. Л. Эйлер дал доказательство формулы (1), но мы рассмотрим не доказательство Эйлера, а более совершенное доказательство формулы (1), данное Коши в 1811 г. Рассматривая его, мы особенно наглядно убедимся, что доказательство в математике является мысленным экспериментом – т.е. экспериментом, в котором мы отвлекаемся от ограничений, наложенных конечностью человеческой жизни, позволяющей пересчитать лишь очень ограниченное число предметов и т.п. Реально мы не можем пересчитать число ребер многогранника с миллиардом граней, но в «мысленном эксперименте» – в математическом доказательстве – мы это сделать можем.

Итак, рассмотрим доказательство, данное Коши в 1811г. Предположим, – предлагает Коши, – что многогранник будет полым, а поверхность его может растягиваться (например, она сделана из резины). Если вырезать одну из граней, то остальную поверхность можно растянуть на плоской доске. При этом грани и ребра могут деформироваться, но числа Г, Б, Р не изменятся; поэтому, если для исходного многогранника была справедлива формула (1), то для растянутой на доске «карты» из граней и ребер имеем: Г+В - Р = 1 (ибо одну грань мы удалили).

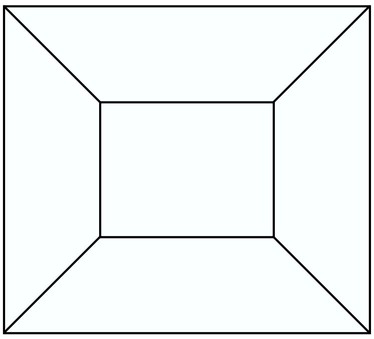

Рис. 4.

На рис. 4 показана карта для куба. Теперь проведем мысленно триангуляцию нашей «карты» – т.е. в тех гранях, которые не являются треугольниками, а являются n – угольниками, где n>3, мы проведем диагонали и разобьем их на треугольники (смотри рис.5)

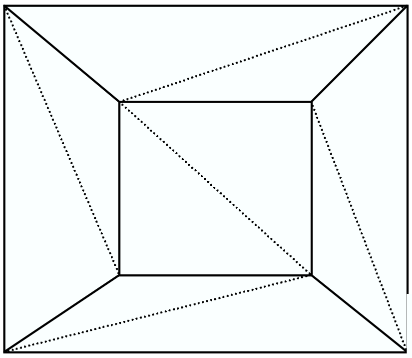

Рис. 5.

Проведя каждую диагональ, мы увеличиваем и Г и Р на единицу, поэтому сумма Г + В-Р не изменится. Теперь начнем вынимать из триангулированной карты треугольники один за другим. Вынимая треугольник, мы или вынимаем ребро, причем исчезают одна грань и одно ребро, или же вынимаем два ребра и вершину, и тогда исчезают одна грань, два ребра и одна вершина Таким образом, если было Г+В-Р=1 до выемки треугольника, то и после выемки будет Г+В– Р=1. Но вынимая треугольники один за другим, мы дойдем в конце концов (отвлекаясь от длительности этого процесса) до последнего треугольника. Но для него Г+Б- Р=1.Следовательно, и для исходной «карты» Г+В - Р=1, а для исходного многогранника
Г+В-Р=2 , и теорема Эйлера, – утверждает Коши, – доказана. Доказательство Коши (мы изложили лишь основные этапы его) было принято математиками без возражений; считалось, что оно «закрыло» проблему. Вот что писал, например, французский математик Жонкьер в «Трудах французской академии наук» в 1890 г. : «После доказательства Коши стало абсолютно несомненным, что изящное соотношение Г+В – Р=2 применимо к многогранникам любого вида, как и установил Л. Эйлер в 1752 г. В 1811 г.

вся нерешительность должна была исчезнуть». Немецкий математик Штейнер в 1626 г. дал другое доказательство теоремы Эйлера, отличное от доказательства Коши, но и он не сомневался, что теорема Эйлера верна.

Однако в общем случае теорема Эйлера не верна. Она не верна, например, для многогранника с полостью. Представьте себе куб из стекла, внутри которого расположен куб из железа (рис.6). Для каждого из кубов Г+В–Р=2, значит для куба с кубической полостью имеем Г + В–Р = 4. Это исключение из теоремы Эйлера заметил Женевский математик Люилье (Lhuilier, 1750-1840), опубликовавший свой результат в 1812-13 гг. Люилье заметил это исключение при рассмотрении минералогической коллекции кристаллов своего друга, профессора Пикте. В коллекции были представлены, в частности, кубические кристаллы сернистого свинца (непрозрачные), заключенные внутри прозрачных кристаллов полевого шпата. Рассматривая подобные кристаллы, Люилье заметил первое исключение из теоремы Эйлера, а затем подметил, что теорема Эйлера неверна также для многогранников типа «картинной рамы», топологически эквивалентных тору («бублику»), – для них Г + В–Р = 0 и для многогранников с кольцевыми гранями (рис.7 – «куб, на верхнюю грань которого припаян другой куб», – для него Г + Б–Р = 3).

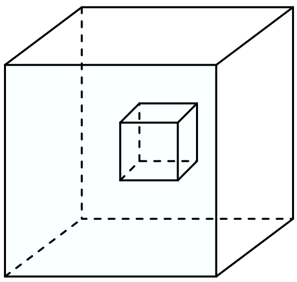

Рис. 6.

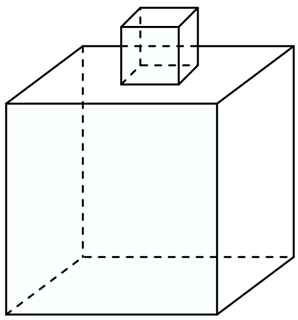

Рис. 7.

Заметим, что сам Люилье думал, что он нашел все исключения из теоремы Л. Эйлера. Однако в 1832 г. немецкий математик Гессель нашел новые исключения – это «многогранники-близнецы», спаянные вдоль общего ребра (рис. 8), или имеющие общую вершину (рис. 9).

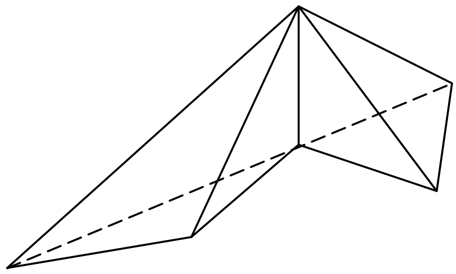

Рис. 8.

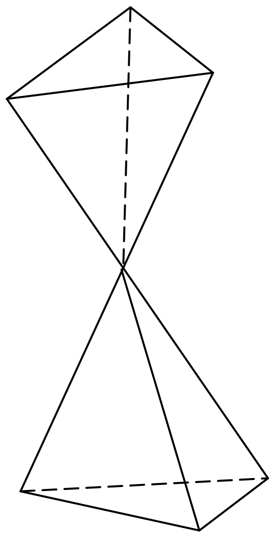

Рис. 9.

Эти примеры очень поучительны. Они показывают, что математическое доказательство (мысленный эксперимент) позволяет преодолеть некоторые ограничения, наложенные на реальный эксперимент (например, невозможность непосредственно пересчитать вершины и ребра у многогранника с 10^9 граней), но не может гарантировать абсолютной достоверности, поскольку мы не можем быть уверены, что наша мысль охватила все стороны рассматриваемого объекта.

В естественных науках мы уже привыкли к тому, что любой реальный эксперимент реализует лишь приближение к абсолютной истине, и процесс познания свойств любых достаточно сложных объектов бесконечен (или, во всяком случае, весьма длителен). История математики показывает нам, что мысленный эксперимент – математическое доказательство – не является исключением. Многогранники оказались достаточно сложным объектом для того, чтобы даже такие титаны математической мысли как Л. Эйлер и Коши могли полностью охватить в своем уме все возможные соотношения между числом граней, вершин и ребер. Эти соотношения зависят от топологических характеристик многогранника, но выяснилось это много позже.

Для понимания специфики математических теорем изучение истории математики необычайно важно. В обычном догматическом изложении математические теоремы выступают как «истины в последней инстанции», и лишь изучение истории наглядно показывает, что истинная природа математических утверждений (теорем) не отличается чем-то особым от утверждений в других областях науки. Как и в других областях науки, в математике познание истины происходит постепенно, в спорах и дискуссиях, в уточнении ранее считавшихся незыблемыми положений, и в каждый момент времени не так много утверждений (гораздо меньше, чем нам кажется) мы можем считать абсолютными истинами

На примере теоремы Эйлера о многогранниках все это выступает особенно наглядно.

Соотношение (1) справедливо лишь для многогранников, топологически эквивалентных сфере. Для всех других многогранников выполняются более сложные соотношения, но все это было понято далеко не сразу. Теореме Л. Эйлера посвящена замечательная книга: И. Лакатос «Доказательства и опровержения», с подзаголовком: «Как доказываются теоремы» (издательство «Наука», М.,1967) из которой взяты приведенные выше цитаты и которую мы рекомендуем вниманию читателя.

2.Теорема о четырех красках.

Любопытную судьбу имела и другая теорема топологии – «теорема о четырех красках», сформулированная Мёбиусом (*Möbius*, 1790 – 1868) в 1840 г. Формулировка этой теоремы также очень проста: теорема утверждает, что на сфере достаточно четырех красок для правильной раскраски любой возможной географической карты (т.е. такой раскраски, при которой любые две страны с общей границей не закрашены в один цвет). Мёбиус высказал эту теорему без доказательства, доказательство было опубликовано Кемпе в 1879 г. Оно было признано достаточным выдающимися математиками того времени, и теорема Мёбиуса считалась строго доказанной более десяти лет, пока в 1890 г. Хивудом не была обнаружена ошибочность доказательств Кемпе. С тех пор, несмотря на многочисленные и упорные попытки многих математиков, доказательство не удавалось построить вплоть до семидесятых годов двадцатого века, когда к поиску доказательства были подключены быстродействующие цифровые вычислительные машины. Найденное с их помощью доказательство (на этот раз, вроде бы, окончательное) было опубликовано в 1976 г.

На этот раз «мысленный эксперимент» – математическое доказательство – оказался столь сложен, что оказалась полезной и необходимой помощь вычислительных машин. Теорема о «четырех красках» оказалась первой, но, безусловно, не последней важной теоремой, доказанной уже не только человеком, но и машиной, а точнее - человеком, прибегнувшим к помощи вычислительной техники при доказательстве. [8)]

Более чем десятилетняя история существовании (опубликованного и хорошо известного)' ошибочного доказательства Кемпе подчеркивает трудность различения правильного и ошибочного доказательств.

3.Теорема Ферма.

Наиболее знаменитой теоремой в истории математики была, безусловно, так называемая «Великая теорема Ферма». Мы коротко уже говорили о ней в главе второй, но теперь расскажем подробнее.

Все началось с того, что в 1621 году была напечатана, чудом сохранившаяся, рукопись «Арифметики» древнегреческого математика Диофанта, о котором говорилось в первой главе. Эта книга была приобретена П. Ферма (Fermat, 1601-1665), который внимательно читал ее и сделал на полях 48 замечаний. Самое знаменитое из них звучало так: не существует равенства

$$x^n + y^n = z^n, \qquad (2)$$

где x, y, z - целые числа, а n – целое число, большее двойки. Ферма добавил: «я нашел этому поистине чудесное доказательство, но поля слишком узки, чтобы вместить его».

Записи Ферма на полях книги Диофанта были опубликованы уже после его кончины и вызвали большой интерес среди математиков, Так, Леонард Эйлер доказал утверждение Ферма для n=3 и n=4, воспользовавшись «методом спуска», который впервые предлагал еще Ферма для доказательства отсутствия решений ряда уравнений. Идея «метода спуска» не сложна: предположим, что равенство (2) для n=3 выполняется – т.е. существует тройка чисел x_1, y_1, z_1, для которых выполняется равенство

$$x_1^3 + y_1^3 = z_1^3. \qquad (3)$$

Далее следует попытаться доказать, что из равенства (3) вытекает существование равенства

$$x_2^3 + y_2^3 = z_2^3, \qquad (4)$$

где x_2, y_2, и z_2 меньше, чем x_1, y_1, z_1. Повторяя то же рассуждение, можно перейти от x_2, y_2, z_2 к еще меньшим числам x_3, y_3, z_3 и т.д. без конца. Но отсюда уже следует невозможность выполнения равенства (3), поскольку число целых чисел, меньших данного, всегда конечно.

При использовании «метода спуска» Эйлер использовал разложение разности $z^n - y^n$ на линейные множители

$$z^n - y^n = (z-y)(z-\varepsilon y)(z-\varepsilon^2 y)...(z-\varepsilon^{n-1}y), \qquad (5)$$

где ε является корнем степени n из единицы. Как известно, число таких корней равно n, один из корней – единица, вещественное число, остальные корни комплексные, по модулю равные единице и расположенные на комплексной плоскости в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность единичного радиуса.

Эйлер оперировал с множителями, входящими в разложение (5) как с обычными целыми числами и на этом пути доказал теорему Ферма для n=3.

В дальнейшем исследования Л. Эйлера были продолжены, и в 1847 году французский математик Ламе (*Lame*, 1795-1870) опубликовал полное, как казалось ему, доказательство великой теоремы для любых n. Возражения против доказательства выставил Лиувилль (Liouville, 1809-1882), указавший, что для чисел вида (5) не существует единственности разложения на простые множители – так например, $4 = 2\cdot 2 = (1+\sqrt{-3})\ (1-\sqrt{-3})$.

На достоверность доказательства Эйлера теоремы Ферма для частного случая n=3 не единственность разложения на простые множители не повлияла, но общее доказательство Ламе для любого n оказалось уже не справедливым.

Примерно в эти же годы и даже несколько раньше на это обстоятельство обратил внимание немецкий математик Эрнест Куммер (Kummer, 1810-1893), который работал над доказательством теоремы Ферма с 1837 года. Куммер сумел восстановить единственность разложения на множители путем введения нового математического понятия - идеальных множителей. С помощью нового понятия Куммер в ряде статей, опубликованных в 1847-1850 годах доказал теорему Ферма для всех $n \leq 100$, а точнее для всех n, которые не входят в числители $\frac{n-3}{2}$ первых чисел Бернулли.

«Идеальные множители» Куммера сыграли большую роль в дальнейшем развитии алгебры, и таким образом работа над доказательством теоремы Ферма существенно помогла развитию математики.

Однако дальнейшая история теоремы Ферма пошла по другому пути. Попытки доказательства теоремы для n>100 продолжались многими математиками. Один из них, Вольфскель из Дармштадта, скончавшийся в 1906 году, оставил завещание, в котором 100 тысяч марок оставлялись как премия тому, кто представит полное доказательство теоремы Ферма. Теорема сразу стала знаменитой (и, если можно так сказать – «напрасно знаменитой»). Посыпался целый поток «доказательств», в которых при внимательном анализе неизбежно обнаруживались ошибки. Но поток доказательств не иссякал.

В 1923 году в Германии разразилась крупнейшая инфляция, а затем – денежная реформа, В новых деньгах, введенных после реформы, 100 тысяч старых марок равнялись менее одной сотой новой марки – т.е. премия Вольфскеля потеряла денежную ценность. Тем не менее, «маховик» был уже разогнан, и теорема Ферма продолжала занимать умы многих людей, часто не знакомых с литературой и историей вопроса и старающихся справиться с задачей посредством какой-либо необычайной идеи. Поток доказательств не иссякал и очень затруднял работу математических институтов, сотрудникам которых приходилось тратить много времени на работу по выявлению ошибок в доказательствах людей, которых они называли «ферматистами». Сотрудники институтов всеми силами старались уклониться от этой работы. Я сам однажды в 1959 году был свидетелем того, как в Ленинградское отделение Математического института Академии наук СССР вошел пожилой человек в потертом костюме с горящими глазами и с толстой пачкой мелкоисписанных листов под мышкой. «Ферматист пришел ! Еще один ферматист пришел!», - пронеслось по коридорам института, и его сотрудники стали быстро покидать свои кабинеты и тихонько уходить через запасной выход. Тем, кто не успел уйти, пришлось слушать объяснения «ферматиста», а потом долго, неделями искать ошибку в длинном многостраничном доказательстве. Ошибку они тогда нашли.

Если подсчитать, сколько времени и энергии отняли и у самих «ферматистов» и у сотрудников математических институтов поиски доказательств теоремы и поиски ошибок в доказательствах, то получится огромная, потрясающая воображение цифра. На смену одним «ферматистам» приходили другие, а доказательство теоремы все не давалось в руки.

Новый поворот в деле доказательства теоремы Ферма произошел в 1955 году, когда молодой японский математик Ю. Танияма (1927-1958) сформулировал своеобразную гипотезу о свойствах так называемых эллиптических кривых – т.е. кривых вида

$$y^2 = x^3 + ax + b \qquad (6)$$

где a и b – целые числа.

Гипотеза Таниямы сперва не привлекла особого внимания, и 20 лет о ней мало вспоминали. Затем обнаружилось, что из этой гипотезы вытекают многие любопытные следствия. Самое важное следствие – из гипотезы Таниямы, по-видимому, вытекает теорема Ферма – обнаружил немецкий математик Герхард Фрей. Полностью доказать это следствие Г. Фрей не мог, но он опубликовал его в виде гипотезы, а в 1985 году американский математик Кеннет Рибет гипотезу Фрея доказал. Теперь оставалось сделать последний и самый трудный шаг – доказать гипотезу Таниямы.

В 1993 году американский математик Эндрю Уайлс из Принстона нашел доказательство гипотезы Таниямы и доложил его на конференции по теории чисел в Кембридже. Это был самый важный и решающий шаг в доказательстве – по сути дела в коллективном доказательстве - Великой Теоремы. Доказательство Уайлса, занимающее, кстати, 150 страниц текста, стали внимательно изучать – и обнаружили в нем ошибку. Однако Уайлс совместно с Р. Тейлором исправили ошибку, и летом 1995 года исправленное доказательство было опубликовано. Его еще раз придирчиво проверили, но на этот раз никто не нашел ошибки, и доказательство было признано достоверным. В 1998 году на Всемирном математическом конгрессе в Берлине Уайлс доложил свое доказательство. Все две тысячи делегатов конгресса пришли на его доклад, внимательно слушали и проводили докладчика дружными аплодисментами. В 350-летней истории теоремы Ферма была поставлена победная точка.[9)]

4. Заключение.

Знакомясь с историей математики, мы убеждаемся, как в разное время менялось отношение к роли доказательства в математике, к мере его строгости. Мы убедились, к примеру, что Л. Эйлер широко использовал наводящие соображения, неполные доказательства. Исследуя возможность разложения функции sinx в бесконечное произведение для вычисления сумм рядов вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2};\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \qquad (7)$$

и т.п., он использовал даже такие соображения, как совпадение первых шести знаков суммы, найденной им прямым вычислением, с теоретическим значением

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}. \qquad (8)$$

Эйлер прекрасно понимал, что проверка на совпадение первых шести цифр не является строгим доказательством, и поэтому выполнил не одну, а пять различных проверок (мы рассказали о них в главе 3). После того, как все пять проверок подтвердили (с разных сторон) справедливость формулы (8), Эйлер опубликовал свой результат.

Отметим, что Эйлер понимал важность строгих доказательств, но считал, что утверждение, выдержавшее пять различных проверок, во всяком случае заслуживает опубликования.

В 19 и 20 веках требования к строгости доказательств возросли и многие математики стали рассматривать доказательства как важнейшую, основную и центральную часть всей математики. С таким чрезмерным преувеличением роли доказательства, со стремлением к абсолютной строгости доказательств далеко не все математики были согласны. Известный английский математик Харди (Hardy, 1877-1947), много работ выполнивший с не менее известным Дж. Литлвудом (Littlewood, 1885-1977), писал в 1928 году: « строго говоря, такой вещи, как математическое доказательство, не существует; все, что мы можем сделать в конце анализа, это только показать; … доказательства представляют то, что Литлвуд и я называем газом, риторическими завитушками, предназначенными для воздействия на психологию, картинками на доске во время лекции, выдумками для стимулирования воображения учеников».

Действительно, даже очень старательно и скрупулезно проведенное доказательство совсем не гарантирует безусловной истинности доказываемой теоремы. Даже если все рассуждения были безупречными, это еще не является гарантией того, что мы охватили в своих логических построениях все существенные стороны рассматриваемого математического объекта. Так, в доказательстве Коши формулы Эйлера для многогранников сами по себе математические рассуждения Коши были безупречными и для многогранников, топологически эквивалентных сфере, они давали верный результат. Однако в 1811 году ни Коши, ни его современники, читавшие и обсуждавшие его доказательство, еще не видели своим умственным взором, что существуют другие многогранники, для которых теорема Эйлера уже не верна. Впервые это увидел Люилье, причем увидел не в переносном смысле, не в своем воображении, а увидел реально, своими глазами, в минералогической коллекции своего друга Пикте, где черный кристалл сернистого свинца просвечивал внутри прозрачного кристалла полевого шпата.

Аналогично и в доказательстве Коши выдвинутой им теоремы: «сумма сходящегося ряда непрерывных функций непрерывна», сами по себе математические построения были безупречны, и для равномерно сходящихся рядов были верны. Просто такое понятие, как бесконечный ряд, является понятием очень сложным и Коши в 1821 году еще не видел, что возможно существование рядов сходящихся, но не равномерно сходящихся, для которых его теорема не верна. Это увидел впервые в 1826 году Нильс Абель (увидел на этот раз не глазами, а воображением, умственным взором), а увидев, указал на исключения из теоремы Коши. Но полное понятие о равномерной сходимости рядов было выработано и окончательно прояснено еще много позже.

Поэтому не следует думать, что сколь угодно «строгое» доказательство непременно гарантирует абсолютную верность той или иной теоремы. «Абсолютно строгих» доказательств нет, но из этого совсем не следует, что доказательства не имеют смысла, и ими можно пренебречь. Доказательство дисциплинирует мысль, а хорошо выполненное доказательство чаще всего, обеспечивает верность теоремы, хотя исключения возможны и в истории математики неоднократно встречались.

Стремление к недостижимой «абсолютной строгости» вряд ли плодотворно. Необходимо стремиться к разумной строгости. Недаром А. Н. Крылов в своем предисловии к изданию в 1936 году университетских лекций П. Л. Чебышева писал, характеризуя издаваемый курс лекций, что П.Л. Чебышев «не задавался целью сделать свой курс безукоризненно строгим, а довольствовался тою разумною строгостью, которая, избавляя от ошибок, сообщает непреложность выводам».[10)]

Часть вторая.

Во второй части книги мы рассмотрим историю сравнительно небольшой области математики – развитие методов оптимизации, теории автоматического управления, теории некорректных задач – но рассмотрим их подробнее. Начав с семнадцатого века, мы доведем изложение вплоть до последнего десятилетия века двадцатого.
Таким образом, некоторые разделы второй части книги посвящены совсем недавней истории науки.

Вторая часть книги рассчитана, в основном, на аспирантов. Это определяет стиль изложения и оформления входящих в нее глав, несколько отличный от стиля изложения и оформления первой части.

Глава 8. Вариационное исчисление и теория оптимальных процессов (1687-1994).

Одной из важнейших задач прикладной математики является помощь в выборе и создании наилучших конструкций, наилучших прогнозов будущего, наилучших технических, экономических и финансовых решений.

Понятно то внимание, которое уделяется решению экстремальных задач, задач о поиске «максимумов и минимумов». Эти задачи стали предметом систематического исследования еще в семнадцатом веке.

Если подлежащая исследованию величина являлась функцией от некоторой переменной, то путь к решению открывало простое правило, которое теперь мы выражаем в виде: «значения переменной, доставляющие экстремум (максимум или минимум) разумно искать среди точек, в которых производная функции обращается в нуль». Однако еще в семнадцатом веке математикам стали встречаться задачи, где максимум или минимум исследуемого свойства зависели не от выбора того или иного значения независимой переменной, а от выбора функции в целом. Естественно, что новые задачи требовали и совершенно новых методов решения. Примером задачи такого типа, рассмотренной впервые еще Ньютоном в 1687 г., был выбор формы корпуса корабля, которая обеспечивала бы наименьшее сопротивление воды. Это – типичная вариационная задача. Однако, первым, кто подметил специфику нового типа задач на экстремум был швейцарский математик И. Бернулли (Bernoulli, 1667-1748). В июньском номере журнала «Acta eruditorium» за 1696 год Бернулли предложил математикам задачу о брахистотроне. Задача формулировалась так: среди всех линий, соединяющих две заданные точки, найти кривую, двигаясь по которой под действием силы тяжести, материальное тело прошло бы путь между ними за кратчайшее время.

Лейбниц решил эту, по его определению, «прекрасную, до сих пор неслыханную задачу» и попросил Бернулли предоставить математикам год времени для состязания в ее решении. Бернулли согласился и в январе 1697 г. вновь опубликовал свою задачу, сопроводив ее следующим воззванием: «Остроумнейших математиков всего мира приветствую я – Иоганн Бернулли! Людей высокого ума ничем нельзя больше привлечь к работе, как указав им трудную и вместе с тем почетную задачу, решением которой возможно и славу приобрести и оставить по себе вечный памятник. Я надеюсь, что заслужу благодарность всего ученого мира, если по примеру Паскаля, Ферма и других предложу лучшим математикам нашего времени задачу, которая даст им возможность испробовать, хороши ли те методы, которыми они владеют и как велика сила их ума. Если кто-либо найдет решение предложенной задачи и сообщит об этом мне, то я объявлю ему публично заслуженную хвалу».

Еще до истечения срока были даны три решения: одно принадлежало Якову Бернулли, другое – Лопиталю, третье было опубликовано без подписи автора. Иоганн Бернулли узнал автора «по его львиным когтям», как он выразился. Решение принадлежало И. Ньютону.

В последующие годы И. Бернулли, его старшим братом Яковом, Лейбницем и др. решались отдельные вариационные задачи. Однако честь создания единого метода вариационных проблем исключительно и безраздельно принадлежит Леонарду Эйлеру (L. Euler, 1707 – 1783).

Еще в 1732 г. (т.е., когда Эйлеру было всего 25 лет) им была выполнена работа «Общее решение изопериметрической задачи, взятой в самом общем смысле». В ней Эйлер рассматривает уже не отдельные частные проблемы, а вообще «задачи, где отыскивают кривые, обладающие максимальным или минимальным свойством».

В последующие годы Л. Эйлер не раз возвращался к вариационным проблемам и, наконец, в 1744 г. подвел итоги своей работы в большом трактате «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле». В 1934 г. вышел русский перевод этой замечательной книги – смотри [47], (список литературы приведен в конце восьмой главы. Цифры в квадратной скобке обозначают номер в этом списке).

В отличие от своих предшественников, Эйлер рассматривает конкретные вариационные задачи как частный случай общей проблемы: «найти кривую *y(x)*, доставляющую экстремум некоторому «интегральному выражению» вида:

$$W = \int_{x_0}^{x_1} Z(x; y; \dot{y}; \ldots y^{(n)}) dx, \tag{1}$$

т.е. в нашей терминологии – функционалу, зависящему от независимой переменной *x*, искомой функции *y* и ее производных вплоть до произвольного порядка».

Эйлер нашел, что искомая кривая должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$Z_y - \frac{d}{dx} Z_{\dot{y}} + \frac{d^2}{dx^2} Z_{\ddot{y}} - \ldots = 0 . \qquad (2)$$

При выводе уравнения (2) Эйлер приближенно заменял искомую кривую y(x) на ломаную линию с вершинами в точках $y_0; y_1; \ldots y_{n-1}$ (рис.10).

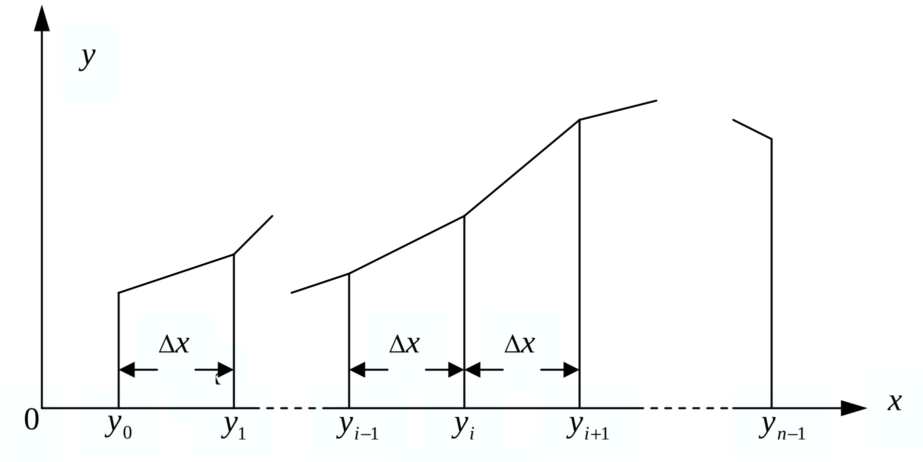

Рис. 10.

При этом «интегральное выражение» (1) переходило в функцию *n* переменных:

$$W_n = \sum_{i=0}^{n-1} Z(x_i; y_i; \dot{y}_i) \Delta x , \qquad (3)$$

где $\dot{y}_i = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}$ (для определенности в дальнейшем рассматриваем частный случай, когда подынтегральное выражение зависит только от *x*, *y* и $\dot{y}$; с рассмотрения этого частного случая начинал и сам Эйлер). Если на ломаной линии достигается экстремум, то, как уже было хорошо известно во времена Эйлера, все производные $\frac{\partial W_n}{\partial y_i}$ должны быть равны нулю. Из всех членов суммы W_n от y_i зависят только два: член $Z(x_{i-1}; y_{i-1}; \dot{y}_{i-1})\Delta x$ и член $Z(x_i; y_i; \dot{y}_i)\Delta x$, причем член с индексами i зависит от y_i; как непосредственно, так и через третий аргумент $\dot{y}_i$, а член с индексами с *i-1* зависит от y_i только через третий аргумент: $\dot{y}_{i-1} = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}$.

Следовательно

$$\frac{\partial W_n}{\partial y_i} = Z_y(x_i; y_i; \dot{y}_i)\Delta x - Z_{\dot{y}}(x_i; y_i; \dot{y}_i) + Z_{\dot{y}}(x_{i-1}; y_{i-1}; \dot{y}_{i-1})$$

(Эйлер пользовался несколько отличными обозначениями), а это выражение можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial W_n}{\partial y_i} = \left[Z_y(x_i; y_i; \dot{y}_i) - \frac{\Delta Z_{\dot{y}}(x_i; y_i; \dot{y}_i)}{\Delta x} \right] \Delta x, \qquad (4)$$

где

$$\Delta Z_{\dot{y}} = Z_{\dot{y}}(x_i; y_i; \dot{y}_i) - Z_{\dot{y}}(x_{i-1}; y_{i-1}; \dot{y}_{i-1}).$$

Эйлер затем переходил к пределу при n→∞; Δx→0 и получал необходимое условие того, что на плавной кривой достигается экстремум – знаменитое уравнение

$$Z_y - \frac{d}{dx} Z_{\dot{y}} = 0, \qquad (5)$$

названное впоследствии уравнением Эйлера. Для общего случая, когда z зависит не только от $\dot{y}$, но от $\ddot{y}; y^{(3)}$ и вообще от производных любого порядка, Эйлер аналогичным путем вывел уравнение (2), за которым, однако, в дальнейшем закрепилось название «уравнение Эйлера-Пуассона». Исторически это неправильно, поскольку уравнение (2) было выведено и исследовано Эйлером в 1744 г., задолго до рождения Пуассона (Poisson, 1780-1840).

В дальнейшем, при решении конкретных примеров, Эйлер непосредственно пользуется формулой (2), сводя тем самым вариационную проблему к задаче интегрирования дифференциального уравнения. Таким образом, Эйлер создал алгоритм решения вариационных задач.

В том же трактате 1744г. Эйлер указал те частные случаи, (с тех пор неизменно приводимые в учебниках вариационного исчисления) когда интегрирование уравнения (5) упрощается и выполняется в квадратурах, (а именно: 1. Z не зависит явно от x, 2. Z не зависит явно от y, 3. Z зависит только от $\dot{y}$, 4. Z зависит от $\dot{y}$ линейно).

Помимо функционалов вида (1) Эйлер исследует также функционалы, являющиеся произведением, частным или вообще произвольной функцией от определенных интегралов W. (Интересно отметить , что эти важные для приложений функционалы уже не рассматривались в более поздних учебниках по вариационному исчислению. Когда мне пришлось столкнуться с практическими задачами, приводящими к подобным функционалам, то существенную помощь в решении этих задач принесло обращение к первоисточнику, к трактату Л. Эйлера [47]).

Наконец, Эйлер рассмотрел также задачи, в которых функция $y(x)$, доставляющая экстремум функционалу (1), должна была удовлетворять дополнительным условиям, например, длина кривой (т.е. ее периметр) должна быть равна заданной длине L и дал общий алгоритм решения подобных (изопериметрических) задач.

Вообще, богатство содержания трактата, опубликованного Эйлером в 1744г., изумительно, хотя стиль изложения, разумеется, сильно отличается от современных стандартов. Предельный переход от условия (4) к уравнению (5) Эйлер не обосновывает, достаточных условий не рассматривает. Даже простое условие (знак выражения $Z_{\dot{y}\dot{y}}$), позволяющее отличать – достигается на решениях уравнения (5) максимум или минимум функционала – Эйлером не использовалось и было найдено Лежандром (Legendre, 1752-1833) лишь в 1786г. Вместо этого условия Эйлер каждый раз исследует физический смысл задачи и из анализа физического смысла заключает, будет ли разыскиваемая им кривая доставлять максимум или минимум. Вообще, надо подчеркнуть, что Эйлер смотрит на уравнение (2) не как на формальный алгоритм, который позволяет мозгу отдохнуть и заменить размышление и анализ конкретной задачи чисто формальными операциями. Для Эйлера уравнение (2) только помогает думать, и ценно тем, что позволяет сильно сократить круг функций «подозрительных» в отношении экстремума функционала (1). Коль скоро уравнение (2) найдено, то функции, доставляющие экстремум (если разумеется, он существует и достигается в классе кусочно-гладких функций) можно искать только среди его решений. Это резко сокращает круг поисков, но не заменяет целиком содержательного исследования задачи чисто формальными вычислениями. К этому Эйлер и не стремился; (поэтому критику уравнения Эйлера, приведенную, например, в [48], нельзя признать справедливой).

Возвращаясь к выводу уравнения (2), подчеркнем еще раз, что фактически Эйлер сводит вариационную задачу к задаче на обычный экстремум функции n переменных с последующим переходом к пределу. Законность предельного перехода Эйлером не обосновывалась.

Недостатки метода Эйлера, громоздкого даже для функционалов, зависящих от одной переменной, особенно резко ощущались при исследовании задач на экстремум кратных интегралов.

Создание метода исследования, специфического для вариационных задач – метода вариаций – связано с именем

Лагранжа (Lagrange, 1736-1813). Первое изложение своего метода Лагранж дал в письме к Эйлеру от 12 авг.1755г. Эйлер уже был тогда всемирное известным ученым, Лагранжу было 19 лет, и он еще не опубликовал ни одной научной работы. Эйлер немедленно ответил на письмо Лагранжа, горячо одобряя новый метод, и между ними установилась переписка, продолжавшаяся много лет. По рекомендации Эйлера Лагранж был в 1756г. избран иностранным членом Берлинской Академии. В письмах юного Лагранжа Эйлер нашел то, что он давно искал – простой и удобный аналитический метод исследования.

В последующие годы Эйлер интенсивно работал над усовершенствованием и развитием метода Лагранжа. Однако Эйлер не публиковал своих результатов, ожидая публикации работ Лагранжа. 2 октября 1759г. Эйлер пишет. Лагранжу: «Твое аналитическое решение изопериметрической проблемы содержит, насколько я вижу, все, что только можно желать в этой области, и я чрезвычайно рад, что эта теория, которой после моих первых попыток я занимался едва ли не один, доведена тобою до величайшего совершенства.

Важность вопроса побудила меня к тому, что я с помощью твоего освещения сам вывел аналитическое решение; я, однако, решил скрывать это, пока ты сам не опубликуешь свои результаты, так как я никоим образом не хочу отнимать у тебя часть заслуженной тобою славы».

Работы Лагранжа были опубликованы в 1760-1762г.г. В них Лагранж вводит понятие о производной интегрального выражения (в современных терминах – функционала) и вводит по аналогии с дифференциалом d новый знак δ. Если функционал $\int_a^b F(x;y;\dot{y})dx$ достигает на кривой *y(x)* экстремума, то, считает очевидным Лагранж, имеем

$\delta \int_a^b F(x; y; \dot{y}) dx = 0$, и тогда $\int_a^b \delta F(x; y; \dot{y}) dx = 0$.

По аналогии с соотношением для дифференциалов:

$$dF = F_y dy + F_{\dot{y}} d\dot{y}, \tag{6}$$

Лагранж пишет

$$\delta F = F_y \delta y + F_{\dot{y}} \delta \dot{y}, \tag{7}$$

и тогда

$$\delta \int_a^b F(x; y; \dot{y}) dx = \int_a^b (F_y \delta y + F_{\dot{y}} \delta \dot{y}) dx. \tag{8}$$

Ко второму члену в формуле (8) Лагранж применяет интегрирование по частям:

$$\int_a^b F_{\dot{y}} \delta \dot{y} dx = F_{\dot{y}} \delta y \Big|_a^b - \int_a^b \delta y \frac{d}{dx} F_{\dot{y}} dx ,$$

и тогда получает окончательно:

$$\delta \int_a^b F dx = \int_a^b \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{\dot{y}} \right) \delta y dx + F_{\dot{y}} \delta y \Big|_a^b. \tag{9}$$

Приравняв нулю подынтегральное выражение, Лагранж получает уравнение Эйлера, а внеинтегральный член позволяет найти условия на концах искомой кривой.

Таким образом, метод Лагранжа позволил более просто вывести уравнение Эйлера, распространить его на кратные интегралы, а также позволил решать задачи на экстремум не только с закрепленными, но и со свободными концами искомой кривой.

Однако новый метод Лагранжа встретил холодное отношение современников и не сразу получил признание. Частично это было связано и с тем, что Лагранж важнейшую формулу (7) вводил просто по аналогии с известной из дифференциального исчисления формулой (6) и справедливость новой формулы (7) отнюдь не была очевидна;

поэтому новый метод и встретили с недоверием. Для его развития и популяризации снова много сделал Эйлер, который, в частности, и предложил назвать новый алгоритм Лагранжа методом вариаций, а математическую дисциплину, изучающую экстремумы интегралов – вариационным исчислением. Так она с тех пор и называется.

В своих работах, опубликованных в 1766г. Эйлер разъяснил, что в вариационном исчислении искомая кривая, доставляющая экстремум сравнивается с бесконечно близкой к ней кривой, причем вариации δy и $\delta\dot{y}$ есть не что иное, как бесконечно малые приращения *y(x)* и ее производной при переходе от искомой кривой к соседней. Выяснилось, что в методе вариаций изучается разность между значениями интегралов, взятых на искомой кривой и кривой, близкой к ней:

$$\Delta J = \int_a^b F(x; y+\delta y; \dot{y}+\delta\dot{y})dx - \int_a^b F(x; y; \dot{y})dx . \qquad (10)$$

Разлагая эту разность в ряд Тейлора, получаем:

$$\Delta J = \int_a^b (F_y \delta y + F_{\dot{y}} \delta\dot{y})dx + \frac{1}{2}\int_a^b (F_{yy}\delta y^2 + 2F_{y\dot{y}}\delta y \delta\dot{y} + F_{\dot{y}\dot{y}}\delta\dot{y}^2)dx ,$$

причем величины первого порядка малости относительно δy и $\delta\dot{y}$ составляют первую вариацию интеграла:

$$\delta J = \int_a^b (F_y \delta y + F_{\dot{y}} \delta\dot{y})dx , \qquad (11)$$

а величины второго порядка малости – вторую вариацию $\delta^2 J$.

Для существования экстремума необходимо, чтобы первая вариация интеграла равнялась нулю. Из условия $\delta J=0$, интегрируя по частям второй член в формуле (9), получаем снова уравнение (5). Так Эйлер разъяснил окончательно существо методов вариационного исчисления. Изучение знака второй вариации позволило в дальнейшем проанализировать достаточные условия экстремума.

Вторая вариация функционала подверглась детальному исследованию в работах известного французского математика, члена Академии наук Адриана Мари Лежандра (Legendre, 1752–1833).

С помощью интегрирования по частям, он привел вторую вариацию $\delta^2 J$ функционала $J = \int_a^b F(x; y; \dot{y})dx$:

$$\delta^2 J = \frac{1}{2}\int_a^b (F_{yy}\delta y^2 + 2F_{y\dot{y}}\delta y \delta\dot{y} + F_{\dot{y}\dot{y}}\delta\dot{y}^2)dx \tag{12}$$

к следующему виду:

$$\delta^2 J = \int_a^b (P\delta y^2 + R\delta\dot{y}^2)dx, \tag{13}$$

где $$P = \frac{1}{2}\left(F_{yy} - \frac{d}{dx}F_{\dot{y}y}\right); R = \frac{1}{2}F_{\dot{y}\dot{y}}.$$

Для того, чтобы функция *y(x)*, удовлетворяющая уравнению Эйлера и, следовательно, обращающая в нуль первую вариацию, доставляла минимум функционалу, необходимо, чтобы вторая вариация была положительна. Однако между вариацией искомой функции δy и вариацией ее производной $\delta\dot{y}$ всегда может оказаться выполненным неравенство

$$\delta y^2 << \delta\dot{y}^2, \tag{14}$$

(это может быть в том случае, если δy – функция малая, но достаточно быстро колеблющаяся; тогда $\delta\dot{y}$ может быть в любое число раз больше, чем δy). Но раз так, то необходимым условием положительности второй вариации будет условие

$$F_{\dot{y}\dot{y}} \geq 0, \tag{15}$$

и это условие тем самым необходимо для того, чтобы на функции *y(x)* достигался минимум функционала. Необходимым условием максимума будет неравенство обратного знака.

Лежандр пытался доказать, что выполнение усиленного условия (15) – неравенства $F_{\dot{y}\dot{y}} > 0$ – уже не только необходимо, но и достаточно для минимума функционала. Разберем подробнее эту поучительную ошибку Лежандра. Поскольку на концах кривой, при *y=a* и *y=b*, вариация δy обращается в нуль, то для любой дифференцируемой функции $\omega(x)$ будет:

$$\int_a^b (\delta y^2 \dot{\omega} + 2\delta y \delta\dot{y} \omega)dx = \int_a^b \frac{d}{dx}(\delta y^2 \omega) = 0\,. \qquad (16)$$

Поэтому, прибавив к правой части равенства (13) выражение (16), равное нулю, приведем вторую вариацию к виду:

$$\delta^2 J = \int_a^b [R\delta\dot{y}^2 + 2\delta y \delta\dot{y}\omega + (P + \dot{\omega})\delta y^2]dx\,, \qquad (17)$$

и попробуем подобрать функцию $\omega(x)$ так, чтобы из выражения в квадратных скобках можно было бы выделить полный квадрат. Пусть функция $\omega(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$R(P + \dot{\omega}) = \omega^2 \qquad (18)$$

Тогда, подставив (18) в (17), получим:

$$\delta^2 J = \int_a^b \left[R\delta\dot{y}^2 + 2\delta y \delta\dot{y}\dot{\omega} + \frac{\delta y^2 \omega^2}{R} \right] dx = \int_a^b R\left[\delta\dot{y}^2 + \frac{\delta y \omega}{R} \right]^2 dx\,. \qquad (19)$$

Формула (19) свидетельствует, считал Лежандр, что знак второй вариации совпадает со знаком выражения $R = F_{\dot{y}\dot{y}}$, и поэтому выполнение неравенства $F_{\dot{y}\dot{y}} > 0$ достаточно для того, чтобы функция *y(x)*, удовлетворяющая уравнению Эйлера, доставляла минимум функционалу.

Решающие возражения против утверждения Лежандра выставил Лагранж в 1797г. Он заметил, что доказательство Лежандра основано на допущении: если подынтегральная функция на некотором интервале положительна, то и определенный интеграл, взятый на этом же интервале, будет положительным. Однако это допущение верно лишь в том случае, если подынтегральная функция на рассматриваемом интервале конечна (т.е., если интеграл – «собственный»). Если же подынтегральная функция хотя бы в одной точке обращается в бесконечность, то интеграл от нее (теперь это уже будет «несобственный» интеграл) может быть и отрицательным. И Лагранж привел пример интеграла от положительной функции:

$$\int_a^b \frac{dx}{(1-x)^2} = \left.\frac{x}{1-x}\right|_a^b , \tag{20}$$

который становится отрицательным при $a = 0.5; b = 2$. Следовательно, для уверенности в положительности второй вариации надо удостовериться, что функция $\omega(x)$ – решение уравнения (18) – конечна на всем интервале $a \le x \le b$, а это справедливо далеко не для всех P и R. Так, если $R=-1$ и $P=1$, то уравнение (18) принимает вид $\dot{\omega} + 1 + \omega^2 = 0$, откуда $\omega = tg(c-x)$, и в точках $x = c + \frac{2k+1}{2}\pi$ функция $\omega(x)$ обращается в бесконечность. После возражений Лагранжа стало ясно, что условие Лежандра само по себе еще не гарантирует существования экстремума.

Следующий важный шаг в исследовании вариационных задач был сделан немецким математиком Карлом Якоби (Jacobi, 1804-1851). Якоби родился в Потсдаме, в семье банкира, учился в Берлинском университете, сразу после окончания его начал работать в университете Кенигсберга, сперва доцентом, затем экстраординарным (с 1827г.), и ординарным (с 1831г.) профессором. Таким образом, Якоби был исключительно преподавателем. Мы уже отмечали ранее, что это характерно для 19 века; математики 18 века, как правило, соединяли преподавание с практической деятельностью в области прикладной математики. Это изменение бытия математиков не могло не отразиться на изменении их сознания и в этом отношении очень характерна полемика между Якоби и представителем предшествующего поколения Ж.Б. Фурье (Fourier, 1768-1830): «Господин Фурье, – говорил Якоби в своей речи в 1830г., – считал, что главной целью математики является общественная польза и объяснение явлений природы; но как философ он должен был знать, что единственная цель науки – это служить доблести человеческого ума и что поэтому какой-нибудь вопрос теории чисел стоит не меньше, чем вопрос о системе мира».

Якоби отличался пылким и страстным характером. «Его избрание профессором Кенигсбергского университета, – рассказывает о нем Феликс Клейн, – натолкнулось на известные затруднения, потому, что каждому из членов факультета он успел сказать что-нибудь неприятное. В конце концов, все же победило неоспоримое значение его научных трудов».

В Кенигсберге Якоби быстро стал главой математической школы — кружка талантливых учеников, сплотившихся вокруг учителя и его идей. Мы еще будем упоминать в настоящей главе об учениках Якоби – Гессе и Клебше — продолжавших работу Якоби в области вариационного исчисления. «Влияние, которое имел Якоби на своих учеников, совершенно исключительно, — свидетельствует Ф. Клейн. — Самые упорные натуры подчинялись его образу мышления, он увлекал всякого к вершинам математического честолюбия, к пламенному интересу к указываемой им постановке очередной проблемы дня».

С той же страстностью Якоби принял участие в буржуазно-демократической революции в Германии в 1848г. Поражение революции омрачило последние годы Якоби, ненадолго пережившего ее; он скончался в 1851г.

Важность вклада, внесенного К. Якоби, в вариационное исчисление, заключается в том, что он впервые перешел от исследования изолированных кривых — решений уравнения Эйлера — (в дальнейшем эти кривые стали называться экстремалями) к исследованию семейств таких кривых, выходящих из одной точки, к исследованию поля. Якоби подметил (и опубликовал в 1837г.), что на экстремалях перестает достигаться экстремум интеграла

$$J = \int_a^b F(x; y; \dot{y})dx,$$

если бесконечно близкие экстремали, выходящие из точки a, пересекаются между собой ранее точки b. Таким образом, Якоби показал, что локальных условий – условий, проверяемых в каждой точке экстремали, таких условий, как уравнение Эйлера и неравенство Лежандра $F_{\dot{y}\dot{y}} > 0$ – недостаточно для обеспечения экстремума и необходимо дополнительное условие, относящееся к отрезку $a \le x \le b$ в целом; это условие (называемое с тех пор условием Якоби) заключается в том, что экстремаль, соединяющая точки a и b, не должна пересекаться с бесконечно близкими к ней экстремалями, выходящими из точки a.
Двадцать лет спустя, в 1857г. ученик Якоби Гессе (Hesse, 1811-1874) придал условию Якоби аналитическую форму и показал его связь с проблемой положительности интеграла (19).

Действительно, обозначим через $h(x)$ разность ординат между двумя бесконечно близкими экстремалями $y(x)$ и $y(x)+h(x)$. Так как $y(x)+h(x)$ является экстремалью и удовлетворяет уравнению Эйлера, то

$$F_y(x; y+h; \dot{y}+\dot{h}) - \frac{d}{dx} F_{\dot{y}}(x; y+h; \dot{y}+\dot{h}) = 0\,. \tag{21}$$

Воспользовавшись формулой Тейлора и сохраняя члены только первого порядка малости, получим

$$Ph - \frac{d}{dx}(R\dot{h}) = 0\,. \tag{22}$$

Это есть линейное дифференциальное уравнение относительно расстояния h между двумя бесконечно близкими экстремалями. Его называют уравнением Якоби. Условие Якоби пересечения экстремалей можно теперь выразить аналитически – как условие, что решение уравнения Якоби (22) с начальными условиями $h(a) = 0, \dot{h}(a) = 1$ не обращается в нуль внутри отрезка $a \le x \le b$.

Заметим, что если в уравнении Лежандра (18) произвести замену переменных

$$\omega = -\frac{\dot{h}}{h} R \tag{23}$$

то уравнение (18) примет вид:

$$Ph - \frac{d}{dx}(R\dot{h}) = 0\,, \tag{24}$$

т.е. перейдет в уравнение Якоби. Если $h(x)$ не обращается в нуль на отрезке $a \le x \le b$, то на этом отрезке существует и конечно (при $R>0$) решение $\omega(x)$ уравнения (18), а это и является (как уже было нами показано) достаточным условием положительности второй вариации.

Ученик Якоби Рудольф Клебш (Clebsch, 1833-1872) исследовал вторую вариацию у функционалов, зависящих от нескольких переменных и нашел условие различения максимума от минимума, обобщающее условие Лежандра.

Вариационные принципы

Условие Якоби позволило существенно уточнить понимание вариационных принципов, важность которых для построения механики была осознана в 18 веке. Впрочем, еще в 17 веке Пьер Ферма подметил, что закон преломления света можно вывести, если принять общий принцип: «природа действует наиболее легкими и доступными путями»; в соответствии с этим принципом луч света при движении в различных средах будет выбирать такой путь, движение по которому занимает кратчайшее время; определяя этот путь, мы получим закон преломления света.

В 18 веке Пьер Мопертюи (Maupertuis, 1698-1759), президент Берлинской академии наук, выдвинул более общий принцип: «Количество действия, необходимое для того, чтобы произвести некоторое изменение в природе, является наименьшим возможным». Этот принцип, действительно, позволил выработать общую точку зрения на многие законы природы. В настоящее время под «действием» понимают произведение энергии на время и «принцип наименьшего действия» записывают в следующей формулировке (несколько отличной от первоначальной формулировки Мопертюи), предложенной Гамильтоном (Hamilton, 1805-1865): «при движении тела в потенциальном поле на траектории движения достигает минимума «интеграл действия»:

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt, \tag{25}$$

где $L=T–U$, причем T – кинетическая энергия тела, а U - его потенциальная энергия. Так, в частности, для тела с массой m, движущегося в однородном поле тяготения $U=mgx$, где g – ускорение свободного падения, а $T = \frac{m}{2}\dot{x}^2$, и интеграл (25) принимает вид

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 - mgx)dt\right). \qquad (26)$$

Решив уравнение Эйлера для интеграла (26), найдем известный закон изменения ординаты x свободно брошенного тела: $x = v_0 t - g\frac{t^2}{2}$. Точно так же можно найти законы движения тел в самых разнообразных силовых полях. Все они вытекают из одного общего принципа. Однако при такой формулировке принципа наименьшего действия в нем остается известный налет теологии и мистики: получается, что брошенное тело уже в начальный момент времени, при $t=t_1$, «знает» как нужно ему двигаться, чтобы «интеграл действия» в пределах от t_1 до t_2 обратился в минимум. Сам Мопертюи не имел ничего против такого истолкования; наоборот, Мопертюи считал, что он нашел «математическое» доказательство бытия божия: кто же кроме Бога, доказывал Мопертюи, мог указать каждому телу при $t=t_1$ такое движение, которое приведет к минимуму «действия» на всем интервале $t_1 \le t \le t_2$.

«Не в мелких деталях, не в частях Вселенной, отношения которой мы слишком мало знаем, нужно искать Верховное Существо, – писал Мопертюи в 1746 г., – а в явлениях, всеобщность которых не подвержена никаким исключениям, а простота их полностью поддается нашему обозрению... »

«Я осмелюсь сказать – продолжал Мопертюи, - что открыл универсальный принцип, на котором основываются все законы... это – принцип наименьшего действия; принцип такой мудрый, такой достойный Верховного Существа... Законы Движения и Покоя, выведенные из этого принципа, являются точно теми, какие наблюдаются в Природе; мы можем восхищаться результатами применения этого принципа ко всем явлениям. Движение животных, произрастание растений, вращение Звезд являются только его следствиями и зрелище Вселенной становится еще более величественным, еще более прекрасным, еще более достойным своего Творца, когда становится известным, что небольшое число законов, наиболее мудро установленных, достаточно для всех ее движений... Какое удовольствие для человеческого ума, рассматривая эти законы, являющиеся принципом Движения и Покоя всех тел Вселенной, найти в них доказательство существования Того, кто ею управляет». (Цитирую по книге [8]).

Доводы Мопертюи вызвали в 18 веке большую полемику. Решающий удар по построениям Мопертюи нанесли результаты Якоби, показавшего, что действительное движение может не доставлять ни максимума, ни минимума интегралу (25), (а лишь обращать в нуль его первую вариацию), если на действительном движении не выполняется условие Якоби. Рассмотрим, для примера, движения тел, брошенных с одной и той же скоростью, но под различным углом к горизонту. Если этот угол больше 45°, то действительное движение тела по экстремали (параболе) не доставляет ни максимума, ни минимума интегралу (25), поскольку экстремаль в этом случае пересекается с экстремалями, бесконечно близкими к ней и условие Якоби не выполняется.

Принцип наименьшего действия более правильно называть «принципом стационарного действия» и формулировать следующим образом: на действительной траектории движения обращается в нуль первая вариация интеграла (25). При такой трактовке принципа наименьшего действия в нем не остается ничего теологического. Мы знаем, что многие законы природы могут быть записаны в форме дифференциальных уравнений. Но эти уравнения можно рассматривать как уравнения Эйлера для некоторого функционала. И тогда действительное движение тел, подчиняющееся этому дифференциальному уравнению, обязательно обратит в нуль первую вариацию функционала. А если вдобавок оказалось выполнено условие Якоби и $F_{\dot{y}\dot{y}} > 0$, то действительное движение доставит функционалу минимум – без всякого вмешательства Верховного Существа. Так, движение тела в однородном поле тяготения подчиняется уравнению

$$m\ddot{x} = mg \,, \qquad (27)$$

которое является – как легко проверить – уравнением Эйлера для функционала (26).

Таким образом, законы природы можно записывать в двух равносильных формах: в форме дифференциальных уравнений и в форме вариационного принципа, из которого эти уравнения будут следовать. Вторая форма записи является во многих случаях более удобной. Так, например, при записи в виде дифференциальных уравнений форма закона зависит от выбора системы координат, в то время как вариационный принцип сохраняет свою форму в любых координатах, что очень удобно. Так, если, например, кинетическая и потенциальная энергия системы (а с ними и их разность $L=T–U$), зависят от некоторых обобщенных координат q_i

и обобщенных скоростей $\dot{q}_i$, то из уравнений Эйлера для «интеграла действия» (25) непосредственно следуют знаменитые «уравнения Лагранжа»:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (28)$$

(уравнения второго порядка), сыгравшие столь большую роль в истории теоретической механики.

Вариационные принципы обладают большой эвристической ценностью. В частности, они послужили путеводной нитью при разработке основ квантовой механики (см. публикацию [8]).

В заключение рассмотрим один вариационный принцип, историю которого еще нельзя считать законченной. Известно, какую большую роль в понимании природных процессов играет второе начало термодинамики, которое можно сформулировать следующим образом: изолированная система стремится с течением времени к положению равновесия, в котором энтропия системы S максимальна, а скорость возрастания ее обращается в нуль. Однако второе начало термодинамики справедливо лишь для изолированных систем. Неизолированные системы – системы, которые обмениваются с окружающей средой энергией или веществом – не имеют равновесного состояния, в котором скорость возрастания энтропии обращалась бы в нуль. С течением времени они стремятся не к равновесному, а к стационарному состоянию. Естественно предположить, что стационарное состояние неравновесной системы характеризуется тем, что скорость возрастания энтропии в нем наименьшая по сравнению с нестационарными режимами — т.е. с течением времени скорость возрастания энтропии в неизолированной системе стремится к минимуму. Это предположение было выдвинуто в 40-х годах 20 века бельгийским ученым (родившимся в Москве в 1917г.) Ильей Романовичем

Пригожиным. В настоящее время предположение Пригожина считается доказанным и играет важную роль в современной физике. Однако, еще в 1966г. против предположения Пригожина был выставлен контр-пример [34]. Контр-пример относится к процессам теплопереноса, где скорость возрастания энтропии (в отличие от более сложных физических процессов) может быть вычислена аналитически.

Рассмотрим изотропную пластину, в которой температура является функцией координаты *x*. Одна сторона пластины *(x=0)* находится в контакте с источником тепла с абсолютной температурой T_1, вторая сторона *(x=1)* – в контакте с источником тепла с температурой T_2. Боковые стороны теплоизолированы. Выделим внутри пластины элементарный слой толщиной *dx*. Тогда через слой будет проходить поток тепла

$$J_q = \lambda \frac{dT}{dx} \quad ,$$

где λ – коэффициент теплопроводности. Вследствие того, что поток тепла входит в слой при температуре *T*, а выходит – при $T - \dfrac{\partial T}{\partial x} dx$, то интенсивность возникновения энтропии в элементарном слое, как известно, равна

$$\sigma = J_q \left(\frac{1}{T - \dfrac{\partial T}{\partial x} dx} - \frac{1}{T} \right) = \lambda \frac{1}{T^2} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 dx \quad ,$$

а скорость возрастания энтропии во всей пластине равна интегралу

$$J = \int_{x_1}^{x_2} \sigma dx = \lambda \int_{x_1}^{x_2} \frac{\dot{T}^2}{T^2} dx \, . \tag{29}$$

Теперь нетрудно проверить, что минимум интеграла (29) достигается при распределении температуры $T(x) = c_2 e^{c_1 x}$, отличном от стационарного распределения, когда

$$T(x)=c_1x+c_2.$$

Так, если $x_1=0$, $x_2=1$, $T(0)=1$, $T(1)=e$, то в стационарном режиме $T(x)=1+(e-1)x$ и скорость возникновения энтропии $J = \lambda \frac{(e-1)^2}{e} = 1.087\lambda$, в то время как в нестационарном режиме $T(x) = e^x$, удовлетворяющем тем же граничным условиям, скорость возникновения энтропии будет равна $J = \int_0^1 \lambda dx = \lambda$ – или более чем на 8% меньше, чем в стационарном. Очевидно, что предположение Пригожина о минимуме скорости возрастания энтропии в стационарном состоянии неизолированной системы неверно и нуждается в дополнении и уточнении.

Причина ошибки заключается в том, что, производя расчеты скорости производства энтропии сразу для гораздо более сложного случая трехмерного распределения температур, И.Р. Пригожин пренебрег для упрощения малым отличием знаменателя $T^2(x)$ в формуле (29) от постоянной величины и это привело его к неверному результату (смотри вывод «принципа Пригожина» в книге [14]).

Популярность принципа Пригожина связана с тем, что он дает очень общую характеристику выделения стационарных процессов из нестационарных в самых сложных системах, для которых сколько-нибудь полную математическую модель или систему уравнений выписать невозможно. Поэтому «принцип Пригожина» широко использовался как в общих рассуждениях о протекании процессов в сложных физических или биологических системах, так и для решения некоторых сложных технических задач. Однако именно в технических системах обнаружилась неверность решений, полученных при использовании «принципа Пригожина», что и заставило произвести его тщательную проверку.

Результаты проверки, опубликованные в 1966г. в [34], показали не универсальность принципа. Было доказано, что для систем, включающих теплоперенос, он не справедлив. Публикация [34] вызвала оживленную дискуссию. Наиболее интересным был ответ самого И.Р. Пригожина, опубликованный в монографии [13]. Признав, что в процессах теплопереноса минимум производства энтропии S действительно не достигается, авторы монографии [13] попытались спасти универсальность «принципа Пригожина» указанием на то, что в этих процессах в стационарном режиме достигает минимума производство так называемой «взвешенной энтропии», ST^2, равной произведению настоящей энтропии S (обычной энтропии физики) на квадрат абсолютной температуры T. Исследуя интеграл (29), нетрудно проверить, что производство «взвешенной энтропии» действительно минимально в стационарном режиме.

Однако «взвешенная энтропия» имеет и другую размерность и совсем другой физический смысл, чем настоящая энтропия. Так, в процессе выравнивания температуры соприкасающихся тел в процессе перехода тепла от горячего тела к холодному, настоящая энтропия S, как известно, растет, а взвешенная энтропия ST^2 – убывает. Кроме того, остается неясным, в каких процессах и в каких системах в стационарном режиме достигает минимума производство настоящей энтропии S, и в каких – «взвешенной энтропии». Поэтому переход к «взвешенной энтропии», означает, как было указано в [33], фактическое признание не универсальности «принципа Пригожина», который поэтому не имеет эвристической силы. Однако это не было признано явно и поэтому до последнего времени все еще широко распространено убеждение в универсальности принципа. Многие исследователи опираются на него и приходят к ошибкам. Так, в работе [37], исходя из этого принципа, выводилось распределение температур при поверхностном эффекте. Вывод недостоверен, поскольку не доказано, что в рассматриваемом случае принцип Пригожина справедлив. Как легко проверить путем исследования интеграла (29), принцип Пригожина не универсален даже для линейных систем и даже при малых отклонениях от равновесия.

Условный экстремум

Во многих случаях экстремум функционала отыскивается не среди произвольных функций (кривых), а в классе функций, удовлетворяющих дополнительным условиям. Подобные задачи называют задачами на условный экстремум и первые из них были известны еще в Древней Греции. Одна из наиболее знаменитых – это изопериметрическая задача, когда из всех кривых, имеющих одну и ту же длину, один и тот же периметр, – т.е. из всех изопериметрических кривых – ищут ту, которая ограничивает наибольшую площадь.

Как это часто было в Древней Греции, новую задачу сопроводили красивой легендой – рассказывали, что царица Дидона, основывая Карфаген, покупала у местных жителей землю для будущего города. Ей соглашались продать лишь участок земли, который можно охватить бычьей шкурой. Тогда Дидона разрезала шкуру на тонкие полоски, связала из них длинный ремень и расположила его так, чтобы охватить наибольшую площадь - т.е. решала именно изопериметрическую задачу, которую греки называли поэтому также «задачей Дидоны».

Метод решения изопериметрической и ей подобных задач был разработан Эйлером и опубликован в [47]. Эйлер рассматривал изопериметрические задачи общего вида – когда нужно найти функцию y(x), доставляющую экстремум функционалу

$$J_1 = \int_a^b F_1(x; y; \dot{y})dx$$

при условии, что другой функционал

$$J_2 = \int_a^b F_2(x; y; \dot{y})dx$$

равен заданному значению J_{20}.

Для решения этой задачи Эйлер предложил и обосновал мнемоническое правило: искомая функция должна удовлетворять уравнению Эйлера для вспомогательного функционала:

$$J = J_1 + \lambda_0 J_2,$$

где λ_0 – некоторая постоянная величина, которая потом определяется. Для «задачи Дидоны» нужно найти максимум площади, т.е. интеграла

$$J_1 = \int_a^b y dx$$

при заданном значении длины кривой:

$$J_2 = \int_a^b \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx .$$

Составляя и решая уравнение Эйлера для вспомогательного функционала

$$J = \int_a^b (y + \lambda_0 \sqrt{1 + \dot{y}^2})dx \ ,$$

получим уравнение экстремалей

$$(y - c_1)^2 + (x - c_2)^2 = \lambda_0^2 \ ,$$

(оно приведено у Эйлера в [47] на стр.350), где c_1 и c_2 – постоянные интегрирования, и убедимся, что это уравнение окружности радиуса λ_0. Если длина кривой равна s_0, то наибольшая площадь, охватываемая ею, равна $p = \frac{s_0}{4\pi}$ и достигается в том случае, если кривая является окружностью.

Теперь можно оценить, какого размера участок земли могла купить Дидона. Если считать, что площадь шкуры быка равнялась 4 м^2 и Дидона разрезала ее на ремни шириной 0,5 см, то длина ремня составила 800 метров, а площадь купленного участка $p = \frac{800^2}{4\pi} = 50100 м^2$, или примерно 5,01 гектар. На такой площади, действительно, можно основать город, так что греческая легенда, во всяком случае, правдоподобна. Если бы Дидона располагала ремень по контуру квадрата, то она получила бы участок площадью 40000 м^2 или на 21,5% меньше.

Помимо простейшей изопериметрической задачи с одним интегральным условием, Эйлер в [47] рассматривает и задачи, когда задано несколько подобных условий – т.е. когда требуется, чтобы несколько интегралов вида

$$J_i = \int_a^b F_i(x; y; \dot{y})dx$$

сохраняли заданное значение. В этом случае уравнение Эйлера составляется для вспомогательного функционала

$$J = J_0 + \sum_{i=1}^{n} J_i .$$

Не менее часто, чем интегральные условия, в практических задачах вариационного исчисления встречаются функциональные связи — когда, например, нужно найти две функции y(x) и z(x), доставляющие экстремум функционалу

$$J = \int_a^b F\,(x; y; \dot{y}; z; \dot{z})dx$$

при условии, что эти функции связаны между собой уравнением

$$\varphi(x;y;z)=0$$

называемым уравнением связи.

В 1788г. Лагранж, в своем трактате «Аналитическая механика» дал мнемоническое правило решения этой задачи: надо составить уравнения Эйлера для вспомогательного функционала

$$J_i = \int_a^b F_i(x; y; \dot{y}; z; \dot{z})dx + \varphi(x; y; z)\lambda(x)\,, \qquad (30)$$

где $\lambda(x)$ – некоторая, подлежащая определению, функция от x (множитель Лагранжа). Всего для определения трех неизвестных функций $y(x)$, $z(x)$ и $\lambda(x)$ получаются три уравнения – два уравнения Эйлера для функционала (30) и уравнение связи, позволяющие решить поставленную задачу. В той же работе 1788г. «Аналитическая механика» Лагранж рассмотрел и обобщения этой задачи – когда задано не одно, а несколько уравнений связи или когда в уравнения связи входят не только сами функции $y(x)$, $z(x)$ и т.п., но и их производные

Любопытно отметить, что первоначально знаменитое «правило множителей Лагранжа» было сформулировано именно для вариационных задач, и лишь 9 лет спустя, в «Теории аналитических функций» Лагранж формулирует его для задачи отыскания условного экстремума функции n переменных: для отыскания условного экстремума функции n переменных

$$f_0(x_1, x_2, \dots x_n)$$

при условиях

$$f_i(x_1, x_2, \dots x_n)=0;\ i=1,2, \dots .m,$$

надо составить вспомогательную функцию

$$L=f_0+\lambda_1 f_1+\ldots\lambda_m f_m,$$

где λ_1, $\lambda_2\ldots$ λ_m -числовые множители Лагранжа и для этой функции решать задачу на безусловный экстремум.

Вот подлинная формулировка Лагранжа из «Теории аналитических функций»: «можно высказать следующий общий принцип. Если ищется максимум или минимум некоторой функции многих переменных при условии, что между этими переменными имеется связь, задаваемая одним или несколькими уравнениями, то нужно к минимизируемой функции прибавить функции, задающие уравнения связи, умноженные на неопределенные множители, и искать затем максимум или минимум построенной суммы, как если бы переменные были независимы. Полученные уравнения, добавленные к уравнениям связи, послужат для определения всех неизвестных.»

«Правило множителей» Лагранжа входит во все курсы математического анализа, широко применялось и применяется для решения самых разнообразных задач оптимизации. И только в начале 20 века было замечено, что это знаменитое правило нуждается в уточнении. Рассмотрим простую задачу: найти минимум функции $f_0 = x_1 + x_2$ при условии, что $x_1^2 + x_2^2 = 0$. Здесь сразу видно, что единственным решением является $x_1=0$, $x_2=0$. В то же время составляя вспомогательную функцию

$$L = x_1 + x_2 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2),$$

и приравнивая нулю производные

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 1 + 2\lambda_1 x_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 1 + 2\lambda_1 x_2 = 0,$$

мы не получим правильного решения ни при каких конечных λ_1.

Причина достаточно ясна: уже само уравнение связи $x_1^2 + x_2^2 = 0$ дает единственное решение $x_1=x_2=0$ и вопрос о минимуме суммы x_1+x_2 теряет смысл.

Для восстановления справедливости «правила множителей» Лагранжа нужно писать вспомогательную функцию в виде

$$L=\lambda_0 f_0+\lambda_1 f_1+\ldots\lambda_m f_m,$$

и рассматривать случай $\lambda_0=0$ как особый, но возможный. То же самое справедливо и относительно изопериметрической задачи: если мы ищем экстремум одного функционала при заданном значении другого, но это заданное значение экстремально для второго функционала, то вариация искомой кривой невозможна, мнемоническое правило в его первоначальном виде теряет смысл, но его можно восстановить, если вспомогательный функционал записывать в виде:

$$J=\lambda_0 J_1+\lambda_1 J_2$$

и не исключать особого случая $\lambda_0=0$. На эти обстоятельства указывали Вейерштрасс в 1877 и более подробно немецкий математик А. Кнезер (Kneser, 1862-1930) в своем учебнике по вариационному исчислению, вышедшему в 1900г. Особый случай рассмотрен также авторами книги [1], которые подробно рассмотрели возникающие при этом трудности.

Для того чтобы реализовать оптимальное управление на практике, создать устройство, автоматически реализующее оптимальное движение при наличии погрешностей измерения, не полностью известных возмущающих сил и т.п., требовались иные, более сложные подходы, о которых мы расскажем в следующей главе.

Литература к главе 8.

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В, Оптимальное управление. М. Наука. 1979. 429 с.
2. Андреев Ю.Н.,Бутковский А.Г. Оптимальное управление нагревом массивных тел. Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1964. № 5.
3. Арис Т. Оптимальное проектирование химических реакторов. М. Изд-во иностранной литературы. 1967г.
4. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. М. Машиностроение. 1968.
5. Беллман Р. Динамическое программирование. И.Л. 1960.
6. Брайсон А., Хо Ю-Ши, Прикладная теория оптимального управления. М. Мир.1972. 544с.
7. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М. Наука. 1975.
8. Вариационные принципы механики. Сборник статей. Под редакцией Л.С. Полака. М.-Л. Физматгиз. 1959. 639с.
9. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. М. 1961. 228с.
10. Гернет Н.Н. Об основной простейшей задаче вариационного исчисления. С.-Петербург. 1913.
11. Гурман В.И. Вырожденные задачи оптимального управления. М. Наука. 1977.
12. Гюнтер Н М. Курс вариационного исчисления. Гостехиздат.1941.

13. Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М. Мир. 1973.
14. Гроот С. Мазур П. Неравновесная термодинамика. М. Мир. 1964.
15. Давыдов Б.Л. Перспективы и задачи теории рудничного подъема. Уголь. 1950. №11.
16. Отклики на статью Б.Л. Давыдова. Уголь.1951.№7.
17. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Приближенные методы решения экстремальных задач. Л. Изд-во ЛГУ,1968. 179 с.
18. Зубов В.И. Теория оптимального управления судами и другими подвижными объектами. Л. Судостроение.1966. 352 с.
19. Исследование оптимальных режимов движения ракет. Сборник переводов. Оборонгиз.1959.
20. Касумова Т.К., Сутрилина М.И. Оптимизация АРВ синхронных машин. Сборник «Оптимизация режимов работы электроприводов», Красноярск, 1990,с.173-187.
21. Кирин Н.Е. Вычислительные методы теории оптимального управления. Л. Изд-во ЛГУ.1968.143с.
22. Кротов В.Ф. Разрывные решения вариационных задач. Известия ВУЗ. Математика. 1960.№5,1961.№1.
23. Кротов В.Ф., Букреев В.З. Гурман В.И. Новые методы вариационного исчисления в динамике полета. М.Машиностроение.1969.446 с.
24. Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А. Курс вариационного исчисления. М.-Л.ГИТТЛ. 1950. 296с.
25. Моисеев Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем. М. Наука. 1971. 526с.
26. Олейников В.А. Оптимальное управление технологическими процессами. Л, Недра. 1982. 216с.
27. Охоцимский Д.Е. Энеев Т.М. Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли. Успехи физических наук. Т.63. вып.1 1957.

28. Панасюк А.И., Панасюк В.И. Асимптотическая оптимизация нелинейных систем. Минск. Изд-во БГУ. 1977. 266с.
29. Панасюк В.И. Оптимальное микропроцессорное управление электроприводом. Минск, Изд-во «Вышейшая школа» 1991, 167 с.
30. Панасюк В.И., Ковалевский В.Б., Политыко Э.Д. Оптимальное управление в технических системах. Минск. "Навука и техника". 1990, 272 с.
31. Петров Ю.П. Оптимальное управление электроприводом. Л. Госэнергоиздат. 1961. 187с.
32. Петров Ю П. Оптимальный режим остановки ядерного реактора. Атомная энергия. т.17.вьп.2. 1964. стр. 144-145.
33. Петров Ю.П. Вариационные методы теории оптимального управления. Л. Энергия. Первое издание — 1965, второе — дополненное -1977. 280с.
34. Петров Ю.П. К вопросу о принципе минимума скорости возрастания энтропии в стационарном режиме. Биофизика, 1966.т.11.№5.с.926- 928.
35. Петров Ю.П. Оптимальное управление электрическим приводом с учетом ограничений по нагреву. Л. Энергия. 1971. 143с.
36. Понтрягин Л.С. Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е Ф. Математическая теория оптимальных процессов, М.Физматгиз.1961. 391с.
37. Стеблев Ю.И. Условия минимальных потерь в теории поверхностного эффекта. Электричество,1983. №6.с.62-65.
38. Тарарыкин С.В., Тютиков В.В. Элементы структурной оптимизации электромеханических систем. Известия ВУЗ. Злектромеханика.1994. №1-1,с.25-31.
39. Трухаев Р.И. Хоменюк В.В. Теория неклассических вариационных задач. Л.1971.
40. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления.М.Наука.1978.

41. Хашимов А.А., Петрушин А.Д. Оптимальные режимы работы частотно-регулируемых асинхронных электроприводов, Ташкент. Изд-во «ФАН» 1990. 79с.
42. Цырлин А.М., Балакирев В.С., Дудников Е.Г. Вариационные методы оптимизации управляемых объектов. М. Энергия. 1976.
43. Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б. Оптимальное управление при случайных возмущениях. М. Наука. 1978.
44. Чистов В.П., Бондаренко В.И., Святославский В.А. Оптимальное управление электрическими приводами постоянного тока. М. Энергия.1968. 232с.
45. Шмыглевский Ю.Д. Вариационные задачи для сверхзвуковых тел вращения и сопел. Прикладная математика и механика. т .25.1962. вып. 1.
46. Шумилов В.Ф., Никитин В.К., Шумилова Н.И. Принцип стохастического оптимума в автоматизированном электроприводе. Электричество,1992. №1. с.31-34.
47. Эйлер Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле. М.Л. 1934, 600 с. (перевод трактата Л. Эйлера, изданного в Женеве в 1744г.).
48. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М. Мир. 1974. 488с.

Сильный экстремум. Разрывные экстремали и экстремали с вертикальными отрезками

Новый этап развития вариационного исчисления во второй половине 19 века связан с именем Карла Вейерштрасса. До Вейерштрасса не различались понятия сильного и слабого экстремума, хотя фактически обращение в нуль первой вариации являлось необходимым условием слабого относительного экстремума, поскольку значение функционала на экстремали сравнивалось с его значением на кривых, близких к экстремали в смысле близости первого порядка (близость первого порядка – это малость модуля разности, как между самими функциями, так и между их первыми производными; близость нулевого порядка – модуль разности между самими функциями мал, но максимум модуля расстояния между производными может и не быть малым).

Вейерштрасс впервые начал исследовать не только слабый, но и сильный экстремум — экстремум по сравнению с кривыми, находящимися в близости нулевого порядка.

Кроме того, до Вейерштрасса считали очевидным, что если функционал ограничен снизу и существует экстремаль, доставляющая минимум, то наименьшее значение функционала как раз и достигается на экстремали. Вейерштрасс показал, что если даже функционал ограничен снизу, то его наименьшее значение может достигаться вообще за пределами рассматриваемого класса функций. Вейерштрасс привел простой пример – функционал

$$J = \int_{-1}^{+1} x^2 \dot{y}^2 dx \tag{31}$$

с условиями на концах: $y(-1)=-1$; $y(1)=1$.

Этот функционал не отрицателен и ограничен снизу значением нуль. Однако ни на какой непрерывной функции, соединяющей точки $x=-1$; $y=-1$ и $x=1$; $y=1$ минимальное значение, равное нулю, не достигается, поскольку на любой непрерывной функции, соединяющей эти точки, будут участки, где при $x\neq 0$ будет $\dot{y}\neq 0$, и поэтому на любой непрерывной функции минимум функционала (31) достигаться не будет. Минимум будет достигаться за пределами класса непрерывных функций – а именно на разрывной функции: $y=-1$, для $-1\leq x<0$ и $y=1$ для $0\leq x\leq 1$, т.е. на функции, совершающей скачок при $x=0$.

Работы Вейерштрасса, продолженные в конце 19 века Д. Гильбертом (Hilbert, 1862-1943) завершили в основном построение здания классического вариационного исчисления. Дальнейшие работы были направлены на уточнение и дополнение отдельных частностей.

Так, например, Дюбуа-Реймон (Du Bois-Reymohd, 1831-1889) уточнил вывод уравнения Эйлера; он показал, что при его выводе нет необходимости делать допущение о непрерывности второй производной экстремали; используя лемму, доказанную Дюбуа-Реймоном, можно показать, что на тех интервалах, где $F_{\dot{y}\dot{y}}$ сохраняет знак, вторая производная экстремали непрерывна.

В 1958–61г.г. Вадим Федорович Кротов (родился в 1932 году) уточнил вопрос о классах кривых, на которых может достигаться экстремум простейшего функционала

$$J=\int_a^b F(x;y;\dot{y})dx\,.$$

Пример функционала (31), рассмотренного еще Вейерштрассом, показывает, что экстремум может, вообще говоря, достигаться на разрывных функциях или (если дополнить функцию в точке разрыва вертикальным отрезком) может достигаться на кривых с вертикальными отрезками. В.Ф. Кротов поставил вопрос, — когда, в каких случаях экстремум функционала $J = \int\limits_a^b F(x; y; \dot{y})dx$ будет достигаться в классе кусочно-гладких функций, и когда – в классе функций кусочно-непрерывных, имеющих разрывы. В.Ф. Кротов показал, что ответ на этот вопрос определяется поведением функции:

$$W(x; y) = \lim_{\dot{y} \to \pm\infty} F(x; y; \dot{y}) \cdot \frac{1}{\dot{y}}, \qquad (32)$$

которую правильно будет назвать критерием Кротова. Возможны следующие случаи:

1. Не существует ни правого, ни левого конечных пределов критерия (32) — т.е. при $\dot{y} \to \infty$ будет W→+∞, а при $\dot{y} \to -\infty$ — соответственно W→–∞, или наоборот.

В этом случае экстремум может достигаться только на кусочно-гладких функциях, вертикальных отрезков у кривых, доставляющих экстремум, быть не может.

2. Правый и левый пределы существуют в конечном числе точек внутри интервала $a \le x \le b$. В этом случае кривая, доставляющая экстремум, может в этих точках – и только в них – иметь вертикальные отрезки.

3. Правый и левый пределы существуют в любой точке интервала $a \le x \le b$. В этом случае экстремум может достигаться на кривых, имеющих в общем случае любое число вертикальных отрезков. Такие кривые могут иногда носить необычайно причудливый характер (примеры приведены в [33], стр. 94-100). Основная идея доказательства может быть изложена следующим образом: предположим, что экстремум функционала $J = \int\limits_a^b F(x; y; \dot{y})dx$ достигается на кривой, имеющей при $x = x_0$ вертикальный отрезок от $y=y_1$ до $y=y_2$; его можно рассматривать, как предел наклонных прямых при $\dot{y} \to \pm\infty$ (рис. 11). Для вычисления значения функционала на вертикальном отрезке достаточно поменять ролями x и y, и тогда значение J_1 функционала на вертикальном отрезке будет равно

$$J_1 = \lim_{x_1 \to x_2} \int_{x_1}^{x_2} F(x; y; \dot{y})dx = \int_{y_1}^{y_2} \lim_{\dot{y} \to \pm\infty} F\left(x; y; \frac{1}{dx/dy} \right) \frac{dx}{dy} dy = .$$

$$= \int_{y_1}^{y_2} W(x; y)dy . \qquad (33)$$

Теперь сразу видно, что если, например, правый предел критерия Кротова (32) стремится к бесконечности, а левый — к минус бесконечности, мы можем сколь угодно близко от функции с разрывом в точке $x=x_0$ провести кусочно-гладкие кривые (с участком наклонной прямой, круто про

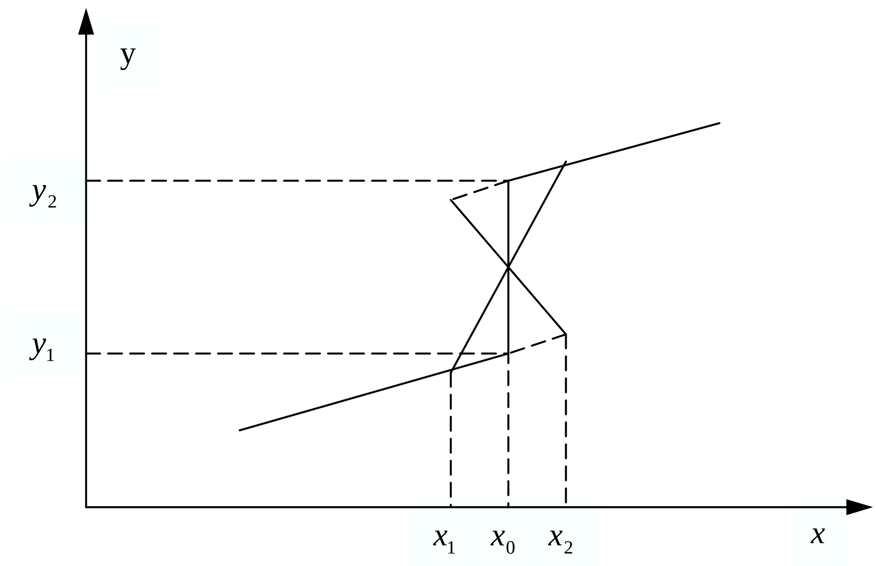

Рис. 11.

ходящей вблизи $x=x_0$), на которых значение функционала будет и сколь угодно велико, и сколь угодно мало. Следовательно, если не существует ни правого, ни левого пределов критерия (32), то экстремум функционала может достигаться только в классе кусочно-гладких функций.

Результаты В.Ф. Кротова удачно дополнили известные классические теоремы о простейшем функционале $J = \int_a^b F(x; y; \dot{y}) dx$, согласно которым изломы экстремали возможны лишь там, где $F_{\dot{y}\dot{y}} = 0$, а при $F_{\dot{y}\dot{y}} \neq 0$ экстремаль имеет непрерывную вторую производную. Теперь можно дополнительно утверждать, что разрывы на функции, доставляющей экстремум, возможны лишь в точках, где критерий (32) существует. Если же критерий (32) не существует при любых x, лежащих в интервале $a \leq x \leq b$, а функционал ограничен снизу, то минимум его при $F_{\dot{y}\dot{y}} > 0$ будет достигаться на гладкой функции, имеющей непрерывную вторую производную.

Впервые результаты В.Ф. Кротова были доложены им на Всесоюзном съезде математиков в Ленинграде в 1961г. Они встретили яростную критику участников съезда, дружно отвергавших их, как нестрогие, недостаточно доказанные, а некоторые даже утверждали, что результаты ошибочны. Благожелательно отнесся к В.Ф. Кротову лишь председатель секции, на которой В.Ф. Кротов делал доклад. «Напрасно вы так яростно нападаете на Кротова, – сказал он, обращаясь к участникам секции, — ведь пройдет несколько лет, и вы сами будете студентам на лекциях рассказывать его результаты. И ведь совсем не так отнеслись к нему Эйлер и Лагранж, если бы они могли сегодня присутствовать в нашем зале. Они сказали бы: «Молодец, коллега Кротов, ты нас продолжил». И действительно, уже в 1965г. результаты В.Ф. Кротова вошли в преподавание [33].

Экстремумы в замкнутых областях

Наиболее существенным из того нового, что внес 20 век в развитие вариационного исчисления, был переход к исследованию экстремумов в замкнутых областях, учет ограничений в виде неравенств, которым должны удовлетворять искомые функции и их производные. Без учета подобных ограничений было крайне трудно применять вариационное исчисление к решению прикладных задач, где подобные ограничения встречаются очень часто – можно сказать, – на каждом шагу. Практические потребности ставили перед вариационным исчислением новые задачи, требовали разработки новых методов решения – и новые методы были разработаны. Математики 18 века не рассматривали задач с ограничениями в виде неравенств. Впервые задача с ограничением была рассмотрена в 1831г. Гольдшмидтом, который рассматривал старую, известную еще Бернулли и Эйлеру, задачу об отыскании кривой $y(x)$ заданной длины с закрепленными концами, которая при вращении вокруг оси абсцисс образовала бы тело вращения с наименьшей поверхностью. В этой старой задаче Гольдшмидт заметил, то, что ускользнуло от внимания Эйлера: для того, чтобы задача имела смысл, искомая кривая $y(x)$ не должна заходить ниже оси абсцисс, то есть при отыскании кривой нужно учитывать ограничение $y\geq 0$. Наличие подобных неравенств резко осложняет задачу отыскания экстремума функционала, приводит к тому, что основной метод решения – сведение к интегрированию уравнения Эйлера – перестает работать. Действительно, наличие любого дополнительного неравенства $\varphi(x;y)\geq 0$ приводит к тому, что экстремум надо искать теперь в замкнутой области изменения переменной y(x), включающей в себя свою границу $\varphi(x;y)=0$. Пусть на некотором участке кривая, доставляющая экстремум, проходит по границе. Тогда для нее допустимой будет лишь односторонняя вариация, $\delta y>0$, а вариация $\delta y<0$ не допустима, ибо выводит искомую кривую за пределы допустимой области. Первую вариацию функционала δJ еще Эйлер и Лагранж умели приводить к виду

$$\delta J = \int_a^b \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{\dot{y}} \right) \delta y dx . \tag{34}$$

Если экстремум рассматривается в открытой области, то вариация δy является произвольной функцией и тогда из условия $\delta J \geq 0$ следует $F_y - \frac{d}{dx} F_{\dot{y}} = 0$ – т.е. выполняется уравнение Эйлера, позволяющее после интегрирования фактически определить искомую функцию $y(x)$. Однако в замкнутой области, при $\delta y>0$ из условия $\delta J \geq 0$ уже не следует уравнение Эйлера, а следует только, что

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{\dot{y}} \geq 0 \tag{35}$$

– т.е. получаем вместо уравнения всего лишь неравенство, не позволяющее определить однозначно искомую функцию $y(x)$.

Для того чтобы обойти возникшую трудность, Гольдшмидт заменой переменных преобразовал замкнутую область $y \geq 0$ в открытую. В дальнейшем так же поступали другие математики 19 века, которые время от времени сталкивались с задачами на экстремум с ограничениями. Однако каждый раз преобразовывать замкнутую область в открытую - весьма громоздко, причем трудности возрастают по мере усложнения структуры замкнутой области. Требовался единый алгоритм решения задач с ограничениями и этот алгоритм был разработан Надеждой Николаевной Гернет (1877-1943). Остановимся несколько подробнее на ее биографии, поскольку жизнь Н.Н. Гернет известна гораздо менее, нежели она заслуживает.

Отец Надежды Николаевны, Н.А. Гернет, представитель довольно известного дворянского рода Гернетов, был активным участником революционного движения, привлекался по делу Каракозова в 1866 г., отсидел некоторое время в Петропавловской крепости, затем был выслан сперва в Вологодскую, а затем в Симбирскую губернии. В Симбирске 23 апреля 1877г. и родилась Надежда Николаевна. По матери, урожденной Филатовой, она была родственницей А.Н. Крылова и А.М. Ляпунова. Возможно, что их пример оказал влияние на выбор Надеждой Николаевной жизненного пути. После окончания Симбирской гимназии в 1894г., она переезжает в Петербург, где учится на Высших женских курсах, а после окончания их в 1898 г. продолжает образование в Германии, в Геттингентском университете, под руководством Д. Гильберта. В 1901г. она представила диссертацию, посвященную вариационному исчислению, за которую была удостоена степени доктора философии с «наивысшей похвалой», и в том же году вернулась в Россию, где стала преподавать математику на Высших женских курсах. Именно в докторской диссертации Н.Н. Гернет (тема которой, безусловно, была подсказана ее руководителем, Д. Гильбертом), было начато исследование экстремума для функционалов, заданных в замкнутых областях.

В 1913г Н.Н. Гернет опубликовала книгу «Об основной простейшей задаче вариационного исчисления» [10] и представила ее к защите на степень магистра в Московский университет. Защитив в 1915г. диссертацию, Н.Н. Гернет стала второй в истории России женщиной – магистром математики русского университета.

В 1915г. Н.Н. Гернет избрали профессором Высших женских курсов, а в 1917г. после слияния их с университетом, Н.Н.Гернет стала профессором Петроградского (с 1924г. – Ленинградского) университета. В Ленинградском университете она работала до 1929г., а с 1930г. и до самой смерти в блокадном Ленинграде в 1943г., она преподавала в Ленинградском политехническом институте. Вся жизнь Н.Н. Гернет – женщины одинокой и незамужней – была отдана науке и преподаванию.

Основные научные результаты Н.Н. Гернет (помимо работ по исследованию ряда Лагранжа) относятся к вариационному исчислению. В этой области Н.Н. Гернет удалось добиться выдающихся результатов, которые не были по достоинству оценены при ее жизни.

В ее уже упоминавшейся книге «Об основной простейшей задаче вариационного исчисления» приведен общий алгоритм решения задач на экстремум в замкнутой области. Н.Н. Гернет рассуждала следующим образом: пусть требуется найти функцию y(x), доставляющую экстремум функционалу

$$J = \int_a^b F(x; y; \dot{y})dx \qquad (36)$$

при наличии ограничения

$$y \geq \varphi(x). \qquad (37)$$

Равенство $y=\varphi(x)$ очерчивает границу допустимой области. Для искомой функции $y(x)$ теорема Эйлера несправедлива. Н.Н. Гернет предложила изящную замену переменных: вместо переменной $y(x)$, она предложила ввести новую переменную $z(x)$, связанную с прежней равенством:

$$z^2 = y - \varphi(x). \qquad (38)$$

На новую переменную, $z(x)$, не наложено уже никаких ограничений. Границе области $y=\varphi(x)$ соответствует просто значение $z=0$; следовательно, для функции $z(x)$, доставляющей экстремум функционалу (36), переписанному к новой переменной z, теорема Эйлера будет уже справедливой. В то же время, после элементарных преобразований нетрудно установить, что уравнение Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial \dot{z}} = 0 \qquad (39)$$

для функционала (36), переписанного к переменной *z(x)*, принимает вид

$$z \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) = 0\,, \qquad (40)$$

т.е. распадается на два уравнения: *z=0* (граница допустимой области) и уравнение Эйлера для исходного функционала. Из уравнения (40) следует, что для функционалов (36) при наличии ограничения (37) справедлива обобщенная теорема Эйлера, сформулированная Н.Н. Гернет: если экстремум существует и достигается в классе кусочно-гладких функций, то он достигается на составных кривых, составленных из отрезков экстремалей и кусков границы допустимой области (разумеется, в частных случаях длина отрезков экстремалей или кусков границы области может и обращаться в нуль). Эту важную теорему будет справедливо называть (как было предложено в [33]) «теоремой Гернет». Обобщенная теорема Эйлера была доказана Н.Н. Гернет не только для простейшего неравенства (37), но и неравенств общего вида: $\varphi(x;y)=0$, а также – что особенно важно – для дифференциальных неравенств: $\varphi(x; y; \dot{y}) \ge 0$. Н.Н. Гернет установила также условия в точках перехода от экстремали к границе области и показала, что в точке перехода для всех функционалов, кроме вырожденных (т.е. таких, у которых $F_{\dot{y}\dot{y}} = 0$), касательные к экстремали и границе области должны совпадать. Это условие позволяет определить недостающие постоянные интегрирования в уравнениях отрезков экстремалей. Располагая обобщенной теоремой Эйлера и условиями в точках сопряжения, можно уже не преобразовывать в каждой конкретной задаче замкнутую область в открытую – поиск кривой, доставляющей экстремум, сводится теперь в основном к поиску точек сопряжения. Наконец, Н.Н. Гернет на основе преобразования неравенства Эйлера, установила важное неравенство (кривизна экстремали, проведенной касательно к границе области, не меньше кривизны границы в точке касания), помогающее установить структуру кривой, доставляющей экстремум, в случае сложной границы области.

Таким образом, Н.Н. Гернет разработала в 1913г. общий и удобный алгоритм решения задач на экстремум функционалов при наличии простых или дифференциальных неравенств, наложенных на искомые функции и их производные.

Интересна судьба научного наследия Гернет. Наиболее простые из ее результатов (случай конечных неравенств и невырожденных функционалов) вошли в учебники вариационного исчисления; остальные продолжали оставаться малоизвестными. Наиболее подробно проблема экстремума в замкнутых областях с включением многих результатов Н.Н. Гернет была рассмотрена в учебнике Н.М. Гюнтера (1871-1941) [12], но он вышел в свет всего за два месяца до начала страшной войны 1941-1945 г.г., в огне которой погибла большая часть тиража учебника. Да и сама книга «Об основной простейшей задаче вариационного исчисления», изданная малым тиражом в 1913г., быстро стала библиографической редкостью. В 1937г. некоторые из результатов Н.Н. Гернет были переоткрыты американским математиком Валлентайном, но и работы Валлентайна не пользовались большой известностью до 50-х годов 20 века, когда потребности быстро развивающейся теории управления поставили вариационные задачи в замкнутой области в центр внимания математиков. Только тогда обнаружилось, что такие важные проблемы, как отыскание наилучших законов движения и программ управления для ракет, искусственных спутников Земли и других технических объектов, могут рассматриваться как вариационные задачи, но при обязательном учете ограничений на сами искомые функции и их производные. Что же касается первой половины 20 века, то методы вариационного исчисления очень редко использовались в технике. Вариационное исчисление изучалось в университетах в основном для нужд физики, в технических учебных заведениях оно не преподавалось и для задач выбора наилучших конструкций, законов управления и т.п. почти никогда не использовалось. Использование вариационного исчисления, прежде всего, затруднялось тем, что технические задачи почти всегда приводили к необходимости поиска экстремума в замкнутой области; в распространенных учебниках методы решения таких задач почти не излагались, а работы Н.Н. Гернет и Валлентайна были практически неизвестны не только инженерам, но и большинству математиков. Во-вторых, существовал и трудно преодолимый психологический барьер, препятствовавший проникновению совершенно новых методов расчета в широкие круги инженеров. Возможно, что барьер этот был связан с тем, что вариационное исчисление излагалось лишь в университетских учебниках на весьма абстрактном уровне; инженерам оно часто казалось непонятной чистой математикой. Достаточно сказать, что когда в 1950г. профессор Б.Л. Давыдов в журнале «Уголь» опубликовал статью [15] , в которой он, пользуясь вариационным исчислением, нашел наивыгоднейшую диаграмму скорости подъема клети в шахте, (использование этой диаграммы могло принести существенный экономический эффект), то на следующий год в том же журнале были, опубликованы отклики [16] пяти авторов на эту статью, в которых самым непримиримым образом отвергались результаты Б.Л. Давыдова. Исчерпав технические аргументы, оппоненты Б.Л. Давыдова перешли к доводам политическим: «метафизическое отношение проф. Давыдова привело его к надуманной, абстрактной теории, которая применима как будто везде, а в действительности – нигде. Марксизм учит, что абстрактной истины нет, истина всегда конкретна», – так писали они в своем отклике. После опубликования этих резких отзывов Б.Л. Давыдов прекратил дальнейшую работу в области применения вариационных методов.

С трудными психологическими барьерами пришлось столкнуться и автору этих строк в конце пятидесятых годов в ходе работы по применению методов вариационного исчисления для оптимизации работы электрических приводов. Оптимизация позволила найти способы, существенно повышающие быстродействие и производительность электропривода, (изложено в монографии [31]) но внедрение этих способов затянулось на много лет и проходило далеко не гладко.

Психологический барьер меньше ощущался в совершенно новых областях техники — таких как ракетная и космическая техника. Не случайно, что именно в этих областях, начиная с 50-х годов, стали особенно широко применяться новые вариационные методы, разработка которых связана, прежде всего, с именем академика Льва Семеновича Понтрягина (1908-1988). Столкнувшись с необходимостью (характерной для технических задач) отыскания экстремума в замкнутых областях, Л.С. Понтрягин разработал особый метод, получивший в дальнейшем широкую известность под не совсем удачным названием «принцип максимума». Название было связано с тем, что функция $u(t)$, доставляющая экстремум функционалу в замкнутой области, определяется в методике Л.С. Понтрягина из условия максимума гамильтоновой функции H по переменной u.

Отметим, что работы Л.С. Понтрягина по «принципу максимума» выросли в ходе его совместных исследований с выдающимся теоретиком и практиком систем управления Александром Ароновичем Фельдбаумом (1913-1969). А.А. Фельдбаум впервые в 1953-55 г.г. обратил внимание на специфику задач оптимизации для линейных систем, подметил, что управление в этом случае проходит целиком по границам допустимой области, скачком переходя от нижней границы к верхней, доказал лежащую в основе приложений теорему о числе переключений («теорема об «n» интервалах»), и привлек к этой проблеме внимание математиков.

«Принцип максимума» был впервые выдвинут Л.С. Понтрягиным в качестве гипотезы в 1956г., и сразу же получил широкое применение в решении разнообразных технических задач оптимизации. Доказан «принцип максимума» был несколько позже.

Принципиальных различий между методами вариационного исчисления (с учетом результатов Н.Н. Гернет) и «принципом максимума» нет. Различия заключаются скорее в обозначениях и в методике доказательств, которые в «принципе максимума» много сложней. Теоремы «принципа максимума» относятся к объектам, дифференциальные уравнения которых записаны в нормальной форме Коши:

$$\begin{gathered} \dot{x}_1 = f_1(x_1;\ldots x_n;u) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1\ldots x_n;u), \end{gathered} \tag{41}$$

где u - функция, которую называют управлением. Ограничения наложены только на управление:

$$|u| \le 1, \tag{42}$$

а функционалом, минимум которого разыскивается, является время перехода объекта (41) из одного заданного состояния в другое. Л.С. Понтрягин предложил ввести промежуточную функцию

$$H = \sum_{i=1}^{n} \psi_i f_i \,, \tag{43}$$

где $\psi_I(t)$ - вспомогательные переменные, подчиненные уравнениям

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \,, \tag{44}$$

и доказал, что минимум времени перехода обеспечит управление, которое доставляет максимум функции Н (теорема о максимуме). В общем случае из теоремы о максимуме следует, что внутри допустимой области, очерченной неравенством (42), должно выполняться уравнение

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \,, \tag{45}$$

которое вместе с *n* уравнениями (41) и *n* уравнениями (44) позволяет определить *2n+1* функций (экстремалей) $x_1; \ldots x_n$, $\psi_1; \ldots \psi_n$ и $u(t)$, доставляющих экстремум внутри допустимой области. Для точек сопряжения экстремали и границы в [36] приведены «условия скачка», аналогичные условиям, найденным ранее Н.Н. Гернет.

Наиболее интересен случай, когда в уравнения (41) управление входит линейно, т.е. они имеют вид

$$\dot{x}_i = g_i(x_1; \ldots x_n) + u h_i(x_1; \ldots x_n) \,. \tag{46}$$

В этом случае, очевидно, что при наличии ограничения (42) максимум промежуточной функции Н достигается на границе области, а конкретно – на функции

$$u = sign \sum_{i=1}^{n} \psi_i h_i \,. \tag{47}$$

Все результаты легко обобщаются и на случай нескольких управляющих воздействий u_1, u_2, $\dots u_n$.

Собственно, именно частный случай управлений, входящих в уравнения (41) линейно, как раз и принес известность и популярность «принципу максимума». Этот частный случай часто встречается на практике и в то же время для него «теорема о максимуме» сразу позволяет определить структуру управления (47), а затем и точки переключения от $u=+1$ к $u=-1$ и наоборот.

Что же касается общего случая, когда уравнения (41) не линейны по u, то «принцип максимума» не вносит ничего более удобного, чем использование теоремы Н.Н. Гернет: точки перехода от экстремалей к границе допустимой области $u=\pm 1$ надо находить с помощью «условий скачка», а это сложнее, чем использование условий сопряжения, приведенных в [10] и [33].

Подробный сравнительный анализ достоинств и недостатков методов решения задач оптимизации, основанных на вариационном исчислении и на «принципе максимума» с указаниями, в каких случаях предпочтительнее использовать тот или другой метод, приведен в монографии [33].

Разработка Л.С Понтрягиным и его сотрудниками «принципа максимума», изложенного в [36], явилась важным и высоко оцененным вкладом в науку. Отрицательную роль сыграло приведенное в [36] на стр. 264-265 утверждение о непригодности методов вариационного исчисления для решения задач оптимизации в замкнутых областях, поскольку диссертация Н.Н. Гернет [10] и учебник Н.М. Гюнтера [12] остались, по-видимому, неизвестными Л.С. Понтрягину. Надо отметить, что Л.С. Понтрягину многие и неоднократно указывали на ошибочность его утверждений о вариационном исчислении, приведенных в [36] на стр. 264-265, (я сам писал об этом Л.С. Понтрягину в 1962г. и ответа не получил). Однако, несмотря на все эти возражения, утверждение о невозможности для вариационного исчисления решить задачи на экстремум в замкнутой области в неизменном виде повторялось во втором и во всех последующих изданиях монографии [36]. А ведь авторитет Л.С. Понтрягина был велик и вполне заслужен.

Возникает интересный вопрос: почему Л.С. Понтрягин отказывался исправить свое неверное суждение о возможностях вариационного исчисления, несмотря на то, что многие знающие люди указывали ему на ошибку? Согласно одному из устных рассказов, на предложения исправить ошибку, Л.С. Понтрягин отвечал: «монография [36] – это классика. А классику не исправляют».

В результате в СССР имел место известный перекос: методикой «принципа максимума» пользовались даже при решении тех задач, в которых методы вариационного исчисления вели к цели гораздо быстрее и проще.

Так, например, в 1965г. в журнале «Электричество» была опубликована статья, автор которой для отыскания оптимального управления электроприводами прокатного стана применил сложный аппарат «принципа максимума», не справился с ним и допустил ошибку. Я написал тогда письмо автору статьи, где указывал на ошибку и показал, как просто и легко можно получить правильный результат, использовав более простой аппарат вариационного исчисления. Автор статьи с негодованием ответил мне: «Но ведь академик Понтрягин доказал, что для задач с ограничениями вариационное исчисление непригодно». Ошибка так и не была исправлена. Таким образом, мы еще раз убеждаемся, что чрезмерное преклонение даже перед самыми заслуженными авторитетами (авторитет Л.С. Понтрягина вполне заслужен) может приносить вред. Для избежания ошибок нужно внимательнее изучать историю математики.

В США все происходило проще: результаты Н.Н. Гернет, как уже говорилось, были в 1937г. переоткрыты американским математиком Валлентайном ([33], стр.271). По-видимому, Валлентайн не был знаком с работами Н.Н. Гернет. Он также ввел замену переменных для преобразования замкнутой области в открытую, использовав замену, очень похожую на преобразование, использованное Н.Н. Гернет. Поэтому американские исследователи с самого начала успешно использовали методы вариационного исчисления для решения задач оптимизации, как в открытых областях изменения переменных, так и в замкнутых областях, при учете ограничений в виде неравенств [4, 6, 19], а «принципом максимума» пользовались только там, где он действительно выгоден и удобен.

Несколько позже Л.С. Понтрягина, американский математик Ричард Беллман (Bellman, 1920-1984) разработал еще один интересный метод оптимизации в замкнутых областях, получивший название «динамическое программирование». Монография Р. Беллмана под этим названием вышла в свет в 1957г., а в русском переводе – в 1960г. [5]. Методы Л.С. Понтрягина, Р. Беллмана и их многочисленные модификации в дальнейшем стали называть «неклассическими вариационными методами», или «теорией оптимального управления», противопоставляя их «классическому вариационному исчислению» [1, 48]. Оснований для такого противопоставления нет: мы убедились, что и в рамках классического вариационного исчисления были разработаны методы, позволяющие решать задачи на экстремум в замкнутой области и другие задачи оптимального управления. Другое дело, что специфика практических задач оптимизации заставила более подробно разработать те разделы вариационного исчисления, на которые до второй половины двадцатого века не обращали большого внимания.

Так, например, в известных учебниках [9, 24] лишь очень коротко и поверхностно рассматривались вырожденные функционалы – т.е. те функционалы, которые от первой (или от второй) производной искомой функции зависят линейно – т.е. имеют вид:

$$J = \int_a^b [M(x;y) + \dot{y}N(x;y)]dx, \tag{48}$$

или

$$J = \int_a^b [M(x;y;\dot{y}) + \ddot{y}N(x;y;\dot{y})]dx, \tag{49}$$

а между тем многие важные практические задачи приводят (рассмотрено подробно в [33]) именно к вырожденным функционалам, обладающим особыми свойствами.

Методы, позволяющие решать практические задачи оптимизации и оптимального управления, дополняющие классическое вариационное исчисление, с наибольшей полнотой изложены в монографии [33] (по инициативе Р. Беллмана был сделан ее перевод на английский язык, опубликованный в США в 1968г. и в Англии в 1969г.).

Так, например, там отмечено, что многие задачи оптимизации приводят к функционалам вида

$$J = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(t;x;\dot{x})dt, \tag{50}$$

т.е. к усредняемым функционалам с предельным переходом. Между тем для подобных функционалов несправедлива основная теорема вариационного исчисления и экстремум может достигаться не на экстремалях. Так, например, для простейшего из функционалов вида (50):

$$J = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2 dt, \tag{51}$$

уравнение Эйлера принимает вид: $2x = 0$ и ему удовлетворяет единственная экстремаль $x=0$, на которой функционал достигает своего минимального значения, равного нулю. Однако то же значение нуль функционал принимает и на многих других функциях — например, на функциях $x = t^k e^{-\alpha t}$, для любых $k \geq 0$, $\alpha > 0$, то есть на функциях, которые заведомо не удовлетворяют уравнению Эйлера и условиям максимума Понтрягина. Функционалы вида (50) требуют особого подхода, изложенного в [33].

С появлением методов, позволяющих отыскивать экстремумы в замкнутой области и основанных либо на теореме Н.Н. Гернет, либо на «принципе максимума», или на динамическом программировании, задачи оптимизации стало можно решать на основе вполне адекватного математического аппарата. Для успешного поиска оптимума стало требоваться уже не столько искусство математика, сколько хорошее знание особенностей рассматриваемой технической задачи, понимание того, какими факторами можно пренебречь, к каким последствиям это приведет и т.п.

Оптимальные законы управления были найдены сперва для объектов космической техники [19, 27] и электроприводов постоянного и переменного тока [15, 29, 31, 35, 41, 44, 46], а затем и для очень многих других систем и устройств. Работы [2, 3, 18–20, 23, 26, 27, 32, 38, 45] отражают лишь небольшую часть исследований в этой области.

Каждый раз переход на оптимальное управление позволял повысить эффективность оптимизируемых систем, сократить расход энергии и топлива.

В то же время надо заметить, что вариационные методы сами по себе позволяли найти лишь закон управления, программу изменения его как функции времени, но эта программа чувствительна к помехам, к неизбежным погрешностям измерений, при наличии которых программное управление очень трудно использовать.

Глава 9. Развитие теории автоматического управления (1868-2000 гг.).

Первоначальное развитие теории автоматического управления и регулирования было связано с решением конкретной технической задачи — обеспечить равномерность вращения паровой машины. В девятнадцатом веке – который недаром называют «веком пара» – эта задача имела первостепенное значение.

Еще великий изобретатель паровой машины Джемс Уатт (Watt, 1736-1819) разработал центробежный регулятор для поддержания постоянства частоты вращения машины. Если нагрузка паровой машины уменьшалась, то при неизменной подаче пара частота вращения вала резко и опасно возрастала. Регулятор Уатта состоял из двух тяжелых шаров на вертикальном валу, связанном с валом машины. Шары были стянуты между собой жесткой пружиной. При вращении вала центробежная сила, преодолевая упругость пружины, поднимала шары, а с шарами была связана заслонка на паропроводе, снижающая доступ пара в машину. Жесткость пружины подбиралась так, что при номинальной нагрузке на валу частота вращения равнялась заданной. При увеличении частоты вращения из-за уменьшения нагрузки, возросшая центробежная сила разводила шары, в результате заслонка уменьшала подачу пара, предотвращая большие отклонения частоты вращения от номинального значения. Регулятор Уатта являлся одним из первых регуляторов, работающих на принципе обратной связи по отклонению, поскольку именно отклонение текущей скорости вращения машины от заданной изменяло угол сдвига шаров, а тем самым и подачу пара на входе в цилиндры машины. Регуляторы с обратной связью являются основой автоматического управления до самого последнего времени.

К семидесятым годам девятнадцатого века в Англии работало уже примерно 75 тысяч регуляторов Уатта. Однако при настройке регуляторов инженеры сталкивались с трудностями: снабженные регуляторами машины часто приобретали необъяснимую склонность к самораскачиванию, а иногда переходили в режим самопроизвольно возрастающих колебаний, неминуемо приводившей к аварии. Изобретатели опытным путем нащупывали средства борьбы с неустойчивостью работы машин, снабженных регуляторами (одним из очень действенных средств оказался так называемый катаракт, т.е. устройство, осуществляющее воздействие - пользуясь уже современной терминологией- пропорциональное производной регулируемой величины), но ощущалась, разумеется, нужда в теоретическом исследовании, которое раскрыло и разъяснило бы суть происходящих при регулировании явлений и указало путь к построению хороших регуляторов. Такое исследование было выполнено великим английским физиком Джеймсом Клерком Максвеллом (Maxwell, 1831-1879), который в 1868г. опубликовал статью «О регуляторах». «Регулятор есть часть машины, посредством которой скорость машины поддерживается почти постоянной, несмотря на изменения движущего момента или момента сопротивления» – так начинается статья Максвелла.

В этой статье Максвелл указывает, что для правильного представления о работе регулятора надо учесть инерционность его элементов и составить уравнение колебаний, возникающих при отклонениях действительной скорости вращения машины от номинальной. При исследовании этого уравнения достаточно, однако, ограничиться случаем малых колебаний, ибо если малые колебания будут затухать, то они не разовьются в большие. Исследование же малых колебаний значительно проще, чем больших, и сводится к исследованию линейных дифференциальных уравнений, решения которых будут устойчивыми, если характеристический полином имеет корни только с отрицательными вещественными частями.

Таким образом, Максвелл показал, что устойчивость или неустойчивость машины, снабженной регулятором, зависит от корней характеристического полинома и для обеспечения устойчивости инженеру достаточно подобрать такие параметры регулятора, чтобы этот полином имел корни с отрицательными вещественными частями. Для полиномов третьей степени Максвелл непосредственно указал условия, обеспечивающие отрицательность вещественных частей корней, и одновременно он поставил перед математиками задачу – найти условия и методы проверки отрицательности вещественных частей корней для полиномов любой степени. Эта задача был решена математиками далеко не сразу. Только в 1877 году английский математик Раут (Routh, 1831-1907) дал метод проверки знака вещественных частей корней, получив за это премию Адамса. Заметим, что английская фамилия Routh на русском языке пишется иногда как «Раут» и иногда как «Раус». Поэтому и критерий отрицательности вещественных частей корней полинома, найденный впервые Раутом и усовершенствованный А. Гурвицем (о котором мы далее расскажем подробнее) называется иногда критерием Рауса-Гурвица, а иногда – критерием Раута-Гурвица; в обоих случаях речь идет об одном и том же критерии.

Работа Максвелла правильно наметила принципиальные пути, по которым в дальнейшем пошло развитие теории автоматического управления. В то же время на работе Максвелла сказалось то, что он был все же физиком, а не инженером. Максвелл не мог учесть специфики тех реальных задач, которые стояли перед техникой того времени, и поэтому его работа не оказалась использованной инженерами ни в самой Англии, ни на континенте.

Так, Максвелл считал единственными настоящими регуляторами только регуляторы астатические (регуляторы, которые при постоянной нагрузке дают, теоретически, нулевую ошибку), а регуляторы, которые мы называем статическими, считал просто «модераторами», т.е. уменьшителями колебаний, а не настоящими регуляторами. В то же время при тех параметрах паровых машин, которые были типичными во времена Максвелла, простые статические регуляторы давали вполне достаточную точность, а регуляторы астатические технически еще не могли быть реализованы. Не удивительно, что работа Максвелла не оказала влияния на современную ему технику. Основателем теории регулирования машин, получившей практическое применение в промышленности, по праву считается Иван Алексеевич Вышнеградский (1831-1895), основная работа которого – «О регуляторах прямого действия» - вышла в 1876г.

Весьма примечательна биография Вышнеградского. Он родился в 1831 г., в Вышнем Волочке, в семье священника, окончил духовную семинарию, а затем физико-математический факультет Педагогического института в Петербурге, после окончания которого в 1851 г. работал учителем математики в кадетском корпусе. Еще в Педагогическом институте Вышнеградский обратил на себя внимание преподававшего в институте академика М.В. Остроградского. Работая учителем, Вышнеградский одновременно глубоко изучал математику и механику под руководством Остроградского и в 1854г. защитил в Петербургском университете диссертацию на степень магистра математических наук (оппонентами были П.Л. Чебышев и О.И. Сомов). Крымская война 1854-55 г.г., обнаружившая техническую отсталость России – и, особенно, в области артиллерии – побудила Вышнеградского с особенной энергией заняться техникой артиллерийского дела, производства вооружения и боеприпасов.

Вышнеградский выступает одновременно и как преподаватель, автор популярных учебников, и как инженер-практик. В 1859 г. Артиллеристская академия посылает Вышнеградского в длительную заграничную командировку для знакомства с заводами и постановкой технического образования в Германии, Франции и Англии, а по возвращении из командировки, в 1862 г. Вышнеградский становится профессором практической механики Михайловской артиллеристской академии, а вскоре и профессором механики Петербургского технологического института, где читает курсы по машиностроению, машиноведению (грузоподъемные машины, токарные станки, паровые машины) и одновременно по прикладной механике, теории упругости, термодинамике. С 1875 по 1884 г. Выпшнеградский был директором Петербургского технологического института. Преподавание Вышнеградский совмещает с интенсивной деятельностью по перевооружению русской артиллерии. К этому же времени - 1876-1878 г.г. - относятся основоположные работы Вышнеградского по теории регулирования.

Однако, начиная с 80-х годов, жизненные устремления Вышнеградского начинают меняться. Он начинает принимать участие в управлении рядом железных дорог и промышленных предприятий, занимаясь уже не только технической стороной дела, но и финансами, входит в тесное общение с капиталистами – владельцами предприятий. Общение с ними постепенно меняет его личность и взгляды.

Постепенно Вышнеградский отходит от преподавания, передает свои курсы ученикам и все более и более погружается в финансовую и биржевую деятельность. С 1888г. Вышнеградский назначается министром финансов Российской империи и окончательно покидает науку. Умер Вышнеградский в 1895г.

Биография Вышнеградского дает нам очень редкий пример ученого, одаренного творческими способностями и все же изменившего научной работе ради богатства и власти; пример очень редкий, поскольку удовлетворение, получаемое от научной работы, обычно несравнимо с соблазнами богатства или политической власти. Но все же, как показывает пример И. А. Вышнеградского, соблазны эти иногда оказываются сильнее и отвлекают от науки.

Рассмотрим теперь основную работу И. А. Вышнеградского – статью «О регуляторах прямого действия». По своему содержанию она во многом схожа с рассмотренной нами работой Максвелла «О регуляторах». Независимо друг от друга и Максвелл и Вышнеградский пришли к выводу, что исследование устойчивости работы машины, снабженной регулятором, можно свести к исследованию корней характеристического уравнения ее малых колебаний.

Однако работа Максвелла, как мы уже указывали, не оказала влияние на практику проектирования реальных регуляторов, а работа И. А. Вышнеградского получила широкое практическое использование. Поэтому на примере классической работы И.А. Вышнеградского полезно рассмотреть те особенности, которые характерны для хороших работ по прикладной математике – таких работ, которые не «ложатся на полку» для того, чтобы мирно пылиться на ней, а получают практическое использование.

Во-первых, И. А. Вышнеградский, в отличие от Максвелла, исходил из хорошо ему известных параметров паровых машин того времени, поэтому его выводы и рекомендации подтверждались на практике и вызывали тем самым доверие инженеров.

Во-вторых, И. А. Вышнеградский не только провел теоретическое исследование работы регуляторов, но и сумел придать результатам своего исследования яркую, четкую, запоминающуюся форму.

Вышнеградский прекрасно понимал, что исследование по прикладной математике только тогда имеет смысл, когда оно доходит до потребителя, до инженера, а инженер может уделить любым работам по прикладной математике лишь очень небольшую долю своего времени. Инженер должен думать о многом, обращать внимание очень на многое, ибо инженерная деятельность необычайно многообразна; поэтому на работу по прикладной математике инженер сможет обратить внимание только тогда, когда в работе будут четкие, ясные, недвусмысленные рекомендации, допускающие непосредственную проверку. Вышнеградский это знал, и поэтому основные зависимости он выразил наглядным графиком – знаменитой «диаграммой Вышнеградского», а в конце статьи главные выводы своей работы сформулировал в виде лапидарных тезисов, которые и вошли в практику конструирования центробежных регуляторов под названием «тезисов Вышнеградского». Их обычно записывают в следующем кратком виде:

1. Без катаракта нет регулятора;
2. Без неравномерности нет регулятора.

Раскрывая содержание этих тезисов, Вышнеградский показывает, каким образом, используя катаракт и неравномерность, можно синтезировать хорошо работающий регулятор. Заметим, что хотя Вышнеградский в своих исследованиях в целом исходил из параметров существовавших тогда регуляторов, выводы его статьи относились не только к уже работающим регуляторам, но и указывали тенденции из развития. Так, во времена Вышнеградского еще работало немало регуляторов без катаракта; устойчивость таких регуляторов обеспечивалась за счет сил сухого трения между его элементами. Вышнеградский показал, что сухое трение, помогая устойчивости, в то же время очень плохо влияет на качество регулирования, его нужно всемерно уменьшать – и, действительно, в последующих конструкциях регуляторов сухое трение уменьшали. Но тогда необходимым условием устойчивости сделалось наличие катаракта – в полном согласии со знаменитым первым тезисом Вышнеградского – «без катаракта нет регулятора».

Продолжил и развил работы Ивана Алексеевича Вышнеградского выдающийся словацкий ученый и инженер Аурель Стодола (Stodola, l859-1942). Стодола родился в Словакии, входившей тогда в состав Австро-Венгерской монархии, в 1881 г. он закончил Цюрихский политехникум с дипломом инженера-механика и ряд лет работал инженером на заводах, занимаясь расчетом и конструированием паровых машин, гидротурбин, вентиляторов и воздуходувок. В 1892 г. ему было предложено возглавить кафедру машиностроения в Цюрихском политехникуме и он возглавлял ее до 37 лет до 1929г., когда по достижении предельного тогда 70-летнего возраста он вышел в отставку.

Основные работы А. Стодолы по автоматическому регулированию опубликованы в период 1893-1899г.г. В них А. Стодола распространил результаты И.А. Выппнеградского на регуляторы непрямого действия, где передвижение исполнительного механизма регулятора осуществляет не сам чувствительный элемент, а особый двигатель - сервомотор, имеющий самостоятельный источник энергии. Использование сервомоторов позволяло успешно решать задачи регулирования мощных машин и установок, но исследование устойчивости регуляторов непрямого действия приводило к необходимости анализа знака вещественных частей корней характеристических полиномов дифференциальных уравнений высоких порядков.

Полином произвольной степени можно записать в виде

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots a_0 . \qquad (1)$$

Стодола нашел очень простое необходимое условие того, что все корни полинома (1) имеют отрицательные вещественные части: если $a_n > 0$, то для всех остальных коэффициентов должны выполняться условия $a_i > 0$, т.е. среди коэффициентов не должно быть равных нулю или отрицательных (необходимое условие Стодолы).

Основные работы Д. Максвелла, И.А. Вышнеградского, Л. Стодолы по автоматическому управлению переведены на русский язык и опубликованы в книге [33] .

По просьбе Стодолы его товарищ и коллега по Цюрихскому политехникуму математик Адольф Гурвиц (Hurwitz, 1859-1919) нашел более сложные необходимые и достаточные условия: должны быть положительными все диагональные определители матрицы

$$\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$$

составляемой по следующему правилу: по главной диагонали снизу вверх выписываются последовательно коэффициенты от a_0 до a_{n-1}. Каждый столбец потом дополняется так, чтобы индексы возрастали на единицу сверху вниз от строки к строке. Коэффициенты с индексами больше n, где n – степень полинома (1), и меньше нуля заменяются нулями. Для полинома третьей степени

$$a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 \qquad (2)$$

условия Гурвица выглядят так: 1. все a_i – положительны и 2. $a_2a_1 > a_3a_0$ – т.е. произведение средних коэффициентов больше произведения крайних.

В честь А. Гурвица полиномы с отрицательными вещественными частями всех корней называют теперь гурвицвыми полиномами.

Вернемся к рассмотрению динамики паровой машины, снабженной регулятором Уатта. Обозначим через x отклонение частоты вращения от номинальной, а через u обозначим управляющее воздействие- т.е. отклонение заслонки на паропроводе , связанной с шарами, от положения ее при номинальном режиме. Тогда уравнения динамики паровой машины и регулятора в линейном приближении примут вид:

$$J\frac{dx}{dt} + k_1x = u + \varphi(t) \tag{3}$$

$$m\frac{d^2u}{dt^2} + k_2\frac{du}{dt} + k_3u = x, \tag{4}$$

где J – момент инерции на валу машины, $\varphi(t)$ – отклонение момента сопротивления на валу машины от номинального, m - масса шаров и связанной с ними заслонки, k_1, k_2 и k_3 - постоянные коэффициенты, из них k_2 – это коэффициент вязкого трения («катаракта» по старой терминологии) в регуляторе. В дальнейшем в теории автоматического управления утвердилась следующая терминология: уравнения вида (3), описывающие объект, назывались уравнениями объекта управления, уравнения вида (4), связывающие x и u, показывающие, как, каким образом, управление формируется на основе измерений x, измерений выхода, назывались уравнениями регулятора или уравнениями цепи обратной связи, уравнения (3) и (4) рассматриваемые совместно, назывались уравнениями замкнутой системы.

Исключая из (3) и (4) переменную *u*, получим дифференциальное уравнение третьего порядка для *x* (где $D = \frac{d}{dt}$):

$$[JmD^3 + (Jk_2 + mk_1)D^2 + (Jk_3 + k_2k_1)D + k_1k_3]x = \varphi(t) \qquad (5)$$

Из уравнений (3) и (5) следует, что если момент сопротивления изменился на величину $\Delta\varphi$, то при отсутствии регулятора частота вращения изменится (после затухания переходных процессов) на величину

$$\Delta x = \frac{\Delta\varphi}{k_1},$$

где $\frac{1}{k_1}$ – коэффициент .неравномерности машины без регулятора, а с учетом регулятора будет

$$\Delta x = \frac{\Delta\varphi}{k_1k_3},$$

где $\frac{1}{k_3}$ – коэффициент неравномерности регулятора. Для того, чтобы машина работала устойчиво, необходимо, чтобы характеристический полином уравнения (5) был гурвицевым, а для этого нужно, чтобы произведение средних коэффициентов было больше произведения крайних; но это возможно лишь если $k_1>0$; $k_3>0$, и $k_2>0$, откуда сразу и следуют уже упоминавшиеся знаменитые «тезисы Вышнеградского»: «без неравномерности нет регулятора», «без катаракта нет регулятора».

И.А. Вышнеградский предложил также ввести простую диаграмму – «диаграмму Вышнеградского», на которой наглядно изображались все варианты переходных процессов систем управления, описываемых дифференциальными уравнениями третьего порядка. Характеристический полином таких уравнений имеет вид (2) и содержит четыре коэффициента. Однако, И. А. Вышнеградский заметил, что если ввести новые единицы измерения для x и для времени, т.е. ввести новое время τ, исходя из соотношения

$$\tau = \frac{t}{\sqrt[3]{a_3}} \qquad (6)$$

то первый и четвертый коэффициенты в полиноме (2) станут равными единице и полином можно записать в виде

$$\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + 1 \qquad (7)$$

где A и B – параметры Вышнеградского. Если по оси ординат откладывать значения параметра A, а по оси абсцисс – параметра B, то мы получим знаменитую «диаграмму Вышнеградского» (рис.12) для корней характеристического полинома (7). Корни с отрицательными вещественными частями будут лежать выше гиперболы MN, описываемой уравнением $AB=1$ (действительно только при $AB>1$ полином (7) будет гурвицевым). Важное значение имеет клиновидная область ECF на диаграмме Вышнеградского. Для значений A и B, находящихся внутри этой области, все три корня характеристического полинома будут вещественными отрицательными и поэтому переходный процесс

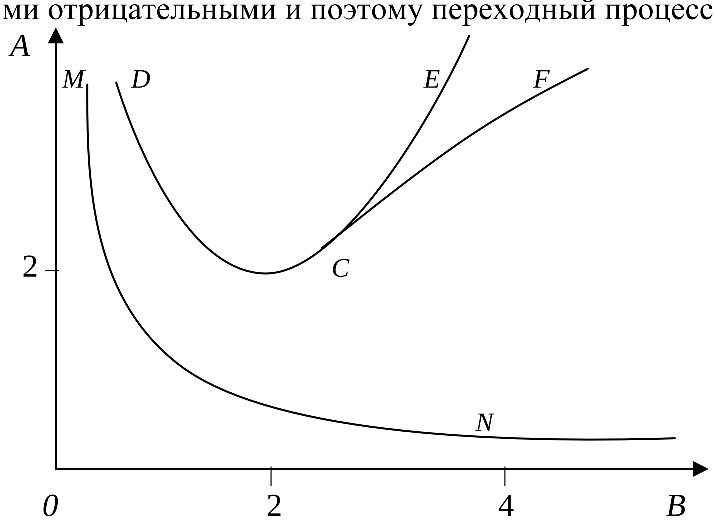

Рис.12.

в замкнутой системе не будет колебательным.

С помощью диаграммы Вышнеградского можно выбрать параметры регулятора, обеспечивающего любой характер переходного процесса, поэтому диаграмма Вышнеградского широко использовалась при расчетах систем управления и в девятнадцатом и в двадцатом веках.

Условия Раута-Гурвица решили проблему анализа устойчивости линейных систем управления. Значительно более сложная проблема устойчивости нелинейных систем получила решающий сдвиг в результате исследований великого русского математика Александра Михайловича Ляпунова (1857-1918).

А.М. Ляпунов родился в 1857г. в Ярославле, где его отец был в те годы директором Демидовского лицея; после окончания в 1876г. гимназии в Нижнем Новгороде он учился до 1880г. на математическом отделении физико-математического факультета Петербургского университета, где наибольшее влияние оказал на него П.Л. Чебышев. По окончании университета в 1880г. А.М. Ляпунов был оставлен при университете (на кафедре механики) для подготовки к преподавательской деятельности, успешно сдал к 1882г. магистерские экзамены; перед ним встал важнейший для молодого ученого вопрос – о выборе направления дальнейшей научной работы. Вот что рассказывал об этом сам А.М. Ляпунов: «В 1882г., желая подыскать подходящую тему для магистерской диссертации, я не раз беседовал с Чебышевым по поводу различных математических вопросов, причем Чебышев всегда высказывал мнение, что заниматься легкими, хотя бы и новыми вопросами, которые можно разрешать общеизвестными методами, не стоит; всякий молодой ученый, если он уже приобрел некоторый навык в решении математических вопросов, должен попробовать свои силы на каком-нибудь серьезном вопросе, представляющем известные теоретические трудности.

При этом он предложил мне следующий вопрос: «Известно, что при некоторой величине угловой скорости эллипсоидальные формы перестают служить формами равновесия вращающейся жидкости. Не переходят ли они при этом в какие-либо новые формы?…. Вот если бы Вы разрешили этот вопрос, на Вашу работу сразу обратили бы внимание». «Впоследствии я узнал, - продолжал Ляпунов, – что этот же вопрос Чебышев предлагал и другим математикам, как например, Золотареву, молодому тогда ученому, блестящие лекции которого я слушал в университете, и Софье Ковалевской. Не знаю, пробовали ли решать этот вопрос Золотарев и Ковалевская. Я же сильно заинтересовался этим вопросом, тем более, что Чебышев не дал никаких указаний для его решения, и я тотчас же принялся за работу». Так вошла в жизнь А.М. Ляпунова проблема устойчивости – основная тема его научной работы на все последующие годы. В 1885 г. он защитил магистерскую диссертацию «Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости», был утвержден в звании приват-доцента и переехал в Харьков, где возглавил кафедру механики в Харьковском университете. В Харькове А.М. Ляпунов работал до 1902г., когда после избрания действительным членом Российской Академии наук он переехал в Петербург. В Петербурге Ляпунов уже не занимался преподаванием, а целиком сосредоточился на научной работе, посвященной проблемам равновесия и устойчивости фигур небесных тел. В июне 1917г. А.М. Ляпунов переехал в Одессу и там же, 3 ноября 1918г. он скончался.

К харьковскому периоду жизни А.М. Ляпунова относится и его наиболее знаменитая работа – докторская диссертация «Общая задача об устойчивости движения», опубликованная в 1892г. в Харькове и защищенная в том же году в Московском университете.

Академик В.А. Стеклов (1863-1926) хорошо знавший А.М. Ляпунова, так характеризовал его: «Воспитанный сначала своим отцом, сотоварищем Н.И. Лобачевского по Казанскому университету, затем в кругу лиц, близких в нашему физиологу И.М. Сеченову, проведший всю юность в среде наиболее просвещенной части нашего тогдашнего общества, на умы которого еще продолжали влиять Н.А. Добролюбов и Н.Г. Чернышевский. А.М. Ляпунов олицетворял собою лучший тип идеалиста 60-х годов...»

«Все из ряда вон выходящие силы свои он отдавал на беззаветное служение науке, ею одной жил, в ней одной видел смысл жизни и часто говорил, что без научного творчества и сама жизнь для него ничего не стоит».

«С самого начала своей ученой деятельности он работал изо дня в день до четырех-пяти часов ночи, а иногда являлся на лекции (в Харьковском университете) на спав всю ночь».

«Он не позволял себе никаких развлечений, и если появлялся иногда (раз или два в год) в театре или на концерте, то лишь в самых исключительных случаях, как, например, на редких концертах своего брата, известного композитора С.М. Ляпунова».

«Круг знакомства А.М. Ляпунова был крайне ограничен и состоял из ближайших его родственников и небольшого числа ученых, по преимуществу математиков, причем редкие товарищеские собрания, на которых бывал А.М. Ляпунов, преимущественно сводились, особенно в Харьковский период его жизни к высшей степени поучительным собеседованиям по текущим вопросам науки».

«Отчасти потому и производил он иногда на лиц, мало его знавших, впечатление молчаливо-хмурого, замкнутого человека, что зачастую настолько был поглощен своими научными размышлениями, что смотрел и не видел, слушал – и не слышал...»

В лице А.М. Ляпунова мы сталкиваемся с примером ученого , не занимавшегося непосредственно практической деятельностью или прикладными задачами, но чьи труды тем не менее оказали большое влияние на практику управления. А.М. Ляпунов не интересовался конкретными прикладными задачами, но он прекрасно понимал, насколько важную роль играет проблема устойчивости в понимании всего окружающего нас мира – как мира природы, так и мира техники. Это понимание центральной роли проблемы устойчивости и вдохновляло А.М. Ляпунова на многолетние усилия по решению труднейших задач из этой области. И хотя сам Ляпунов никогда не интересовался техническими вопросами, техника управления использовала результаты его работ. Правда, это произошло не сразу. Оригинальные работы А.М. Ляпунова написаны трудно и мало кому были доступны. Рассказывают, что когда А.М. Ляпунов послал перевод своей докторской диссертации «Общая задача об устойчивости движения» одному из известных французских математиков, то тот ответил: «Наверное это прекрасная работа; к сожалению моей жизни не хватит для того, чтобы понять ее».

Однако в дальнейшем, после изложения идей А.М. Ляпунова его последователями, продолжателями и популяризаторами, выяснилось, что по существу своему эти идеи вовсе не столь уж сложны. Именно методы Ляпунова (с учетом модификации их, проведенной его последователями) легли в основу анализа устойчивости нелинейных систем автоматического управления. Судьба работ А.М. Ляпунова еще раз подчеркивает важность для общего развития науки работ тех многочисленных ученых, которые может быть и не попадают на страницы истории математики, но без которых эта история не была бы столь блестящей и столь плодотворной. В настоящих «Лекциях» мы по необходимости смогли упомянуть имена лишь очень небольшой доли ученых, развивших математику как науку и постепенно придавших ей ее современный облик. Мы упоминали, в основном, лишь наиболее крупные и выдающиеся имена. Их роль велика. Они отмечают собой поворотные точки, важнейшие этапы в развитии науки. Но наука не могла бы развиваться, если бы работы гениев не были бы поняты, подхвачены, продолжены теми многочисленными научными работниками, которые в большинстве своем не оставили своих имен на страницах истории науки, но без которых эта история не могла бы сложиться. Наука – это дело коллективное.

Вот как выглядит, для примера, метод расчета «по Ляпунову» устойчивости нулевого решения следующей системы нелинейных дифференциальных автономных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1;\ldots x_n) \\ \ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(x_1;\ldots x_n). \end{cases} \tag{8}$$

Введем в рассмотрение функцию V переменных $x_1 \ldots x_n$; которая равна нулю тогда, когда все переменные равны нулю и положительна для всех других значений переменной. Примером такой функции может служить

$$V = x_1^2 + \ldots x_n^2. \tag{9}$$

Вычислим теперь полную производную по времени функции V на решениях системы (8). Такую производную называют «производной в силу системы (8)». Используем известную формулу для полной производной

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \cdots \frac{\partial V}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} \tag{10}$$

и подставим вместо каждой из производных $\frac{dx_i}{dt}$ их значения из уравнений (8). Получим для «производной в силу системы» формулу

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1(x_1;\ldots x_n) + \cdots \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n(x_1;\ldots x_n)\,. \qquad (11)$$

Пусть теперь функция V такова, что производная (11) для всех $x_i \neq 0$ отрицательна. Такую функцию называют функцией Ляпунова, поскольку еще в 1892 г. А.М. Ляпунов доказал, что если такая функция существует, то нулевое решение системы (8) (т.е. решение $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$) асимптотически устойчиво [32].

Доказательство А.М. Ляпунова допускает наглядную интерпретацию: если производная функции V отрицательна, то функция будет только убывать, стремясь к своему наименьшему значению, к нулю, а поскольку $V=0$ достигается лишь при $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$, то и все переменные $x_i\ (t)$ будут стремиться к нулям и нулевое решение устойчиво.

Мы изложили наиболее простую часть теории Ляпунова. Несколько более сложными будут те случаи, когда исследуемые дифференциальные уравнения не автономны, когда производные функций Ляпунова не обязательно отрицательны, а только не положительны – и т.п. Однако в целом теория Ляпунова – в том виде, который она приняла в руках его продолжателей — вполне доступна.

Подчеркнем главное: если найдена та или иная функция Ляпунова, то вопрос об устойчивости нулевого решения нелинейной системы решен, а вопрос об устойчивости любого решения несложно свести к исследованию устойчивости нулевого решения. Поэтому несмотря на то, что отыскать функцию Ляпунова нелегко, а общих методов нахождения таких функций на сегодня не существует, построением функций Ляпунова занимались многие исследователи: В.И. Зубов [11,13,14], Е.А. Барбашин [3], Ла-Салль, Лефшец [23], А.И. Лурье [30,31], И.Г. Малкин [34], Н.Д. Моисеев [35] и многие другие.

Для исследования устойчивости линейных систем Найквистом в 1932 г. и А.В. Михайловым в 1938г. были предложены удобные частотные методы, основанные на том, что в характеристическом полиноме (1) переменная λ заменяется на комплексное число jω (где $j = \sqrt{-1}$) и затем на комплексной плоскости строится годограф функции:

$$F(j\omega) = a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \ldots a_0 \qquad (12)$$

Суждение об устойчивости выносилось на основании поведения годографа, что позволяло избегать вычисления определителей матрицы Гурвица.

Удобный и эффективный метод проверки устойчивости был предложен в работе [14] Владимира Ивановича Зубова (1930–2000).

С течением времени все больше выходила на первый план задача оптимизации управления — т.е. построения такого регулятора, который обеспечивал бы не только устойчивость замкнутой системы, но и минимальные отклонения регулируемой величины от желаемого значения – при наличии колебаний нагрузки, возмущающих сил и т.п. Основная сложность заключалась в том, что колебания нагрузки, возмущающих сил и т.п. являлись случайными функциями времени, и поэтому теория построения (или, как часто говорят, – синтеза) оптимальных регуляторов стала успешно развиваться лишь после того, как была разработана теория случайных функций, случайных процессов.

Случайные функции.

Теория случайных функций, случайных процессов, является одной из глав современной теории вероятностей. В настоящих «Лекциях» мы не рассматривали историческое развитие теории вероятностей до двадцатого века, поскольку оно хорошо отражено во многих книгах, посвященных истории математики.

Что касается теории случайных функций, то она выросла из запросов практики, приложений, в частности - из необходимости расчета качки судов на нерегулярном волнении.

Качка при регулярном волнении рассчитывалась еще в 19 веке, и расчет этот был не очень сложен. Для простейшего случая бортовой качки , когда ширина корабля много меньше длины волны, угол крена удовлетворяет уравнению

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2}+k\frac{d\theta}{dt}+\theta=\varphi(t)\,, \qquad (13)$$

где $\varphi(t)$ - возмущающее воздействие, угол волнового склона, J - момент инерции корпуса корабля, k -коэффициент демпфирования. Решение уравнения (13), как и любого линейного уравнения, является, как известно, суммой общего решения однородного уравнения и частного решения. Если считать $\varphi(t)$ гармонической функцией: $\varphi(t)=A\sin\,\omega_0 t$, где $2\pi/\omega_0$ - период волны, то через некоторое время общее решение однородного уравнения

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2}+k\frac{d\theta}{dt}+\theta=0 \qquad (14)$$

затухнет и останется только частное решение уравнения (13)

$$\theta(t)=\frac{A}{\left|J(j\omega_0)^2+k(j\omega_0)+1\right|}\sin(\omega_0 t+\psi_0) \qquad (15)$$

т.е. синусоида той же частоты ω_0, но с другой амплитудой и фазой. Таким образом, изменение угла крена судна θ в функции времени t будет при регулярном волнении гармонической функцией, и крен может быть легко вычислен по простой формуле (15).

То же самое имеет место и для линейных дифференциальных уравнений любого порядка вида

$$A(D)x=\varphi(t), \tag{16}$$

где $A(D)=a_nD^n+a_{n-1}D^{n-1}+\ldots a_0$ – гурвицев полином от оператора дифференцирования $D=\dfrac{d}{dt}$, а $\varphi(t)=M\sin(\omega_0 t)$. В этом случае общее решение однородного уравнения $A(D)x=0$ также затухает с течением времени и остается простое частное решение

$$x(t)=\frac{M}{\left|A(j\omega_0)\right|}\sin(\omega_0 t+\psi_0) \tag{17}$$

Мы убеждаемся, что для вычисления амплитуды частного решения достаточно в полином $A(D)$ подставить вместо D число $j\omega_0$ и вычислить модуль $\left|A(j\omega_0)\right|$.

Простота формулы (15) позволила А.Н Крылову в 1896 году дать полную теорию более сложных видов качки, где нужно было учитывать соизмеримость размеров корпуса корабля с длиной волны, взаимодействие килевой и бортовой качки, влияние скорости хода корабля и т.п. В основе теории лежало выделение частных решений. А.Н. Крылов понимал (и писал об этом), что основание теории качки – шаткое, что для реального морского волнения истинный угол крена $\theta(t)$ не стремится с течением времени к частному решению (15), поскольку $\varphi(t)$ является случайной функцией, принципиально полностью непредсказуемой. Однако для полного решения проблемы математика того времени еще не давала достаточных средств.

Эти средства появились намного позже, в ходе исследования стационарных случайных процессов. Над проблемой частичного предсказания будущих значений процесса по прошлым измерениям работали такие выдающиеся математики как Андрей Николаевич Колмогоров (1903-1987), работа которого [19] была опубликована в 1941г., и Норберт Винер (Wiener, 1894-1964). Н. Винер получил существенные результаты в теории предсказания позже А.Н. Колмогорова, в 1942-43 годах, когда США вели войну против Германии и Японии и результаты Винера могли быть использованы для улучшения точности зенитной стрельбы (поскольку позволяли частично предсказывать будущее движение неприятельского самолета). Н. Винер оформил свои результаты как секретный отчет, который был напечатан небольшим тиражом в виде книги в желтой обложке и разослан по многим организациям США, занимающимся приборами управления зенитным огнем.

Этим организациям книга Н. Винера принесла большой вред: с одной стороны, нельзя было отказаться от изучения этой книги, поскольку было ясно, что если изучить и понять ее, то эффективность зенитной стрельбы можно существенно повысить. С другой стороны, несмотря на большие затраты времени и труда, отвлекавшие от других важных работ военного значения, никому не удавалось понять и использовать результаты Н. Винера. Поэтому принесшую тогда много вреда книгу Винера в желтой обложке ученые прозвали «желтой опасностью» и даже вносили предложение: подкинуть ее в Германию, чтобы и немецкие ученые во время напрасных попыток понять ее содержание не могли бы выполнять другие военные разработки.

В дальнейшем Винер упростил изложение своих результатов и включил их в свою известную, переведенную потом на многие языки, книгу «Кибернетика» [9], изданную в 1948г. В русском переводе [9] раздел о предсказании временных рядов занимает страницы 91-110 и читатель этих страниц быстро убедится, что и после упрощений, введенных Н. Винером в 1948г., усвоить его результаты не очень легко.

Только несколько позже уже другие ученые коренным образом улучшили изложение результатов теории случайных процессов.

В ее основе лежит понятие корреляционной функции $k_\varphi(\tau)$ стационарного случайного процесса *φ(t),* определяемой равенством

$$k_\varphi(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \varphi(t)\varphi(t+\tau)dt\ . \qquad (18)$$

Корреляционная функция отражает тесноту связи между значениями *φ(t)* разделенными временем *τ.* При *τ=0* получаем средний квадрат *φ(t),* обозначаемый обычно угловыми скобками:

$$\langle \varphi^2 \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \varphi^2(t)dt = k_\varphi(0)\ . \qquad (19)$$

В приложениях очень часто встречаются корреляционные функции, близкие к экспоненте:

$$k_\varphi(\tau) = \langle \varphi^2 \rangle e^{-\alpha\tau}\ . \qquad (20)$$

Заметим, что хотя в формулу (18) входит интегрирование по бесконечному промежутку, в действительности хорошее приближение к корреляционной функции можно получить, интегрируя измеренные значения *φ(t)* и *φ(t+τ)* на совсем умеренном интервале *[–T;+T].* Корреляционная функция, таким образом, вычисляется несложно, а затем к ней применяют косинус-преобразование Фурье - т.е. $k_\varphi(\tau)$ умножают на *cosωτ,* интегрируют по *τ* и получают функцию $S_\varphi(\omega)$, которую называют спектром (или спектральной плотностью мощности) процесса *φ(t):*

$$S_\varphi(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} k_\varphi(\tau)\cos\omega\tau d\tau\ . \qquad (21)$$

Если, например, $k_\varphi(\tau) = e^{-\alpha\tau}$, то, вычисляя интеграл (21), получаем:

$$S_\varphi(\omega) = \frac{2}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}. \tag{22}$$

Для линейных дифференциальных уравнений вида (16), где *A(D)* - гурвицев полином, имеет место простая формула:

$$\langle x^2 \rangle = \int_0^\infty S_\varphi(\omega)\frac{d\omega}{|A(j\omega)|^2} \tag{23}$$

Таким образом, если *φ(t)* – случайный процесс, то вычислить само решение *x(t)* уравнения (16) невозможно, но зато средний квадрат решения вычисляется по формуле (23) очень просто. В то же время знание среднего квадрата говорит весьма много о решении *x(t)*. Значения случайного процесса чаще всего распределены по нормальному закону, и тогда имеет место простое соотношение: вероятность *P* того, что значение $|x(t)|$ не превысит величины $k\sigma_x$ (где $\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle}$) зависит только от *k* и выражается формулой:

$$P(|x| \le k\sigma_x) = \Phi(k), \tag{24}$$

где *P* — вероятность, а *Φ(k)* — известный «интеграл вероятностей» (называемый еще интегралом Лапласа)

$$\Phi(k) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^k e^{-\frac{y^2}{2}}dy, \tag{25}$$

для которого были давно составлены подробные таблицы. В частности, если *k=3*, то *Φ(k) =0.9973*. Это означает, что с вероятностью *0.9973* – т. е. практической достоверностью – модуль функции *x(t)* не превысит трех среднеквадратичных отклонений.

Данное соотношение позволяет легко производить практические расчеты, Пример: пусть мы для конкретного судна вычислили, пользуясь формулами (18), (21) и (23), что среднеквадратичный угол крена $\sigma_\theta = 5°$, а опасность опрокидывания для данного судна начинается с крена θ=*20°*. Тогда на основе формулы (25) мы делаем достоверное заключение: максимальное значение угла крена не превышает $3 \cdot 5° = 15°$, и поэтому данная качка – не опасна, к опрокидыванию судна она не приведет.

Начиная с 50-х годов двадцатого века простая формула (23) лежит в основе расчета качки судов на реальном, нерегулярном волнении [4], расчета следящих систем и систем управления [27], [40] и многих других расчетов.

Что касается расчета оптимального регулятора, обеспечивающего наилучшее качество управления, то эти расчеты сложнее. Дело в том, что поиск оптимального регулятора – это, фактически, поиск оптимального оператора, наилучшим образом преобразующего функцию *x(t)* на входе регулятора в функцию *u(t)* (где *u* – управляющее воздействие) на его выходе. В свое время Н. Винер предложил следующую классификацию математических объектов в порядке их возрастающей сложности:

1. Функция. Она ставит в соответствие числу (аргументу функции) другое число – значение функции. Дифференциальное исчисление позволяет найти аргумент, доставляющий максимум (или минимум) функции.
2. Функционал (пример – определенный интеграл). Он ставит в соответствие функции число - значение функционала. Вариационное исчисление позволяет найти функции, доставляющие максимум (или минимум) функционалам.
3. Оператор (пример – оператор дифференцирования). Он функции ставит в соответствие другую функцию. Пока не существует математического аппарата, позволяющего систематически находить операторы, оптимальные в том или другом смысле.

(В последнее время термин «оператор» получил другие определения; однако классификация Н. Винера наиболее наглядна и подчеркивает трудность задачи поиска оптимального оператора).

Синтез оптимальных регуляторов.

Оптимальные регуляторы для систем управления, в которых возмущающие воздействия являлись случайными процессами, были впервые получены на основе распространения результатов теории оптимальной фильтрации А.Н Колмогорова и Н. Винера [19, 9] на системы автоматического управления с обратной связью. Сперва определялись характеристики эквивалентной разомкнутой системы, обеспечивающей минимум среднеквадратичной ошибки, затем - параметры оптимальной обратной связи. К 1973г. утвердился следующий алгоритм построения оптимального регулятора вида

$$W_1(D)x=W_2(D)u \qquad (26)$$

(где $W_1(D)$ и $W_2(D)$ – полиномы от оператора дифференцирования $D=\frac{d}{dt}$), доставляющего минимум критерию качества

$$J = m^2\langle x^2\rangle + \langle u^2\rangle \qquad (27)$$

для объекта управления вида

$$A(D)x=u+\varphi(t): \qquad (28)$$

1. В основу расчета кладется аналитическая аппроксимация экспериментальных данных о спектральной плотности возмущающего воздействия $\varphi(t)$, которая аппроксимируется дробно-рациональной четной функцией

$$S_\varphi(s) = \frac{a_p s^{2p} + a_{p-1}s^{2p-2} + \ldots a_0}{b_q s^{2q} + b_{q-1}s^{2q-1} + \ldots b_0}. \qquad (29)$$

Далее эта спектральная плотность факторизуется

$$S_\varphi(s)=S_1(s)S_1(-s) \qquad (30)$$

т.е. представляется как произведение двух симметричных множителей $S_1(s)$ и $S_1(-s)$, один из которых зависит от s, другой – от $-s$. Поскольку числитель и знаменатель дроби (29) – функции четные, то они имеют соответственно $2p$ и $2q$ симметричных корней: λ_1 и $-\lambda_1$; λ_2 и $-\lambda_2$; и т.д. В множитель $S_1(s)$ войдут все корни с отрицательными вещественными частями, в множитель $S_1(-s)$ войдут все корни с положительными вещественными частями. Таким образом,

$$S_1(s)=\frac{\sqrt{a_p}\,(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_p)}{\sqrt{b_q}\,(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_q)}; \qquad (31)$$

и числитель, и знаменатель функции $S_1(s)$ являются гурвицевыми полиномами.

Заметим еще, что величину среднего квадрата возмущающего воздействия удобно нормировать, т.е. принять раз и навсегда, что $\langle\varphi^2\rangle=1$. Поскольку оптимальный регулятор линеен, то на его расчет нормировка не повлияет.

2. На втором шаге алгоритма точно так же факторизуется полином

$$A(s)A(-s)+m^2=G(s)G(-s) \qquad (32)$$

с целью вычисления полиномов $G(s)$ и $G(-s)$. При этом $G(s)$ – гурвицев полином (т.е. у всех его корней вещественные части отрицательны), а $G(-s)$ – не гурвицев.

3. Выполняется разложение на дроби (сепарация):

$$\frac{A(-s)}{G(-s)}S_1(s)=M_0+M_+ +M_-, \qquad (33)$$

где M_0 – целый полином, M_+ – правильная дробь с полюсами в левой полуплоскости комплексного переменного s, M_- - правильная дробь с полюсами в правой полуплоскости

4. Строится функция

$$\frac{\Phi_1(s)}{\Phi_2(s)}=\frac{M_0+M_+}{G(s)S_1(s)}, \qquad (34)$$

с помощью которой уже непосредственно находятся полиномы $W_1(D)$ и $W_2(D)$ в оптимальном регуляторе (26):

$$\frac{W_1(D)}{W_2(D)} = A(D) - \frac{\Phi_2(D)}{\Phi_1(D)}. \qquad (35)$$

Подставив (26) в (28), получим уравнение замкнутой системы:

$$\Phi_2(s)x=\Phi_1(s)\varphi. \qquad (36)$$

Поскольку, как это следует из формулы (34), полином $\Phi_2(s)$ будет иметь все корни в левой полуплоскости, то замкнутая система будет устойчивой. Мы убеждаемся, что параметры оптимального регулятора вычисляются по довольно сложному алгоритму. Для объектов управления вида $A(D)x=B(D)u+\varphi$ (где $B(D)\neq 1$), при учете погрешностей измерения и для многомерных систем алгоритм синтеза оптимальных регуляторов еще намного сложнее. Заметим, что если не учитывать требования устойчивости, а непосредственно, методами вариационного исчисления, искать регулятор, доставляющий абсолютный минимум функционалу (18), при учете уравнения связи (19), то мы придем к регулятору

$$m^2x=-A(-D)u. \qquad (37)$$

Подставив (37) в (28), получим уравнение замкнутой системы:

$$[A(D)A(-D)+m^2]x=A(-D)\varphi(t). \qquad (38)$$

Характеристический полином уравнения (38) при любом $A(D)$ будет иметь корни с положительными вещественными частями и поэтому замкнутая система будет неустойчива.

Отметим, что это не является непреодолимым препятствием к реализации оптимального движения объекта управления, описываемого уравнением (38): если возмущающее воздействие $\varphi(t)$ полностью известно на интересующем нас интервале времени, то мы можем, решая уравнение (38), найти оптимальное движение $x(t)$, а затем и реализовать его средствами программного управления. При этом мы получим абсолютный минимум критерия качества (27). Если же мы замкнем объект управления (28) регулятором (26), где $W_1(D)$ и $W_2(D)$ соответствуют формуле (35), то мы получим другое значение функционала (критерия качества) (27). Оно будет больше абсолютного минимума и будет минимальным значением, совместимым с требованием устойчивости замкнутой системы.

Все эти обстоятельства полностью выяснились позже. В первых работах по оптимизации линейных систем [38,51,52], регулятор (37) считался (и назывался) «не удовлетворяющим условию физической реализуемости», хотя это не так. Например, для $A(D)=D$ регулятор (37) принимает вид:

$$u = -\frac{m^2}{D}x = -\int_0^t m^2 dx \qquad (39)$$

т.е. является хорошо реализуемым интегрирующим звеном. Таким образом, дело не в физической реализуемости, (как думали до 70-х годов 20 века), а в устойчивости. Методы вариационного исчисления позволяют найти регуляторы, реализующие движение по экстремалям, но это движение почти всегда неустойчиво, требует для реализации полной информации о возмущающих силах и любая неточность в этой информации может привести к резкому ухудшению качества управления. В то же время управление, полученное на основе распространения методов оптимальной фильтрации А.Н. Колмогорова и Н. Винера на системы управления, требовало для реализации только очень скромную информацию о корреляционных функциях возмущающих воздействий и не было чувствительно к погрешностям в этой информации.

Однако и методы вариационного исчисления при соответствующей их модификации также позволяли (как было показано в 1973г. в [44]) получить устойчивые оптимальные регуляторы. Так, минимум критерия качества (27) при наличии уравнения связи (28) достигается на решениях уравнения Эйлера-Пуассона (38), общее решение которого зависит от $2n$ постоянных интегрирования c_i, и имеет вид

$$x(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i e^{\lambda_i t}+\sum_{i=1}^{n}c_{n+i}e^{-\lambda_i t}+x_{частн}\,, \qquad (40)$$

где λ_i – корни гурвицева полинома $G(s)$, определяемого из формулы (32). Все эти корни имеют отрицательные вещественные части. Во вторую сумму $\sum_{i=1}^{n}c_{n+i}e^{-\lambda_i t}$ входят экспоненты, показатели которых обратны по знаку корням полинома $G(s)$ (или – что то же самое) являются корнями полинома $G(-s)$, входящего в формулу (32). Неустойчивость движения определяется именно этими экспонентами. Но из $2n$ параметрического семейства экстремалей (40) можно выделить устойчивое подсемейство:

$$x(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i e^{\lambda_i t}+x_{частн}\,, \qquad (41)$$

где $x_{частн}$ должно быть тем же, что и в семействе (40). Уравнение, которому должно удовлетворять устойчивое подсемейство (41) можно записать в виде

$$G(D)x=\psi(t), \qquad (42)$$

где $\psi(t)$ – это частное решение уравнения

$$G(-D)\psi=A(-D)\varphi(t). \qquad (43)$$

Теперь достаточно исключить две функции: $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ из трех уравнений (28), (42) и (43). Получим уравнение регулятора, который обеспечит устойчивость замкнутой системы и минимум критерия качества, совместимый с устойчивостью. В общем случае, для произвольной корреляционной функции процесса $\varphi(t)$,исключение громоздко, однако для важных частных случаев – для корреляционных функций

$$k_{\varphi_1} = \langle\varphi^2\rangle e^{-\alpha\tau} \tag{44}$$

и

$$k_{\varphi_2} = \langle\varphi^2\rangle e^{-\alpha\tau}(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta\tau) \tag{45}$$

оптимальные регуляторы получаются сразу; для корреляционной функции (44) будет

$$u_{опт} = -[kG(D) - A(D)]x\,, \tag{46}$$

где $k = \dfrac{G(\alpha)}{A(\alpha)}$, а для корреляционной функции (45) имеем

$$u_{опт} = -[\frac{G(D)}{a+bD} - A(D)]x\,, \tag{47}$$

где коэффициенты a и b вычисляются через вещественную и мнимую части комплексного числа

$$k_1 + jk_2 = \frac{A(\alpha - j\beta)}{G(\alpha - j\beta)} \tag{48}$$

по формулам: $a = k_1 + \dfrac{\alpha}{\beta}k_2; b = \dfrac{k_2}{\beta}$.

Наличие конечных формул (46) и (47) для оптимальных регуляторов позволило в 1973г. справиться с проблемой сохранения устойчивости при вариациях параметров, которая надолго затормозила практические приложения теории оптимального управления.

Встреча с проблемой сохранения устойчивости при вариациях параметров.

К 1973 году сформировалась уже целая библиотека книг, посвященных различным аспектам теории оптимизации линейных систем по среднеквадратичным критериям качества, различным алгоритмам вычисления оптимальных регуляторов (книги [24,25,36,38,39,51,52,55,56,60] и др.). Разумеется, алгоритмы, описанные в них, были много сложнее простейшего алгоритма, приведенного нами ранее для объектов вида (28).

И все же, несмотря на большое число книг, посвященных теории оптимизации линейных систем по среднеквадратичным критериям качества, за период 1956-1973гг. практических применений теории было немного. Мешал довольно быстро обнаружившийся очень серьезный недостаток: замкнутые системы управления, построенные по всем теоретическим рекомендациям, приведенным в книгах [24,25,26,38,39,51,52,55,56.60], часто обладали неприятным и опасным свойством: они теряли устойчивость при малых отклонениях некоторых параметров объекта управления или регулятора от расчетных значений.

При значениях параметров, точно совпадающих с расчетными, устойчивость, разумеется, обеспечивалась (как это следовало из уравнения (36)), но уже при очень малых, неизбежных на практике, вариациях параметров устойчивость нарушалась и замкнутая система «шла в разнос». Разумеется, обнаружение это опасного свойства полностью перекрывало дорогу практическому приложению теории, тем более что причины его долгое время оставались не раскрытыми. Первоначально считали, что причина заложена в каких-то недостатках алгоритма синтеза, (что, кстати, и способствовало в 1961-1973 годах появлению столь большого числа книг [24,25,36,38,39,51,52,56,56,60], посвященных теории оптимизации по среднеквадратичным критериям качества и различным алгоритмам синтеза оптимальных регуляторов). Каждый автор надеялся, что ему удалось предложить такой алгоритм синтеза, который не приведет к потере устойчивости при малых вариациях и каждый раз в ходе критического обсуждения выяснялось, что эта цель не достигнута.

Перелом произошел в 1973 году. В начале года, в статье [37] П.В. Надеждин показал, что очередной алгоритм синтеза, незадолго до того предложенный в [24], не обеспечивает сохранения устойчивости при вариациях параметров и считал это преодолимым недостатком, который можно преодолеть, разработав другой алгоритм, но в том же 1973 году в [44] было показано, что алгоритмов синтеза, свободных от этого недостатка, существовать не может, поскольку для ряда объектов управления и спектральных плотностей возмущающих воздействий минимум критерия качества (27) лежит как раз на границе устойчивости по некоторым параметрам объекта. Отсюда следует, что если какой-либо регулятор для такого объекта управления обеспечит минимум критерия качества, совместимый с устойчивостью, то эта устойчивость в данном случае обязательно потеряется при сколь угодно малых отклонениях параметров объекта управления или регулятора от расчетных значений (причем обязательно только при отклонениях определенного знака; на формировании безопасных знаков и был основан первый, еще недостаточно совершенный метод борьбы с данным недостатком, также предложенный в [44]).

Пример: для объекта управления (23) и корреляционной функции возмущающего воздействии (45) оптимальный регулятор имеет вид (47). Если этим регулятором мы замкнем объект (28), то характеристическим полиномом замкнутой системы будет гурвицев полином $G(D)$. Замкнутая система устойчива. Однако, если регулятором (47) замкнуть объект управления

$$A_1(D)x=u+\varphi(t), \tag{49}$$

где старший член полинома $A_1(D)$ равен $a_n(1+\varepsilon)D^n$ и отличается от старшего члена полинома $A(D)$, равного a_nD^n на сколь угодно малое число ε, то характеристический полином замкнутой системы примет вид

$$G(D)+\varepsilon bD^{n+1} \tag{50}$$

и уже при сколь угодно малых ε устойчивость может потеряться, поскольку может нарушиться необходимое условие устойчивости Стодолы. Все это стало очевидным, когда появились простые формулы (46) и (47) для оптимальных регуляторов. Ранее, когда регулятор вычислялся только по длинному алгоритму, потеря устойчивости при вариациях параметров «испортила немало крови» и разработчикам систем управления, и практикам, поскольку причины потери устойчивости были не ясны, и разобраться в них было трудно.

Появление публикации [44] направило развитие теории оптимизации по среднеквадратичным критериям качества по другому пути: прекратились поиски несуществующего алгоритма синтеза, обеспечивающего для любых объектов управления одновременно и минимум среднеквадратичного критерия качества и сохранение устойчивости при вариациях параметров. Там, где сохранение устойчивости при вариациях параметров автоматически не обеспечивалось, его стали вводить как дополнительное требование к системе, за реализацию которого приходилось платить некоторым ухудшением критерия качества (27).

В монографии [46] был приведен простой критерий различения: для каких объектов управления и спектральных плотностей возмущающего воздействия регулятор (26) обеспечивает сохранение устойчивости при малых отклонениях параметров объекта управления или регулятора от расчетных значений и для каких – не обеспечивает. Если в математической модели объекта управления общего вида

$$A(D)x=B(D)u+\varphi(t) \tag{51}$$

степень операторного полинома $A(D)$ равна n, а степень операторного полинома $B(D)$ равна m, то с учетом степеней p и q в аналитической аппроксимации спектральной плотности (29) возмущающего воздействия $\varphi(t)$, этот критерий примет вид неравенства:

$$p \geq m+q-1. \qquad (52)$$

Если неравенство (52) выполнено, то замкнутая оптимальным регулятором система управления сохраняет устойчивость при вариациях своих параметров, если неравенство (52) не выполнено, то устойчивость может не сохраняться. За критерием (52) в дальнейшем закрепилось название «критерия Ю.П. Петрова».

Неравенство (52) служит основой для синтеза регуляторов, обеспечивающих сохранение устойчивости при вариациях параметров. Действительно, аналитическая аппроксимация спектральной плотности возмущающего воздействия $\varphi(t)$ до некоторой степени произвольна: в основу аппроксимации берется полученная из эксперимента кривая $S_{\varphi}(\omega)$, которую затем аппроксимируют аналитическим выражением (29), подбирая (обычно методом наименьших квадратов) коэффициенты a_i и b_i, и степени p и q так, чтобы аналитическая аппроксимация наиболее точно отражала экспериментальную кривую. Если при такой наиболее естественной аппроксимации оказывается, что неравенство (52) не выполняется, то аппроксимацию можно изменить, можно те же экспериментальные точки аппроксимировать в классе таких дробно-рациональных функций (29), для которых неравенство (52) выполнено. Поскольку точность аппроксимации с учетом дополнительного условия (52) будет ниже, чем без него, значение критерия качества увеличится, но это увеличение (плата за реализацию дополнительного требования к системе) будет небольшим. Примеры расчета, приведенные в [46], показывают, что увеличение критерия качества не превышало нескольких процентов, поскольку изменение аналитической аппроксимации можно проводить за пределами полосы частот, существенных для данной системы управления ([46], стр. 218-226).

Несколько позже был предложен другой метод обеспечения сохранения устойчивости при вариациях параметров: вместо критерия качества (27) вводится функционал

$$J = \langle u^2 \rangle + m^2 \langle x^2 \rangle + k_1 \langle x^2 \rangle + \cdots k_n \langle (x^{(n)})^2 \rangle , \qquad (53)$$

в котором первый и второй члены отражают реальные физические требования к системе управления, а остальные члены вводятся только для обеспечения сохранения устойчивости при вариациях параметров и действительно обеспечивают ее, хотя и за счет некоторого увеличения основного критерия качества (27).

Метод, основанный на введении функционала (53), ввиду своей простоты получил наиболее широкое распространение, хотя методика, предложенная в [46] за счет использования полосы частот, существенных для каждой конкретной системы, позволяет получать несколько лучшее значение критерия качества. Еще одна методика, основанная на построении минимизирующей последовательности, была предложена в [58].

Американские исследователи часто используют другой прием: при расчете замкнутых систем в каналах обратной связи ими вводятся дополнительные «белые шумы» малой интенсивности. Эти «шумы» – фиктивные, они вводятся только в расчет регулятора. Введение в расчет подобных шумов также обеспечивает сохранение устойчивости системы за счет жертвы частью критерия качества.

Гарантированное обеспечение сохранения устойчивости при вариациях параметров позволило после 1973г. перейти к использованию теории оптимизации линейных систем при среднеквадратичных критериях качества для решения непосредственных практических задач (работы [1, 6, 7, 8, 46, 47] и многие другие). Некоторые примеры: для танкеров типа «Казбек» оптимальное, приводящее к минимуму потери скорости, управление рулем имеет вид

$$u=-\left[43.6D+2.5+\frac{0.005}{D}\right]x,$$

и легко реализуется с помощью обычных дифференцирующих, пропорциональных и интегрирующих звеньев (монографии [44], стр. 136-145 и [1], стр. 215-221). Для системы рулей — успокоителей качки судна «Академик Курчатов» оптимальное управление имеет вид:

$$u=-\left(118x_1-\frac{90x_1-6.15x_2-3.35x_3}{0.035D+0.85}\right),$$

где x_1, x_2, x_3 - соответственно сигналы от гироакселерометра, гиротахометра и кренометра. Оптимальное управление легко реализуется и обеспечивает дисперсию остаточной качки в 2,7 раза меньшую, чем ранее используемые законы управления ([1], стр. 227-232).

Для синхронного генератора, подающего питание на Азербайджанский трубопрокатный завод, оптимальный регулятор, реализованный Н.Д. Абдуллаевым в 1983-84 годах, имел вид

$$u=-\left(11.8+\frac{0.274}{2.78D+1}-\frac{19.3D+10.3}{8.82D^2+3.97D+1}\right)x,$$

где x – отклонение напряжения от номинального, легко реализовывался на основе простого усилительного, апериодического и колебательного звеньев, и обеспечивал существенное увеличение качества напряжения в заводской сети ([1], стр. 209-215).

Самое важное свойство оптимальных регуляторов, синтезированных по методике, предложенной в [46, 47] заключается в том, что замкнутые ими системы не меняют существенно своих свойств (устойчивости, величины критерия качества и т.п.) при отклонениях параметров объекта управления, регулятора и возмущающих сил от расчетных значений.

Обеспечение комплекса требований к системе управления.

Появление практических приложений теории оптимизации линейных систем поставило в повестку для следующий вопрос: функционал (27) не может быть единственным критерием качества проектируемой системы. Реальная система всегда должна удовлетворять комплексу критериев, в том числе и таких, которые трудно поддаются математической формализации, но без выполнения которых реальная система не может быть признана хорошей.

Полное решение задачи о синтезе систем управления, оптимальных по комплексному критерию качества, пока еще не получено. Однако в работах [1,46,47] были сделаны первые шаги в этом направлении. Были получены формулы, связывающие степени операторных полиномов $W_1(D)$и $W_2(D)$ в регуляторе (26), обеспечивающем минимум критерия (27), со степенью n полинома $A(D)$ в математической модели объекта, управления (51), со степенью m полинома $B(D)$ в уравнении (51), и со степенями p и q в аналитической аппроксимации спектральной плотности возмущающего воздействия (29). Оказалось, что если

$$p \leq m+q-1, \tag{53}$$

то для степени f полинома $W_1(D)$ и степени g полинома $W_2(D)$ в регуляторе (26) выполняются неравенства:

$$\begin{cases} f \leq n+q-1 \\ g \leq m+q-1, \end{cases} \tag{54}$$

если же

$$m+q-1 < p \leq 2n-m+q-1, \tag{55}$$

то, соответственно,

$$\begin{cases} f \le n + q - 1 \\ g \le p, \end{cases} \qquad (56)$$

и, наконец, если

$$p>2n-m+q-1, \qquad (57)$$

то в этом случае

$$\begin{cases} f \le m + p - n \\ g \le p. \end{cases} \qquad (58)$$

Заметим, что в формулах (54,56,58) чаще всего имеет место знак равенства. Знак строгого неравенства возникает только тогда, когда в полиномах $W_1(D)$ и $W_2(D)$ имеются одинаковые множители, допускающие сокращение. С учетом этого замечания, формулы (54,56, 58) позволяют, во-первых, оценить структуру будущего оптимального регулятора еще до начала синтеза, а во-вторых, позволяют варьировать структуру регулятора за счет того, что экспериментальные данные по спектральной плотности возмущающего воздействия $\varphi(t)$ могут быть аппроксимированы различными формулами вида (29), с различными значениями степеней p и q (особенно с учетом того, что точность аппроксимации важна лишь в полосе частот, существенных для данной системы). Варьируя p и q, а с ними и всю структуру регулятора, мы получаем возможность удовлетворить дополнительным требованиям. Так, например, как было показано в [1], для обеспечения важного для практики условия непосредственной реализуемости регулятора достаточно выбрать p и q так, чтобы выполнялось неравенство

$$p \ge n+q-1, \qquad (59)$$

(непосредственная реализуемость означает, что степень полинома $W_2(D)$ в уравнении (26) не меньше, чем степень $W_1(D)$; при этом не возникает паразитных параметров, ухудшающих работу системы). Другие примеры реализации некоторых важных дополнительных требований приведены в [7, 8, 46,47].

Учет реальных ограничений на управляющие воздействия.

Только в редких случаях коэффициент m^2 в критерии качества (27) четко определен физическим смыслом задачи оптимизации. Так, например, при синтезе авторулевого для морских судов, оптимального по минимуму потери скорости, коэффициент m^2 определен формой корпуса судна, что и определяет оптимальный регулятор, как это более подробно показано в [44].

Однако в большинстве случаев нам нужно обеспечить наилучшую точность стабилизации или слежения, которая оценивается функционалом

$$J_1 = < x^2 > = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2 dt \,, \tag{60}$$

а не функционалом (27). Но при этом нужно учитывать ограничения на управляющие воздействия, которые обычно являются двусторонними и при соответствующем выборе единиц измерения их можно записать в виде ограничения на модуль $u(t)$:

$$|u| \le 1 \,. \tag{61}$$

Разумеется, задачу оптимального управления можно ставить непосредственно, как задачу об управлении, доставляющем для объекта управления (28) минимум функционала (60) при ограничении (61). Эта задача рассматривалась, например, в [44]. Общую структуру решения установить нетрудно; если максимальные (по модулю) значения возмущающего воздействия $\varphi(t)$ много больше единицы, то оптимальное управление состоит из участков $u = -\varphi$ и участков «выхода управления на упоры», когда $u = +1$

или $u=-1$. При этом переход от $u=-\varphi$ к $u=\pm 1$ должен происходить заранее, «с упреждением», причем с правильно выбранным «упреждением» (более подробно это обосновано в [44]), а иначе управление оптимальным не будет. Пример управления «с упреждением» показан на рис. 13.

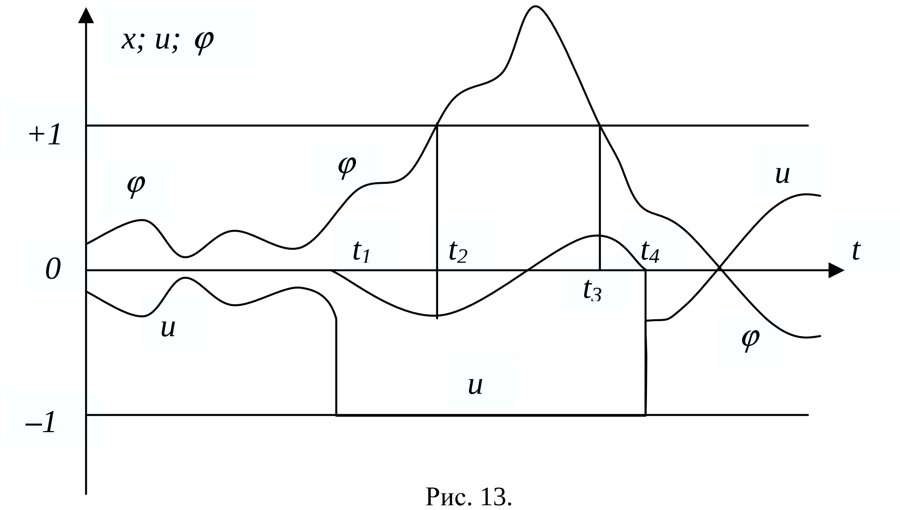

Рис. 13.

Таким образом, для обеспечения минимума функционала (60) при ограничении (61) необходима точная информация о возмущающем воздействии. Без полной информации точной величины упреждения не установить. Если мы – как это почти всегда бывает на практике – полной информацией о возмущающем воздействии не располагаем, то значение критерия качества (60) сразу ухудшается и знание спектральной плотности возмущающего воздействия не помогает. Совсем другое дело, когда ограничения накладываются не на модуль управляющего воздействия, а на его средний квадрат, т.е. когда вместо ограничения (61) имеет место ограничение

$$< u^2 > \le \frac{1}{k^2}. \qquad (62)$$

Задача об управлении, доставляющем для объекта управления (28) минимум функционалу (60) при ограничении (62) имеет простое решение: согласно известным теоремам вариационного исчисления, она эквивалентна задаче о минимуме функционала (27), в котором m^2 является множителем Лагранжа и определяется из условия (62), в котором знак неравенства заменяется на знак равенства. Поэтому оптимальным является линейный регулятор (26), а для синтеза этого регулятора, определения коэффициентов полиномов $W_1(D)$ и $W_2(D)$, достаточно располагать только информацией о спектральной плотности мощности возмущающего воздействия $\varphi(t)$. Эта информация легко доступна.

Именно это удобство и однозначность получаемого решения обеспечили теории оптимизации по среднеквадратичным критериям, типа критерия (22) (и аналогичным более сложным критериям для многомерных систем) такую популярность и такое изобилие работ и книг, этой теории посвященных.

При этом долгое время считалось, что члены с квадратами управляющих воздействий в критерии качества "косвенно учитывают" реальные ограничения на управление и позволяют получить решение практической задачи синтеза наилучшего (оптимального) регулятора. На самом деле это совсем не так. Конечно, если в неравенстве (62) выбрать $k=3$, (как это было рекомендовано, например, в авторитетном учебнике [40]),то при нормальном законе распределения возмущающего воздействия $\varphi(t)$ функция $u(t)$ также будет распределена по нормальному закону и поэтому при $k=3$ с практической достоверностью будет выполнено неравенство (61). Теоретически все будет правильно, система управления будет линейной, ограничение (61) будет учтено, но практика давно показала, что при уменьшении величины k в неравенстве (62), при выборе вместо $k=3$ значений $k=2$; $k=1.5$ точность управления резко возрастала, величина функционала (60) существенно в несколько раз, уменьшалась. В то же время при $k<3$, и особенно при $k<2$, управляющее воздействие заметную часть времени принимало предельные значения: $u=\pm 1$. Линейность системы при этом нарушалась и применимость линейной теории, на которой основан синтез регуляторов вида (26), тем самым ставилась под серьезное сомнение.

В работе [1] для разрешения этого противоречия был предложен новый подход: знак неравенства в (62) заменялся на знак равенства, выбиралось начальное значение числа k (обычно $k=2$), затем на основе традиционной линейной теории строился оптимальный регулятор вида (26), но он дополнялся "упорами", не позволявшими управлению выходить за пределы $u=\pm 1$ (т.е. в целом регулятор был уже нелинейным). Далее методами статистической линеаризации (уже с учетом "упоров") уточнялось значение числа k, соответствующее минимуму функционала (60). Расчеты показали, что наилучшее значение числа k чаще всего оказывалось близко к $k= 1.645$, которое много ранее, в [38], рекомендовалось на основе эмпирических соображений, но потом было забыто. При $k=1.645$ регулятор 10% всего времени находится "на упорах", а 90% времени работает как линейный. Таким образом, методика, предложенная в [1], позволила правильно учесть реальные ограничения на управление и синтезировать оптимальные регуляторы, учитывающие эти ограничения.

Проблема гарантирующего управления.

Методика синтеза оптимального управления, разработанная в 50х-60-х годах [17,24,36,38,51,52] предполагала, что известна спектральная плотность возмущающего воздействия на объект управления. Однако на практике спектральная плотность часто не известна, или же может существенно изменяться с течением времени. Поэтому значительный интерес представляет проблема синтеза оптимального управления при неизвестной или переменной спектральной плотности возмущающего воздействия. Эта проблема была впервые поставлена и частично решена в 1973 г., в [44], где она формулировалась как проблема гарантирующего управления: если относительно возмущающего воздействия известен только его средний квадрат (напомним, что он всегда и обоснованно нормируется условием $<\varphi^2>=\sigma_\varphi^2=1$), а управляющее воздействие ограничено неравенством (62), то какую точность управления, (измеряемую величиной σ_x), можно гарантировать для любой спектральной плотности возмущающего воздействия, и какой регулятор может эту гарантию реализовать?

В монографии [44] было установлено, что среди всех спектральных плотностей наихудшей является вырожденная, вырождающаяся в обобщенную δ- функцию Дирака (а конкретно - спектральная плотность $S_\varphi(\omega)=\delta(\omega-\beta)$, где β - частота, при которой достигает минимума функция

$$M=\left|A(j\omega)\right|^2+m^2\left|B(j\omega)\right|^2 \qquad (63)$$

Таким образом, наихудшая спектральная плотность $S_\varphi(\omega)$ равна нулю при $\omega\neq\beta$, стремится к бесконечности при $\omega\to\beta$, и при этом соблюдается равенство:

$\sigma_\varphi^2 = \int_0^\infty S_\varphi(\omega)d\omega = 1$. Хорошо известно, что такому спектру соответствует функция $\varphi(t)$ в виде гармонического колебания с частотой $\omega=\beta$, и поэтому наихудшим возмущающим воздействием является гармоническое:

$$\varphi(t) = \sqrt{2}\sin(\beta t + \theta), \tag{64}$$

(где θ — произвольная фаза), а в частном случае, при $\beta=0$ – постоянная сила, т.е. $\varphi(t)=1$.

Для объектов управления вида (28) при гурвицевом полиноме $A(D)$ в монографии [44] был найден и регулятор, реализующий гарантию. Он имел вид

$$u = -\frac{1}{k-1}A(D)x \tag{65}$$

и гарантировал, что

$$\sigma_x \le 1 - \frac{1}{k}.$$

Все эти результаты были установлены на основе вариационного исчисления.

Несколько позже, в 1974 г., в [45] было установлено, что при вырожденной спектральной плотности возмущающего воздействия (в отличие от обычной непрерывной) оптимальный регулятор не единственен и поэтому гарантирующих регуляторов может быть много. Простейшим из них является известный пропорциональный регулятор

$$u=-k_0x. \tag{66}$$

Результат, полученный в [45], оказался неожиданным потому, что ранее всем казалось очевидным: при изменении регулятора, а значит, и его частотной характеристики, величина критерия качества (27), зависящая от нее, не может не измениться. Однако, при вырожденной спектральной плотности возмущающего воздействия величина критерия качества (27) целиком определяется единственным значением частотной характеристики регулятора, ее значением при $\omega=\beta$. Поэтому различные регуляторы, частотные характеристики которых совпадают только в одной точке, при $\omega=\beta$, могут доставлять критерию (27) одно и то же значение.

Несколько позже проблемой гарантирующего управления серьезно заинтересовались американские исследователи (первой считается статья Зеймса (Zames), опубликованная в 1981году; ее обзор вместе с обзором ряда других работ был дан в большой обзорной статье [41]). Американские исследователи пошли по совершенно другому пути (работа [44] за пределами России, по-видимому, осталась неизвестной). Вместо вариационного исчисления они стали широко использовать методы, основанные на теории "H^∞ - оптимизации". Новый подход позволил разработать вычислительные алгоритмы, но не привел к сколько-нибудь обозримым результатам общего характера.

Между тем вариационные методы, на основе подхода, ранее использованного в [44], позволили получить исключительно простые результаты, приведенные в [49], а более подробно в [49[a]]. Предельно простое решение получила там проблема гарантии, формулируемая следующим образом: для объектов управления вида (51), для $\sigma_\varphi=1$ и ограничении на управление (62) ставится вопрос: какое качество управления, оцениваемое по критерию σ_x при заданном ресурсе управления σ_u, можно гарантировать для любой спектральной плотности возмущающего воздействия?

Ответ: гарантировать можно значения σ_x, лежащие не ниже разделительной линии, параметрические уравнения которой на плоскости, где по оси абсцисс отложены значения σ_u, а по оси ординат – значения σ_x, имеют вид:

$$\sigma_x = \frac{|A(j\beta)|}{|A(j\beta)|^2 + m^2|B(j\beta)|^2}, \tag{67}$$

$$\sigma_u = \frac{m^2|B(j\beta)|}{|A(j\beta)|^2 + m^2|B(j\beta)|^2}. \tag{68}$$

В уравнениях (67)-(68) величина m^2 играет роль параметра и пробегает значения от $m^2=0$ до $m^2\to\infty$, а β – та частота, при которой достигает максимума функция (63). Значений σ_x, лежащих ниже разделяющей кривой, гарантировать уже нельзя.

Мы убеждаемся, что общее суждение о возможностях оптимального управления при произвольной спектральной плотности возмущающего воздействия формулируется даже проще, чем в том случае, когда спектральная плотность воздействия известна и задана, но оптимальный регулятор и значения σ_x и σ_u при оптимальном управлении приходится вычислять по достаточно сложным алгоритмам.

Формулы (67)-(68) очень удобны, позволяя еще на стадии эскизного проектирования сразу установить – какая точность управления достижима при том или ином ресурсе управляющего воздействия σ_u, и наоборот - какой ресурс управления σ_u необходим для того, чтобы гарантировать заданную точность σ_x.

Если полиномы $A(D)$ и $B(D)$ в математической модели объекта управления оба гурвицевы, то физический смысл имеет вся разделительная кривая (67)-(68) от $m^2=0$ до $m^2\to\infty$. Если полином $A(D)$ не гурвицев и имеет положительный корень равный α_1, (т.е. объект управления без обратной связи неустойчив), то разделительная кривая начинается только справа от точки с абсциссой

$$\sigma_{u\,\min} = \frac{1}{\left|B(\alpha_1)\right|}. \qquad (69)$$

Если располагаемый ресурс управления σ_u меньше, чем $\sigma_{u\,\min}$, то ничего гарантировать нельзя – даже устойчивости замкнутой системы.

Если полином *B(D)* не гурвицев и имеет положительный корень β_1, то в этом случае разделительная кривая заканчивается в своей крайней правой точке с ординатой

$$\sigma_{x\,\min} = \frac{1}{\left|A(\beta_1)\right|}. \qquad (70)$$

Значений критерия качества σ_x, меньших чем $\sigma_{x\,\min}$, нельзя гарантировать при любом ресурсе управления.

Простые формулы (67)–(70) полностью исчерпывают вопрос о гарантируемых значениях качества управления.

В работах [49, 49[a]] приведен также алгоритм синтеза регуляторов, реализующих гарантию, а кроме того, показано, что для обширного круга объектов управления гарантирующим является давно известный простейший пропорциональный регулятор (66).

Отметим, что проблему гарантирующего управления можно рассматривать и как игровую задачу, как "игру" конструктора регулятора против природы, которая распоряжается спектральной плотностью возмущающего воздействия и может "выбрать" ее наиболее неблагоприятный вариант. Формулы (67)-(68) дают нам цену "игры" для каждого ресурса управления σ_u.

В монографии [46] (а более подробно в [49] и [49[a]]) для объектов управления вида (28) при гурвицевом полиноме *A(D)* дано решение еще одной проблемы гарантирующего управления, когда выход *x(t)* объекта управления (28) измеряется со случайной погрешностью $\psi(t)$, причем средний квадрат погрешности, величина σ_ψ^2, известна нам, но ее спектральная плотность может быть любой. Ставится вопрос: какую точность управления, какую величину критерия σ_x можно гарантировать при $\sigma_\varphi=1$ и любых сочетаниях спектральных плотностей возмущающего воздействия $\varphi(t)$ и погрешностей измерения $\psi(t)$?

Ответ на вопрос дается замечательной по своей простоте формулой: гарантировать можно, что

$$\sigma_x^2 \le \frac{\sigma_p^2 \sigma_\psi^2}{\sigma_p^2 + \sigma_\psi^2}, \tag{71}$$

где величина

$$\sigma_p^2 = \int_0^\infty S_\varphi(\omega) \frac{d\omega}{|A(j\omega)|^2} \tag{72}$$

является значением σ_x^2 для объекта управления (68) при $u=0$, т.е. в "разомкнутой системе". Гарантия (71) может быть реализована регулятором

$$u = -\frac{\sigma_p^2}{\sigma_\psi^2} A(D)(x+\psi). \tag{73}$$

Проблему гарантирующего управления в данном случае можно рассматривать как дифференциальную игру трех "игроков" – конструктора регулятора против двух "игроков", распоряжающихся спектрами возмущающего воздействия $\varphi(t)$ и погрешности измерений $\psi(t)$, причем оба "игрока" могут вступать в коалицию против конструктора. Формула (71) дает цену этой дифференциальной игры.

Аналитическое конструирование регуляторов.

Рассказывая об аналитическом конструировании, мы хронологически отступаем немного назад, поскольку под названием "аналитическое конструирование" получила известность разработанная Александром Михайловичем Летовым и опубликованная впервые в 1960 г. в [28] теория оптимизации линейных систем по квадратичным (а не среднеквадратичным) критериям качества. Применительно к односвязным объектам управления задача "аналитического конструирования" выглядит так: рассматривается объект управления, аналогичный объекту (28), но без возмущающего воздействия, т.е. объект

$$A(D)x=u \tag{74}$$

и ставится задача: "аналитически сконструировать регулятор" (т.е. собственно, найти математическую модель регулятора), который обеспечил бы устойчивость замкнутой системы и минимум критерия качества

$$J=\int_0^\infty (m^2x^2+u^2)dt\,. \tag{75}$$

В данном случае легко применяются (и были использованы А.М. Летовым) традиционные методы вариационного исчисления: подставив (74) в (75), приведем его к виду:

$$J=\int_0^\infty \{m^2x^2+[A(D)x]^2\}dt \tag{76}$$

Минимум функционала (76) может достигаться только на решениях уравнения Эйлера-Пуассона, которое в данном случае имеет вид:

$$[A(D)A(-D)+m^2]x=0, \tag{77}$$

т.е. является линейным дифференциальным уравнением порядка *2n*. Его решение состоит из *2n* экспонент:

$$x(t)=\sum_{i=1}^{n}c_ie^{\lambda_i t}+\sum_{j=1}^{n}c_je^{\lambda_j t}\,. \tag{78}$$

С учетом ранее приводившейся формулы (32) можно утверждать, что показатели первых *n* экспонент являются корнями уравнения

$$G(\lambda)=0, \tag{79}$$

и поэтому имеют отрицательные вещественные части, а у следующих n экспонент показатели будут иметь положительные вещественные части и поэтому эти экспоненты будут возрастающими. Интеграл (75) будет иметь конечное значение только тогда, когда все постоянные интегрирования c_j в решении (78) (постоянные перед возрастающими экспонентами) будут равны нулю, т.е. когда решение (78) перейдет в решение

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} . \tag{80}$$

Но решение (80) является решением дифференциального уравнения n-го порядка:

$$G(D)x=0. \tag{81}$$

Таким образом, минимум критерию (75) обеспечит тот регулятор, в котором решения замкнутой системы удовлетворяют уравнению (81). Но сразу видно, что такой регулятор имеет вид:

$$u=[A(D)–(G(D)]x. \tag{82}$$

Действительно, замкнув регулятором (82) объект управления (74), убедимся, что уравнение замкнутой системы совпадет с (81) и будет уравнением устойчивого подмножества решений Эйлера- Пуассона (77).

Решение проблемы аналитического конструирования легко обобщается и на многомерные объекты управления. Действительно, рассмотрим объект управления

$$\dot{x} = Ax + Bu , \tag{83}$$

где x – n- мерная вектор-функция, A - квадратная nxn матрица коэффициентов, B – вектор-столбец, u – управление, скаляр. Если критерием качества является интеграл от квадратичной формы переменных x и u, подобный интегралу (75), то минимум критерия, как было показано в [29], доставляет очень простой регулятор

$$u=kx, \tag{84}$$

где k – матрица-строка постоянных коэффициентов усиления. Для вычисления этих коэффициентов были разработаны удобные методы.

Хотя исследования А.М. Летова относились к идеализированным объектам управления вида (74) или (83), на которые не действуют возмущающие силы (т.е. принималось, что $\varphi(t)=0$), но методы аналитического конструирования регуляторов стали сразу (и не без успеха) применяться и к реальным объектам управления, подверженным действию возмущающих сил случайного характера. Это заставило проанализировать – в чем заключается различие между тремя управлениями: 1). оптимальным программным управлением, доставляющим абсолютный минимум критерия качества и которое теоретически мог бы реализовать регулятор (37), 2). оптимальным управлением с учетом устойчивости замкнутой системы, синтезируемым по алгоритму, учитывающему спектральную плотность возмущающего воздействия, 3). управлением, оптимальным в смысле аналитического конструирования.

Этот анализ был проведен в [44, 46]. Выяснилось, что оптимальное программное управление требует полной информации о возмущающем воздействии, в том числе информации "вперед", (т.е. уже при $t=0$ нужно располагать информацией о $\varphi(t)$ для $0\leq t\leq T$). Если возмущающее воздействие состоит из редко расположенных воздействий импульсного типа, то в оптимальной системе нарушается поверхностно понимаемый “принцип физической реализуемости”: импульс возмущающего воздействия еще не пришел, а управление, как бы “готовящее” систему к его приходу, уже действует (см. рис.14, приводившийся в [44], где показано оптимальное программное управление для одного из объектов вида (28)). Однако в неустойчивых системах такие явления возможны и “принципа физической реализуемости” не нарушают. Это и позволило доказать, что регуляторы (37) на самом деле реализуемы, и в особых случаях (например, при синтезе гарантирующего управления) они были в дальнейшем успешно использованы.

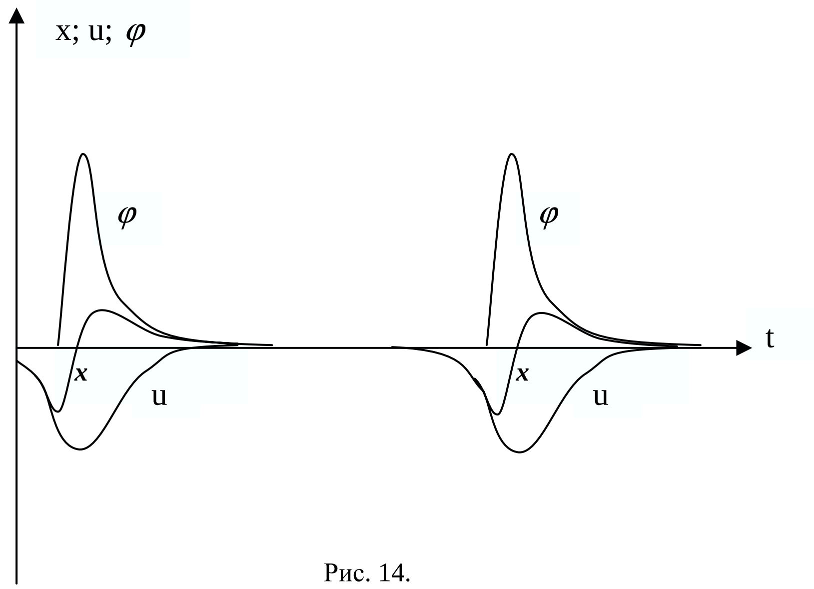

Рис. 14.

Управление, доставляющее минимум среднеквадратичному критерию качества с учетом дополнительного условия устойчивости – уже вследствие наличия дополнительного условия, доставляет критерию качества значение, в общем случае меньшее, чем абсолютный минимум. Насколько меньшее – зависит от скорости затухания корреляционной функции. Чем медленнее она затухает, тем лучше она предсказывает будущие значения $\varphi(t)$, тем ближе минимум, достигаемый в устойчивой системе, к минимум абсолютному. На рис.15, ранее опубликованном в [44] показаны значения критерия качества для объекта управления $\dot{x} = u + \varphi$ при корреляционной функции $k_{\varphi}(\tau) = e^{-\alpha\tau}$ в функции от α. Нижняя кривая — абсолютный минимум, верхняя — минимум с учетом дополнительного условия устойчивости.

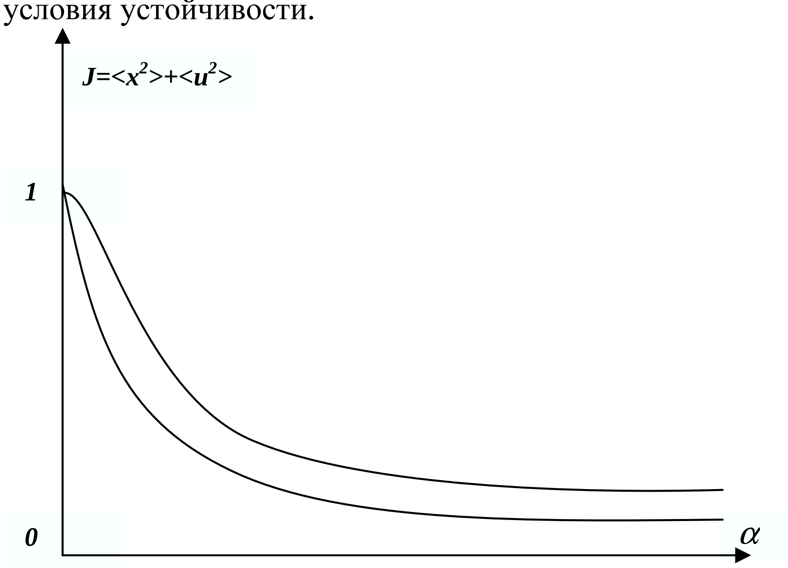

Рис. 15.

Хорошо известно, что чем быстрее затухает корреляционная функция, тем меньше интервал удовлетворительного предсказания. Если $k_\varphi(\tau) = e^{-\alpha\tau}$, то при $\alpha \to \infty$ процесс $\varphi(t)$ становится полностью не предсказуемым. Сравнивая формулы (46) и (82) и учитывая, что при $\alpha \to \infty$ будет $k \to 1$, мы убеждаемся, что при $\alpha \to \infty$ регуляторы (46) и (82) – совпадают, а при больших α они близки. Поэтому регуляторы, оптимальные в смысле аналитического конструирования, будут приближенно-оптимальными для объектов, испытывающих воздействие возмущающих сил с быстро затухающей корреляционной функцией (точнее – затухающей много быстрее, чем затухают переходные процессы в замкнутой системе). Такие корреляционные функции часто встречаются на практике.

Простота и самих регуляторов (84), и методов их расчета, в сочетании с возможностью практического применения способствовали в 60-е годы всплеску интереса к аналитическому конструированию. В одном из обзоров тех лет было подсчитано, что количество журнальных статей на эту тему к 1968 году перевалило за тысячу. Выходили и монографии [20,21,29]. Затем интерес к аналитическому конструированию быстро угас. Аналитическое конструирование подкосила встреча с потерей устойчивости при вариациях параметров.

Заметим, что если измерим и может быть непосредственно использован в канале обратной связи весь полный вектор состояния объекта управления (т.е. регулятор имеет вид (84), где k — матрица-строка без нулевых элементов), то все в порядке: регулятор (84) обеспечивает и устойчивость замкнутой системы и сохранение устойчивости при неизбежных на практике вариациях параметров объекта управления и регулятора. Однако очень часто некоторые из составляющих полного вектора состояния недоступны для измерения и непосредственного использования в канале обратной связи. Вообще-то в этом особого затруднения нет: недоступные составляющие полного вектора регулируемых переменных на выходе объекта управления можно путем эквивалентных преобразований заменить на комбинации из доступных переменных и их производных. Характер переходных процессов и значение критериев качества при этом не должны меняться, и действительно, как легко проверить, не меняются. Однако, используя этот метод на практике, столкнулись с опасной неожиданностью: замкнутые системы стали терять устойчивость при вариациях параметров объекта управления или регулятора (причем – что самое опасное – только при вариациях определенного знака; поэтому малый запас устойчивости часто не выявлялся на испытаниях, а это в дальнейшем приводило к авариям, подрывавшим всякое доверие к методам аналитического конструирования). Поэтому аналитическое конструирование не получило развернутого практического применения, и интерес к нему в последующие годы быстро угас, тем более, что объяснения опасных явлений теория управления тогда еще не давала.

Поясним возникающие парадоксы на простом примере, вызвавшем оживленную дискуссию после его опубликования в 1973 году [37]. Рассмотрим объект управления

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 0{,}75u \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_1 + x_2 + 0{,}5u \end{cases} \tag{85}$$

с критерием качества типа (75):

$$J = \int_0^\infty (4x_3^2 + u^2)dt\,. \tag{86}$$

Минимум критерия (86) обеспечивает, как нетрудно вычислить, регулятор

$$u=-0{,}16x_1+0{,}36x_2+0{,}88x_3. \tag{87}$$

Этот регулятор обеспечивает как устойчивость замкнутой им системы, так и сохранение устойчивости при вариациях любых коэффициентов в уравнениях (85) и (87).

Пусть теперь переменные x_1 и x_2 непосредственно не измеримы. Тогда мы можем заменить их, пользуясь уравнениями (85) и эквивалентными преобразованиями, на переменную x_3 и ее производные. После преобразований в работе [25] был получен регулятор

$$(0.1D-0.87)u=(0.2D^2+0.56D+1.08)x_3. \tag{88}$$

Подчеркнем, что регулятор (88) получен из регулятора (87) с помощью эквивалентных преобразований. Он обеспечивает те же переходные процессы. И в то же время, как легко проверить, устойчивость замкнутой системы может теперь исчезнуть при сколь угодно малых положительных вариациях некоторых коэффициентов регулятора (88). В этом и заключался парадокс: замкнутые системы (85)–(87)

и (85)–(88) эквивалентны, имеют одни и те же корни характеристического полинома, одни и те же решения, одинаковые переходные процессы. И в то же время по такому важному свойству как сохранение устойчивости при вариациях параметров они различаются разительно. Это долго казалось непонятным; даже дискуссия, вспыхнувшая сразу после публикации [37] тогда, в 1973г., еще ничего не прояснила, и только много позже, в [47], парадокс был разъяснен.

Оказалось, что причины парадокса лежат очень глубоко, что они связаны и необходимостью уточнения таких важных понятий как эквивалентные преобразования математических моделей, корректность математического решения задач физики и техники, возможность изменения корректности при эквивалентных преобразованиях. Об этих важных вещах мы расскажем в отдельной главе.

Что касается оптимизации многомерных систем, в которых часть переменных не измеряема, то после разъяснивших многое работ Р. Калмана [15,16] для восстановления не измеряемых переменных стали использовать фильтры Калмана, наблюдатели Люенбергера и т.п. Данный круг вопросов был наиболее подробно освещен в монографии [18].

Оптимальные регуляторы в нелинейных системах управления

В работах А.М. Летова [28,29] для линейных систем и квадратичных критериев качества были установлены три важных факта:

1. Движение по экстремали в общем случае не устойчиво.
2. Из семейства экстремалей можно выделить устойчивое подсемейство меньшей размерности.
3. Если удается построить уравнение, которому удовлетво-

ряет устойчивое подсемейство экстремалей, то можно построить регулятор, обеспечивающий устойчивость замкнутой системы и минимум критерия качества, совместимый с устойчивостью.

Естественно, что уже в 60-е годы начались исследования по проблеме обобщения результатов А.М. Летова, по синтезу регуляторов, реализующих движение по экстремалям из устойчивого их подсемейства для нелинейных объектов управления или для критериев качества более общего вида, не обязательно квадратичных. Но для таких критериев, как и для нелинейных объектов управления, уравнения Эйлера-Пуассона нелинейны и построение уравнения устойчивого подсемейства экстремалей эквивалентно понижению порядка нелинейного дифференциального уравнения вдвое. Понятно, что задача эта очень трудна и до сего дня решения не получила.

На помощь пришла теория вырожденных функционалов. Она позволила синтезировать управление, обеспечивающее минимум расхода энергии и топлива для многих транспортных средств, для ряда электроприводов и некоторых других объектов управления [42, 43, 44, 47].

Действительно, для большинства транспортных средств интенсивность расхода топлива q зависит от того, в какой точке своего пути $s(t)$ находится транспортное средство, существенно зависит от скорости $\dot{s}$, а от ускорения $\ddot{s}$ либо не зависит вовсе, либо зависит линейно (если нет точной линейной зависимости, то все же обычно справедлива с хорошей степенью точности приближенная линейность). Поэтому полный расход топлива Q за время T будет равен интегралу

$$Q = \int_0^T q dt = \int_0^T [A(t; s; \dot{s}) + \ddot{s} B(t; s; \dot{s})] dt . \tag{89}$$

Поскольку функционал (89) зависит от второй производной искомой функции $s(t)$, то для него уравнение Эйлера-

Пуассона должно иметь четвертый порядок, а уравнение устойчивого подсемейства экстремалей — второй порядок. Однако благодаря тому, что вторая производная входит в функционал линейно, уравнение Эйлера-Пуассона, как нетрудно проверить, принимает вид:

$$\begin{aligned} &A_s - A_{t\dot{s}} + B_{tt} + (2B_{ts} - A_{s\dot{s}})\dot{s} + B_{ss}\dot{s}^2 + \\ &+ (B_{t\dot{s}} + B_{s\ddot{s}}\dot{s} - A_{\dot{s}\ddot{s}})\ddot{s} = 0 \end{aligned} \tag{90}$$

т.е. вырождается в уравнение второго порядка, вырождается в уравнение устойчивого подсемейства экстремалей. Поэтому для вырожденных функционалов отпадает наиболее сложная часть решения — построение уравнения устойчивого подсемейства — и это позволяет синтезировать оптимальный регулятор непосредственного по уравнению Эйлера. Подобные регуляторы, синтезируемые непосредственно по уравнению Эйлера, было в [46] предложено назвать эйлеровскими регуляторами. Они позволили реализовать оптимальное управление для судов [42]; электровозов и тепловозов [43]; многих классов электроприводов [43,46]. Эйлеровские регуляторы часто оказывались очень простыми и удобными в реализации. Так, проблему оптимального управления электровозов и тепловозов удалось в [43] свести к минимизации вырожденного функционала

$$J = \int_0^T (\ddot{s}\dot{s} + \omega(s)\dot{s} + k_1\dot{s}^2 + k_2\dot{s}^2)dt\,, \tag{91}$$

где $\omega(s)$ - сложная функция от s, отражающая распределение подъемов и спусков на перегоне; k_1 и k_2 – постоянные. Уравнение Эйлера-Пуассона для функционала (91) сводится к уравнению

$$\ddot{s}(2k_1 + 6k_2\dot{s}) = 0 \tag{92}$$

и имеет простое решение: $\dot{s} = const$, которое легко реализуется элементарно простым регулятором. Дополнительные трудности вносят участки с достаточно крутыми подъемами и спусками, где управление выходит на ограничение по мощности, но и эти трудности вполне преодолимы (смотри [43]). Столь же просты и удобны эйлеровские регуляторы для ряда электроприводов, описанные в монографии [46].

Для транспортных средств, движущихся с малыми ускорениями, расход топлива не зависит от $\ddot{s}$ и может быть сведен к функционалу

$$Q = \int_0^T q(s;\dot{s})dt\,, \tag{93}$$

в который время в явном виде но входит. Для таких функционалов уравнение устойчивого подмножества решений уравнения Эйлера, (которое является уравнением второго порядка) вырождается в следующее уравнение первого порядка

$$\frac{\partial q}{\partial \dot{s}}\dot{s} - q = 0\,, \tag{94}$$

(его называют также первым интегралом), которое тоже позволяет синтезировать простой эйлеровский регулятор для реализации оптимального управления. Этот регулятор может работать как адаптивный, и в этом случае не требует конкретной информации о зависимости q от s и $\dot{s}$. Технические решения, позволяющие реализовать минимум расхода топлива, приведены в книге [43]. На важность решения этой проблемы было еще раз обращено в [53].

Разумеется, при оптимизации любого конкретного объекта возникают связанные с ним конкретные трудности, которые надо преодолевать. Так, например, в проблеме оптимизации управления силовыми установками судов главной трудностью было то, что сложная зависимость интенсивности расхода топлива $q(s;\dot{s})$ от распределения глубин по фарватеру от. пропульсивного коэффициента винта, и т.д. не имела аналитических выражений и записывалась лишь в виде сложного комплекса графиков. Пришлось разработать графические методы решения уравнения Эйлера. Графические методы, предложенные в [42], позволили синтезировать исключительно простой эйлеровский регулятор, который потом, в 1969-1973 годах, выпускался серийно, был установлен более чем на 400 судах Волжского и Камского пароходства, позволил сократить расход топлива на 10-15% (более подробно все это изложено в монографии [44]) и принес более сорока миллионов (в тогдашних полноценных рублях) дополнительной прибыли. Особенности господствовавшей в те годы командно-административной системы привели к тому, что даже этот, исключительно простой и эффективный регулятор не получил массового распространения. Его приходилось “внедрять”, поскольку непосредственно обслуживающие его команды судов от всей многомиллионной экономии не получали ничего, ни копейки. В результате при очередном ремонте оптимальный регулятор, как правило, незаметно “исчезал” с корабля, и к 1990г. оптимальные регуляторы, столь успешно “внедренные” в 1968–1973г.г., почти все исчезли.

Будем надеяться, что в новых экономических условиях этот эйлеровский регулятор, как и оптимальное управление в целом, будет, наконец, востребован. Научные результаты, лежащие в основе синтеза оптимального управления, оптимальных эйлеровских регуляторов, опубликованы в [42, 43, 44, 46, 47] и вполне доступны.

Главная их суть заключается в следующем: даже если (как это чаще всего бывает) нам неизвестны заранее и полностью все силы, действующие на управляемый объект, что исключает возможность использовать программное управление, мы можем использовать эйлеровские регуляторы, для которых необходима только легко доступная информация о средних значениях или корреляционных функциях воздействующих сил.

До настоящего времени известны только два класса объектов управления, для которых реализуемо оптимальное управление при неполной информации о возмущающих воздействиях:

1. Линейные системы с квадратичными (или среднеквадратичными) критериями качества. Для синтеза оптимального управления в таких системах достаточна информация о корреляционных функциях (или спектрах) возмущающих воздействий.

Теория подобных систем разрабатывается еще с 50-х годно и этой теории (и практическим ее приложениям) посвящена огромная литература.

В предыдущем изложении рассмотрена лишь небольшая часть этих исследований; автор старался выделить только главные, узловые моменты развития теории.

2. Значительно менее известен второй класс - системы с вырожденными функционалами, для которых можно построить уравнение, описывающее устойчивое подсемейство экстремалей и синтезировать эйлеровский регулятор. Для синтеза его достаточна информация о среднем значении действующих сил. Несмотря на свою меньшую известность, теория эйлеровских регуляторов позволила найти и реализовать оптимальное управление для многих важных объектов управления.

Теория оптимального управления и синтеза оптимальных регуляторов для этого (второго) класса объектов управления исследовалась (начиная с 1968г.) на факультете Прикладной математики - процессов управления Ленинградского университета (переименованного потом в Санкт-Петербургский государственный университет).

До настоящего времени только для этих двух классов управляемых объектов решена задача синтеза оптимального управления при не полностью известных возмущающих силах случайного характера.

Вполне возможно, что можно найти и другие классы объектов управления, для которых можно реализовать оптимальное управление при возмущающих силах, которые не полностью известны, и получить на этой основе значительный экономический эффект. Здесь открыто большое поле для интересной и нужной исследовательской работы.

Литература.

1. Абдуллаев Н.Д., Петров Ю.П. Теория и методы проектирования оптимальных регуляторов. Л. Энергоатомиздат. 1985. 240с.
2. Александров А.Г. Синтез регуляторов многомерных систем, М. Машиностроение. 1986. 272с.
3. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. М. Наука. 1970. 239с.
4. Бородай И.К., Нецветаев Ю.А. Качка судов на морском волнении. Л.Судостроение.1969г.
5. Ван-Трис Г. Синтез оптимальных нелинейных систем управления. Изд-во “Мир”. 1969. 167с.
6. Велин Н.В., Рассказов Ф.Н. Анализ оптимальных стохастических систем управления электроприводами. Самара.1996.
7. Веремей Е.И., Галактионов М.А., Петров Ю.П. Закон управления рулевой установкой судна, обеспечивающий стабилизацию на курсе при малом числе перекладок руля. Материалы по обмену опытом. НТО им. Крылова. Л.1977. вып.267.
8. Веремей Е.И., Корчанов В.М. Фильтрация волновых помех в системе стабилизации движения судов. Вопросы судостроения, серия “Судовая автоматика”. 1983. Вып.28,
9. Винер Н. Кибернетика. М. Советское радио. 1958. 215 с.
10. Волгин Л.Н. Оптимальное дискретное управление динамическими системами. М.Наука.1986. 239с.
11. Зубов В.И. Методы А.М Ляпунова и их применение. Изд-во ЛГУ, 1957, 241 с.
12. Зубов В.И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л., «Машиностроение». 1974. 335 с.
13. Зубов В.И, Устойчивость движения. М., Высшая шко-

ла. 1973. 271с.
14. Зубов В.И. Лекции по теории управления. М., Наука, 1975. 495с.
15. Калман Р.Е. Когда линейная система является оптимальной? Труды американского общества инженеров-механиков. Серия Д. №1, “Мир”. 1964.
16. Калман Р.Е., Бьюси Р.С. Новые результаты в линейной фильтрации и теории предсказания. Труды американского общества инженеров-механиков. Серия: техническая механика. 1964. с.95-107.
17. Катковник В.Я., Полуэктов Р.Л. Многомерные дискретные системы управления. М, Мир. 1966.416с.
18. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М. Мир. 1977. 650 с.
19. Колмогоров А.Н. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей. Известия АН СССР. 1941. Серия математическая. №1.с.3-14.
20. Красовский А.А. Аналитическое конструирование контуров управления летательными аппаратами. М., 1969.
21. Красовский А.А. Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. Наука. 1973, 558с.
22. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. М, Наука. 1987, 304с.
23. Ла-Салль Ж. Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова . М., Мир, 1964,
24. Ларин В.Б., Науменко К.И., Сунцев В.Н. Спектральные методы синтеза линейных систем с обратной связью. Киев. Наукова думка. 1971. 106с.
25. Ларин В.Б., Науменко К.И., Сунцев В.Н. Синтез оптимальных линейных систем с обратной связью. Киев. 1973.150 с.
26. Ларин В.Б., Науменко К.И., Сунцев В Н., Алиев Ф.А. Оптимизация линейных инвариантных во времени систем

управления. Киев. Наукова думка. 1978. 327с.
27. Ленинг Дж.Х., Беттин Р.Г. Случайные процессы в задачах автоматического управления. М. Изд-во иностранной литературы. 1958. 368с.
28. Летов А.М. Аналитическое конструирование регуляторов. Автоматика и телемеханика, 1960, №4, с.436-446. №5, с.561-570, №6 с.661-669,
29. Летов А.М. Динамика полета и управление. Наука. 1969. 359 с.
30. Лурье А.И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. Гостехиздат. 1951.
31. Лурье А.И., Розенвассер Е.Н. О методах построения функции Ляпунова в теории нелинейных регулируемых систем. Изд-во А.Н.СССР, 1960.
32. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. Физматгиз. 1959.
33. Максвелл Д.К., Вышнеградский И.А. Стодола А. Теория автоматического регулирования (линеаризованная задача). М., Изд-во А.Н.СССР, 1949.
34. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М., Наука, 1966.
35. Моисеев Н.Д. Очерки развития теории устойчивости. Гостехиздат. 1949.
36. Меррием К. Теория оптимизации и расчет систем управления с обратной связью. Изд-во Мир.1967. 549 с.
37. Надеждин П.В. О потере грубости при элементарных преобразованиях дифференциальных уравнений управляемых систем. Автоматика и телемеханика. 1973. №1. с.185-187.
38. Ньютон Д., Гулд Л., Кайзер Д. Теория линейных следящих систем. Физматгиз. 1961. 407с.
39. Острем К. Введение в стохастическую теорию управления. М., Мир. 1973. 320 с.
40. Первозванский А.А. Курс теории автоматического

управления. М. Наука. 1986. 615с.
41. Первозванский А.А., Барабанов А.Е. Оптимизация по равномерно частотным показателям (H^{∞}–теория). Обзорная статья. Автоматика и телемеханика. 1992. №9.
42. Петров Ю.П. Оптимальные регуляторы судовых силовых установок. Л. Судостроение. 1966. 121 с.
43. Петров Ю.П. Оптимальное управление движением транспортных средств. Л. Энергия. 1969. 95 с.
44. Петров Ю. П. Оптимизация управляемых систем, испытывающих воздействие ветра и морского волнения. Л. Изд-во “Судостроение”.1973. 214 с.
45. Петров Ю.П. О неединственности решения задачи синтеза оптимального регулятора. Известия ВУЗ. Электромеханика. 1974. №2. с.221-223.
46. Петров Ю.П. Вариационные методы теории оптимального управления. Издание второе. Л. Энергия. 1977. 280 с.
47. Петров Ю.П. Синтез оптимальных систем управления при не полностью известных возмущающих силах. Изд-во ЛГУ, 1987. 289с.
48. Петров Ю.П., Червяков В.В. Системы стабилизации буровых судов. Издание первое,1985, второе, дополненное, 1997. Л., Судостроение. 261 с.
49. Петров И.П. Вариационные методы синтеза гарантирующих управлений. Санкт-Петербургский гос. университет. 1995. 54 с.
49[а]. Петров Ю.П. Новые главы теории управления, Санкт-Петербург, СПбГУ, 2000, 156 с.
50. Садомцев Ю.В. Аналитический синтез регуляторов при случайных возмущениях. Сборник “Аналитические методы синтеза регуляторов”. Саратов. 1978. с.39-57.
51. Солодовников В.В. Введение в статистическую динамику систем автоматического управления. ГИТТЛ.1952.
52. Солодовников В.В. Статистическая динамика линейных систем управления. М.1960.

53. Уржумцев Ю.С., Пантелеев В.П. Об автоматической минимизации энергоемкости транспортных перемещений. Доклады А.Н.СССР, 1983.
54. Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А. Адаптивное управление динамическими объектами. М. Наука. 1981. 448с.
55. Цейтлин Я.М. Проектирование оптимальных линейных систем. Изд-во “Машиностроение”. 1973. 240с.
56. Чанг Ш. Синтез оптимальных систем автоматического регулирования. Изд-во Макиностроение.1964. 440с.
57. Честнов В.Н. О возможной неустойчивости управляемых систем с учетом параметрических возмущений. Межвузовский сборник. “Аналитические методы синтеза регуляторов”. Саратов. 1984. с.26-35.
58. Якубович В.А. Оптимизация и инвариантность линейных стационарных систем управления. Автоматика и телемеханика. 1984. №8. с.5-45.
59.Якубович В.А. Линейно-квадратичная задача оптимального гашения вынужденных колебаний. Доклады РАН. 1993. т.333. №2.
60. Янушевский Р.Т. Теория линейных оптимальных многосвязных систем управления. Изд-во “Наука”. 1973. 464с.

Литература к главе 10

1. Адамар, биография. Авторы: Полищук Е.М., Шапошникова Т.О., Л. Наука. 1990, 254с.
2. Андронов А.Л., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М. Наука, 1981. 568с. (повторение издания 1937 г.)
3. Воротников В.И. Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. М., Наука, 1991, 284 с.
4. Гайдук А.Р. К исследованию устойчивости линейных систем. Автоматика и телемеханика. 1997, №3, с.153-160.
5. Гайдук А.Р. Синтез систем управления при слабо обусловленной полноте объектов. Автоматика и телемеханика. 1997, №4, с.133-144.
6. Зубов В.И. Математические методы исследования систем автоматического управления. Л. Машиностроение, 1974, 335с.
7. Математическая энциклопедия. Том 4, с. 800, М. «Советская энциклопедия». 1984.
8. Надеждин П.В. О потере грубости при элементарных преобразованиях дифференциальных уравнений управляемых систем. Автоматика и телемеханика. 1973, №1, с.185-187,
9. Петров Ю.П. Вариационные методы теории оптимального управления. (Издание второе). Л. Энергия, 1977. 280с.
10. Петров Ю.П. Синтез оптимальных систем управления при не полностью известных возмущающих силах. Л. Издательство ЛГУ, 1987. 289с.
11. Петров Ю.П. О скрытых опасностях, содержащихся в традиционных методах проверки устойчивости. Известия ВУЗ, Электромеханика. 1991, №11,с.106-108.
12. Петров Ю.П. Устойчивость линейных систем при вариациях параметров. Автоматика и телемеханика. 1994. №11. с.186-189.

13. Петров Ю.П., Червяков В.В. Системы стабилизации буровых судов. Издание второе, дополненное, изд-во СПбГТУ, 1997. 261с.
14. Петров Ю.П. Третий класс задач физики и техники — промежуточных между корректными и некорректными. С.-Петербург, 1998. 29с.
15. Петров Ю.П., Петров Л.Ю. Неожиданное в математике и его связь с авариями и катастрофами последних лет. Первое издание 1999г., второе издание, дополненное, 2000г. С.-Петербург, 120с.
16. Подчукаев В.А. К проблеме грубости. Межвузовский сборник. Саратов. 1998. с.206-221.
17. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Частотные критерии робастной устойчивости и апериодичности линейных систем. Автоматика и телемеханика. 1990. №9.
18. Сергеев В.О. Некорректно поставленные задачи и методы их решения. С.-Петербург. 1999. 43с.
19. Стеклов В.А. Основы теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. ГИЗ, М-Л. 1927.
20. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М., Наука, 1986, 285с.

В дополнение к обширной библиографии по некорректным задачам, приведенной в [20], добавим еще несколько работ, опубликованных после 1985 года:

21. Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю. Итерационные процедуры в некорректных задачах. М. Наука, 1986.
22. Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю. Линейное программирование. М. «Факториал», 1988.
23. Васин В.В., Агеев А.Л. Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург, Уральская издательская фирма «Наука», 1993.
24. Морозов В.А., Иваницкий А.Ю. Регуляризация задач алгебры и анализа. М. Издательство Московского университета. 1987.

25. Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. Нелинейные некорректные задачи. М. Наука. Физматгиз. 1995.
26. Харитонов В.Л. Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства линейных дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения. 1978. №11, стр. 2086–2088.

$$x_2 = \dot{x}_1 + 2x_1 - u$$
$$x_3 = \dot{x}_2. \qquad (29)$$

Относительно новых переменных уравнение (24) перейдет в систему трех уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_2 - 2x_3, \end{cases} \qquad (30)$$

а уравнение (25) перейдет в уравнение нулевого порядка:

$$u = -x_1 - 2x_2 - x_3. \qquad (31)$$

Легко проверить, что решения $x_1(t)$ и $u(t)$ у систем (24)-(25) и (30)-(31) – совпадают: так функция

$$x_1(t) = c_1 e^{-3t} + (c_2 t + c_3)e^{-t} \qquad (32)$$

является решением как системы (24)-(25), так и системы (30)- (31), что и показывает, что эти системы в отношении задачи о вычислении переменной $x_1(t)$ — эквивалентны. В то же время система (30)-(31) не только устойчива, но и параметрически устойчива, т.е. сохраняет устойчивость при достаточно малых вариациях любых своих коэффициентов. Эквивалентные системы (24)-(25) и (30)-(31) различаются по свойству параметрической устойчивости.

Анализ этого и ему подобных примеров привел к выводам, опубликованным в [11] и [12]:

1. Никакое исследование характеристического полинома замкнутой системы не может всегда, во всех случаях дать правильное заключение о сохранении устойчивости при вариациях параметров;
2. Никакое исследование коэффициентов системы, приведенной к нормальной форме Коши, не может гарантировать правильного ответа на вопрос о сохранении устойчивости при вариациях параметров.

Немного позже было установлено (опубликовано в [15]), что и существование у исследуемой системы дифференциальных уравнений функции Ляпунова также не гарантирует сохранения устойчивости при сколь угодно малых вариациях параметров.

3. Традиционные методы проверки устойчивости и ее сохранения при вариациях параметров не гарантируют правильности результатов расчета и должны быть дополнены.

Традиционные методы, издавна и повсеместно используемые в проектно-конструкторских организациях, заключаются в следующем: вычисляется характеристический полином замкнутой системы и его корни (обычно перед этим уравнения системы приводят к нормальной форме Коши для того, чтобы использовать стандартные программы вычисления на ЭВМ, составленные для нормальной формы записи уравнений).

Если все корни характеристического полинома лежат в левой полуплоскости комплексного переменного далеко от мнимой оси, то традиционно делался вывод о том, что система устойчива и сохранит устойчивость, во всяком случае, при малых вариациях коэффициентов и параметров, входящих в уравнения системы. Этот вывод основывался на теореме о непрерывной зависимости корней полинома от его коэффициентов, из которой следует, что если вариации коэффициентов полинома малы, то малы и вызванные ими перемещения корней на комплексной плоскости. Поэтому, считалось, что корни, первоначально лежащие далеко от мнимой оси, не могут при малых изменениях коэффициентов переместиться из левой полуплоскости в правую и система сохранит устойчивость при вариациях параметров. При этом не учитывались особые случаи, обнаруженные много позже [11,12,15].

Отметим, что после 1978г. оживились исследования в области сохранения устойчивости уже не только при малых вариациях коэффициентов характеристического полинома, но и при конечных, не обязательно малых, отклонениях коэффициентов от своих номинальных значений, что особенно важно для приложений.

Предположим, что некоторая система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами имеет характеристический полином

$$\Delta = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots a_0 , \qquad (33)$$

но все его коэффициенты известны лишь с конечной точностью и находятся в интервалах

$$a_i - \Delta a_i \le a_i \le a_i + \Delta a_i , \qquad (34)$$

где все $\Delta a_i > 0$. Как проверить, будет ли гурвицевым полином (33), при любых, не обязательно малых, изменениях своих $n+1$ коэффициентов, очерченных неравенством (34)? До 1978г. считалось, что для этого нужно проверить выполнение условий Гурвица у 2^{n+1} полиномов, поскольку таково число возможных сочетаний положительных и отрицательных отклонений коэффициентов от своих номинальных значений.

В современных сложных системах управления число коэффициентов характеристического полинома может достигать и двадцати и сорока и проводить 2^{20}, а тем более 2^{40} проверок крайне затруднительно.

В 1978г. молодой сотрудник кафедры В.И. Зубова Факультета прикладной математики – процессов управления Санкт-Петербургского университета В.Л. Харитонов опубликовал статью [26], в которой показал, что число проверяемых полиномов может быть гораздо меньше. Работа Б.Л. Харитонова получила заслуженную известность и была подхвачена многими исследователями и в России и за рубежом. Были опубликованы десятки работ, посвященных важной теме сохранения устойчивости при вариациях параметров.

Методика В.Л. Харитонова и его последователей сводила проблему проверки сохранения устойчивости к исследованию характеристического полинома, но в 1991-1994г.г. 6ыло показано [11,12], что никакое исследование характеристического полинома как такового, без дополнительных расчетов, без анализа преобразований исходной системы уравнений вообще не может гарантировать правильности заключений о сохранении устойчивости.

Этот вывод не сразу был признан. Статья [12] до своей публикации в 1994г. более трех лет рассматривалась в редколлегии журнала «Автоматика и телемеханика», неоднократно обсуждалась с автором и видными специалистами по теории управления. Только после публикации ее в наиболее авторитетном из российских журналов по управлению утвердилось признание научным сообществом недостаточности ранее применяемых традиционных методов проверки параметрической устойчивости, признание необходимости дополнительных проверок, описанных в [11, 12], а более подробно в [15].

Однако признание научным сообществом, признание кругом наиболее авторитетных специалистов по прикладной математики и теории управления, еще не означает широкого признания, не означает массового практического применения результатов научного исследования.

Несмотря на то, что публикация основных результатов в журнале «Автоматика и телемеханика» относится к 1994 году [12], вплоть до 2001 года использование дополнительных проверок, предложенных в [12], носило лишь единичный характер. Массового применения, широкого признания не было. Частично это, разумеется, связано с тем, что дополнительные проверки, предложенные в [12] и в [15], повышающие надежность расчетов, требуют в то же время дополнительного труда, дополнительной работы. Поэтому не следует ожидать, что в проектно-конструкторских организациях немедленно бросятся использовать дополнительные проверки. Их начнут делать тогда, когда будет широко признана их необходимость, когда будет признано, что без таких проверок результаты расчетов заведомо недостоверны и смысла не имеют. Чисто логически это достаточно ясно – ведь если приведен хотя бы один пример того, что две системы с одним и тем же характеристическим полиномом, одной и той же матрицей коэффициентов при записи в нормальной форме Коши, одной и той же функцией Ляпунова, могут в то же время коренным образом различаться по свойству параметрической устойчивости (а ведь такие примеры приводились уже в 1991-94 годах в публикациях [11,12]), то отсюда уже чисто логически вытекает, что традиционные методы, опирающиеся на исследование характеристического полинома или функции Ляпунова заведомо не полны, а, следовательно, и недостоверны. Логически ясно, что если мы хотим избежать аварий, возникающих при неверной оценке параметрической устойчивости проектируемых систем управления, то необходимо безотлагательно применить дополнительные проверки. Однако неопровержимость логического вывода еще не означает сколько-нибудь массового применения дополнительных проверок в проектно-конструкторских организациях. Как уже указывалось, массового применения до 2001 года так и не было.

Попробуем разобраться в причинах этого. Известно, что когда в 1960 году были опубликованы статьи А.М. Летова об аналитическом конструировании регуляторов, о которых говорилось в предыдущей главе, то уже через несколько лет предложенные А.М. Летовым методы широко использовались. Точно так же, после публикации в 1961 г. русских переводов работ Р. Каллмана по управляемости и наблюдаемости через 3-4 года большинство русских исследователей в области управления учли его результаты и использовали их. Чуть ли не большинство публикаций по управлению в те годы начиналось со слов «в настоящей статье рассматриваются системы управления, управляемые» (или, реже – не управляемые) «по Калману». Различие между теми и другими системами было быстро осознано. Таким образом, мы убеждаемся, что российское научное сообщество в те годы быстро реагировало на новые научные результаты и использовало их.

Почему этого нет сейчас? Причина частично заключается в уменьшении численности научных работников России (с 1989 по 2000 г. она упала вдвое, и в еще большей степени сократилось число активно работающих), но главное – в очень резком уменьшении средств коммуникации между ними. Тиражи научных журналов упали катастрофически. Тираж журнала «Автоматика и телемеханика» в 1959 году составлял 8 тысяч экземпляров, в 1977 г. – 7 тысяч, в 1994 г. – 523 экземпляров, в 2000 г. – 400. Тираж журнала Академии наук «Электричество»: 1990 год – 5048 экз., 1997 г. – 1000 экз. Тираж журнала «Известия высших учебных заведений», серия «Электромеханика»: 1973 г. – 3000 экз., 1996 г. – 273 экз. Все это – печальные факты недавней истории науки в целом и прикладной математики в частности (так, «Автоматику и телемеханику» вполне можно рассматривать как журнал, посвященный почти исключительно прикладной математике). А ведь для того, чтобы новый научный результат был подхвачен, он должен быть прочитан исследователем, который в год его публикации не поглощен полностью, до предела, своей собственной тематикой исследований, является частично свободным и готовым переключиться на новую перспективную проблематику. Таких исследователей немного. При тиражах научных журналов в 3-8 тысяч экземпляров подобные исследователи обязательно находились и научные результаты подхватывались, а при тираже 300-500 экземпляров более вероятно, что «свободных» исследователей, прочитавших и готовых подхватить новый научный результат и заняться им, не найдется ни одного, что часто и происходит.

В результате научное открытие остается не использованным и не приносит той пользы, которую могло бы принести. По всей вероятности, существует некоторая «критическая масса» ученых, активно работающих в данной области, «критическая масса» тиражей научных журналов и книг. Если реальная «масса» меньше, «критической» — наука замирает.

Научная жизнь России последних десяти лет дает достаточно материала для анализа не только поступательного развития науки, ее роста, накопления научных результатов и их практических приложений, но и для анализа кризисов в науке, ее поражений и временного отступления. Пусть все произошедшее будет хотя бы уроком на будущее.

Что касается конкретно публикаций [11], [12], то отклики на них все же были. Обсуждался вопрос: если традиционные методы проверки параметрической устойчивости, как выяснилось, действительно не полны, не надежны, не могут во всех случаях, включая особые, дать правильный ответ, то какие дополнительные расчеты могут обеспечить достоверность? Высказывались различные предложения, отраженные в статьях [4,5,16]. Дискуссии по данному вопросу еще далеко не закончены.

Расширение класса задач, промежуточных между корректными и некорректными

Первые примеры задач, промежуточных между корректными и некорректными, были обнаружены, как уже указывалось, в теории оптимального управления. Несколько позже подобные задачи обнаружились при решении систем однородных линейных алгебраических уравнений с параметрами и в обобщенной задаче вычисления собственных чисел матриц [13].

Системы линейных однородных уравнений с параметрами часто встречаются во многих приложениях – при решении линейных дифференциальных уравнений, при вычислении частот малых колебаний механических и электрических систем и во многих других практических задачах.

Пример: система уравнений

$$\begin{aligned} &(\lambda^2 - 2\lambda)x_1 + (1 - 3\lambda)x_2 = 0 \\ &-\lambda x_1 + a x_2 = 0 \end{aligned} \qquad (35)$$

является линейной однородной и поэтому, безусловно, имеет тривиальное нулевое решение: $x_1 = x_2 = 0$. Однако наибольший интерес имеет задача вычисления значений параметра λ, при которых система имеет еще и ненулевые решения. Эти значения параметра λ называются собственными значениями (или собственными числами) системы. Исключая из (35), например, переменную x_1, получим для переменной x_2 уравнение

$$\Delta(\lambda)x_2 = 0, \qquad (36)$$

где полином $\Delta(\lambda)$ является определителем системы (35):

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda^2 - 2\lambda & 1 - 3\lambda \\ -\lambda & a \end{vmatrix} = (a-3)\lambda^2 + (2a-1)\lambda. \qquad (37)$$

Такое же уравнение

$$\Delta(\lambda)x_1 = 0 \qquad (38)$$

получается и после исключения из системы (35) переменной x_2. Понятно, что ненулевые решения системы (35) возможны в том и только в том случае, если определитель системы равен нулю. Приравнивая определитель нулю, получаем квадратное уравнение $(a-3)\lambda^2 + (2a-1)\lambda = 0$, из которого находим два собственных значения λ_1 и λ_2. 'Гак, при $a=1$ находим собственные значения $\lambda_1=0;\ \lambda_2=-0{,}5$ и задача их вычисления при $a\neq 3$ — корректна, поскольку при малых отклонениях любых коэффициентов, в том числе и коэффициента a от расчетных значений и λ_1, и λ_2 изменяются мало. В то же время при $a=3$ задача вычисления собственных значений для системы (35) становится некорректной: при $a=3$ будет одно собственное значение $\lambda_1=0$. Если же $a=3(1+\varepsilon)$, то $\lambda_1=0; \lambda_2=2+\dfrac{5}{2\varepsilon}$ – т.е. уже при сколь угодно малых ε появляется второе собственное значение, которое при $\varepsilon\to 0$ совсем не стремится к первому и исчезает только при точном равенстве $\varepsilon=0$.

Теперь рассмотрим систему

$$\begin{aligned}&(1-\lambda)x_1+x_2+2x_3=0\\&x_1+(1-\lambda)x_2+3x_3=0\\&x_1+x_2=0,\end{aligned} \tag{39}$$

и поставим ту же задачу вычисления собственных значений параметра λ. Вычисляя определитель системы (39):

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 2\\ 1 & 1-\lambda & 3\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

по правилу Саррюса или разложением по минорам последней строки находим

$$\Delta(\lambda)=5\lambda. \tag{40}$$

Приравнивая определитель нулю, находим единственное собственное значение $\lambda_1=0$. Нетрудно проверить, что поставленная задача корректна. Действительно, проварьировав все десять ненулевых коэффициентов системы (39) и вычисляя определитель

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1+\varepsilon_1 - (1+\varepsilon_2)\lambda & 1+\varepsilon_3 & 2(1+\varepsilon_4) \\ 1+\varepsilon_5 & 1+\varepsilon_6 - (1+\varepsilon_7)\lambda & 3(1+\varepsilon_8) \\ 1+\varepsilon_9 & 1+\varepsilon_{10} & 0 \end{vmatrix},$$

по правилу Саррюса или разложением по минорам последней строки, убедимся, что при малых ε_i единственное собственное значение изменится мало.

Однако вычисление определителя по правилу Саррюса или разложением по минорам реально выполнимо лишь для определителей невысокого порядка. Для тех систем однородных линейных уравнений большого порядка, с которыми приходится иметь дело на практике, чаще используют другой метод — предварительно исключают переменные одну за другой, например, с помощью домножений и сложений, что на ЭВМ выполняется быстро и легко, пока не придут к системе невысокого порядка. Проиллюстрируем этот метод на примере системы (39). Домножим второе из уравнений (39) на $-(1-\lambda)$ и сложим с первым, а третье домножим на -1 и сложим со вторым. Переменная x_1 после этих домножений и сложений будет исключена и мы придем к системе двух уравнений:

$$\begin{aligned} &(\lambda^2-2\lambda)x_2+(1-3\lambda)x_3=0 \\ &-\lambda x_2+3x_3=0 \end{aligned} \qquad (41)$$

Система (41) имеет единственное собственное значение $\lambda_1=0$ – то же, что и у системы (39). Таким образом, по отношению к задаче о вычислении собственных значений параметра λ системы (39) и (41) эквивалентны, и преобразование системы (39) в систему (41) является эквивалентным преобразованием.

В то же время для системы (41) задача вычисления собственных значений – некорректна. Действительно, система (41) совпадает (с точностью до обозначений переменных) с системой (35), в которой $a=3$. А для $a=3$ некорректность задачи вычисления собственных значений уже была показана.

Этот пример и подобные ему другие примеры изменения корректности при эквивалентных преобразованиях, используемых в ходе решения задачи, были приведены в 1997г. во втором издании монографии [13], а также в [14,15]. Там же было указано, что эти изменения корректности могут стать (и становятся!) еще одним серьезным источником ошибок в расчетах сверх уже известных источников ошибок. Конечно, если все коэффициенты уравнений являются небольшими целыми числами, то опасности нет. Однако в реальных системах все коэффициенты дробные, и поэтому при домножениях и сложениях неизбежно возникают ошибки округления. А в некорректных системах даже сколь угодно малая ошибка округления сразу приводит к грубой ошибке в результатах расчета.

Для избежания ошибок в [12,13,14,15] было предложено:

1. Внести уточнение в известное классическое понятие эквивалентных преобразований, а именно – ввести понятие «преобразований, эквивалентных в расширенном смысле», определив их как преобразования, которые:

а) во-первых, эквивалентны в классическом смысле, то есть не изменяют решений преобразованной системы (согласно классическому определению «две системы называются эквивалентными (или равносильными), если они имеют одно и то же множество решений». (Математический энциклопедический словарь под редакцией Ю.В. Прохорова, М. 1995 г. стр. 511).

б) во-вторых, не изменяют корректности решаемой задачи. Преобразования системы (39) в систему (41), системы (24)-(25) в систему (30)-(31) доставляют примеры преобразований, эквивалентных в классическом смысле, но не в расширенном. Эквивалентные преобразования, изменяющие параметрическую устойчивость систем управления, являются частным случаем преобразований, изменяющих корректность.

2. Объединить задачи, способные изменять свою корректность при эквивалентных (в классическом смысле) преобразованиях, используемых при их решении, в отдельный, третий класс – дополнительный к ранее известным классам корректных и некорректных задач [14].

3. Начать изучение свойств преобразований, эквивалентных в расширенном смысле и свойств задач, относящихся к третьему классу.

Третий пункт программы начал выполняться в [15]. Там описан метод «матриц степеней», который позволяет довольно просто установить — какие преобразования и для каких систем приводят к изменению корректности и какие – не приводят.

В частности, этот метод позволил установить различие между исключением переменных в классической проблеме вычисления собственных значений квадратной матрицы A и в обобщенной задаче о собственных значениях.

Как известно, классическая проблема вычисления собственных значений сводится к поиску значений параметра λ, при которых существуют ненулевые решения векторно-матричного уравнения:

$$(A-\lambda E)x=0, \tag{42}$$

где A – квадратная, размера nxn матрица, E – единичная матрица (т.е. матрица, у которой все элементы, кроме стоящих на главной диагонали, являются нулями, а на главной диагонали все элементы равны единице), x — n–мерный вектор.

Обобщенная проблема собственных значений сводится к той же задаче поиска значений λ, при которых существуют ненулевые решения уравнения

$$(A-\lambda\bar{E})x=0\,, \tag{43}$$

где, в отличие от (42), $\overline{E}$ — не единичная, а квазиединичная матрица, т.е. матрица, у которой все элементы, кроме стоящих на главной диагонали, являются нулями, а на главной диагонали стоят n-r единиц и r нулей. При $r=0$ квазиединичная матрица переходит в единичную.

К уравнению (42) приводят, например, задачи о вычислении частот малых колебаний механических систем, описываемых уравнениями Лагранжа второго рода, задачи об устойчивости систем управления, описываемых дифференциальными уравнениями. К уравнению (43) приводят более сложные задачи о частотах малых колебаний механических и электрических систем, в которых учитываются голономные (не включающие производных) соотношения между переменными, об устойчивости систем управления, у которых в число уравнений входят уравнения без производных – типа уравнения (31) и т.п. В работе [15] было показано, что при исключении переменных из уравнения (42), при сведении уравнения и соответствующего ему определителя к меньшему числу переменных, потери корректности не возникает, а при исключении переменных из системы (43) потеря корректности возможна. Это как раз и объясняет, почему ранее, в эпоху ручного счета, при вычислении собственных значений ошибок из-за изменения корректности не возникало: решение уравнения (43) при ручном счете начинали с уравнений, не содержащих λ, выражали с их помощью одни переменные через другие и приходили после этого к уравнению вида (42), уже с единичной матрицей E, но меньшего порядка, порядка n–r. При машинном счете важнее всего унификация, и машина исключает переменные в уравнении (43) в порядке их индексов, а при этом могут возникать неожиданные серьезные ошибки из-за изменения корректности.

Этот пример подчеркивает общее положение: при переходе к расчетам на быстродействующих вычислительных машинах необходима дополнительная проверка используемых математических методов. Если возможность изменения корректности решаемой задачи при эквивалентных в классическом смысле преобразованиях осознана, то избежать ошибок нетрудно. Главная опасность заключается в неожиданной для пользователя встрече с задачами третьего класса, в неожиданной встрече с изменениями корректности. Если пользователь знает о существовании задач третьего класса, то возможность возникновения ошибок в расчете резко уменьшается.

Любопытно отметить также, что новые стороны, новые возможности уточнения, выявились у такого, казалось бы, привычного и установившегося понятия как эквивалентное преобразование. Действительно, эквивалентными преобразованиями пользовались много сотен лет; само слово «алгебра» происходит от арабских слов «аль-джебр», обозначающих одно из эквивалентных преобразований – перенос членов из левой части уравнения в правую или обратно с изменением знака. Употреблялась эта операция в книге арабского математика аль-Хорезми, жившего еще в первой половине десятого века. Окончательно сформировалась теория эквивалентных преобразований в 18 веке; так, Леонард Эйлер широко пользовался таким преобразованием, как дифференцирование всех членов той или иной рассматриваемой системы. Правила эквивалентных (равносильных) преобразований в настоящее время изучаются в средней школе. И все же в этих привычных еще со школьной скамьи преобразованиях недавно выявились новые стороны. Оказалось, что эквивалентные в классическом смысле преобразования не всегда безобидны, что они могут изменять некоторые важные свойства преобразуемой системы — например, параметрическую устойчивость, — и при решении ряда задач допустим лишь значительно более узкий класс преобразований, а именно, преобразования эквивалентные в расширенном смысле.

Свойства таких преобразований значительно сложней, чем у привычных преобразований, эквивалентных в классическом смысле; изучение преобразований, эквивалентных в расширенном смысле, еще только началось.

Дискуссия вокруг теоремы о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметров

Поскольку все коэффициенты и параметры дифференциальных уравнений, описывающих реальные объекты, известны почти всегда с ограниченной точностью, то необходимым условием надежности всех расчетов, использующих дифференциальные уравнения, является непрерывная зависимость решений от параметров. Если непрерывной зависимости нет, то результаты расчета заведомо ненадежны, поскольку неизбежным сколь угодно малым погрешностям в задании коэффициентов и параметров могут в этом случае соответствовать большие изменения решений. Поэтому центральную роль в прикладной математике играет теорема о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметров. На ней основаны все приложения дифференциальных уравнений. Эта теорема доказана. Ее доказательства приводятся во всех подробных курсах дифференциальных уравнений, но все доказательства проводятся для систем дифференциальных уравнений, приведенных к нормальной форме Коши, т.е. к системе уравнений первого порядка (или для одного уравнения n-го порядка). Поскольку другие формы записи системы дифференциальных уравнений (системы, состоящие из уравнений различных порядков) могут быть сведены к нормальной форме путем эквивалентных преобразований, то теорему о непрерывной зависимости от параметров решений системы дифференциальных уравнений в нормальной форме обычно толкуют расширительно, полагая, что она обеспечивает хотя бы необходимые условия достоверности расчетов для любых систем уравнений.

На самом деле это не так, что доказывает уже рассмотренный ранее пример с системой (24)-(25), для которой зависимость решения от коэффициента при D^2u терпит разрыв. И пример этот не единичен (разнообразные примеры приведены в [15]), поскольку при приведении системы дифференциальных уравнений к нормальной форме Коши с помощью эквивалентных преобразований, не изменяющих самих решений, такие свойства решений как непрерывная зависимость от параметров могут изменяться [15].

Если приходится решать систему

$$(D^3+4D^2+5D+2)x_1=(mD^2+2D+1)x_2$$
$$(D+1)x_2=(D^2+4D+5)x_1, \tag{44}$$

(которая при $m=1$ переходит в систему (24)-(25)) для различных значений параметра m, то вблизи $m=1$ результаты расчета недостоверны для любых значений времени t. Сколь угодно малые отклонения параметра от значения $m=1$ могут привести к большим изменениям решений. Задача нахождения решений системы (44) при $m=1$ – некорректна.

Отметим, что второе из уравнений (44) относится к неканоническим уравнениям, поскольку в нем порядок производных в правой части выше, чем в левой. Подобные уравнения в последний раз рассматривались в учебнике В.А. Стеклова [19]. Потом ими перестали интересоваться, поскольку после приведения к нормальной форме Коши в правых частях уравнений вообще не остается производных. Поэтому нормальная форма Коши является канонической — независимо от того, была исходная система канонической или нет. Однако неканонические системы, во-первых, часто встречается в приложениях, а во-вторых, среди них особенно часто встречаются отсутствие непрерывной зависимости решений от параметров.

Для обеспечения достоверности результатов расчета с использованием дифференциальных уравнений, возможно, окажется необходимым исследовать не только систему в нормальной форме, но и преобразования которые привели исходную систему в нормальную форму. Однако дискуссии о путях обеспечения достоверности расчетов в этой области пока еще далеки от завершения.

Практические приложения

В этом небольшом разделе мы будем рассказывать уже не о математике как таковой, а о применении (а также о неприменении) недавно открытых математических закономерностей.

После того как в публикациях [11,12] и ряде других была показана неполнота традиционных методов расчета параметрической устойчивости, и было показано, что с помощью дополнительных, не очень сложных, вычислений можно восстановить достоверность результатов расчета, то, естественно, было ожидать быстрого использования этих рекомендаций. Это особенно важно потому, что ошибки в расчетах параметрической устойчивости гораздо опаснее, чем ошибки в расчете устойчивости. Если совершена ошибка в расчете и неустойчивая система по расчету признана устойчивой, то ошибка сразу выявится на испытаниях. Если же сделана ошибка в расчете параметрической устойчивости, если запас устойчивости по изменениям параметра мал, а расчет говорит, что запас устойчивости достаточен, то на испытаниях это непосредственно не выявится (часто используемое «покачивание параметров» тоже, как показано в [15], не всегда помогает). Система может успешно пройти испытания, может даже неопределенно долгое время исправно работать в реальных условиях, а затем, при неизбежном в ходе эксплуатации малом «дрейфе» параметров, они могут «переползти» в опасный диапазон и тогда – в совершенно непредвиденный момент времени – происходит внезапная потеря устойчивости, которая может перерасти в аварию и даже катастрофу.

В [15] были приведены примеры аварий и катастроф, произошедших из-за ошибок в расчете параметрической устойчивости. Поэтому можно было ожидать быстрого внедрения в практику проектно-конструкторских организаций дополнительных расчетов, рекомендованных в [12] и страхующих от аварий. Однако этого не произошло. Дело в том, что хотя теоретические основы дополнительных расчетов, страхующих от ошибок, были изложены в [10,11,12], но их практическое применение требовало программного обеспечения – то есть, оплаты дополнительного труда программистов. Российские проектно-конструкторские организации, брошенные в новые и непривычные для них экономические условия, в 1994-2000 годах думали в основном лишь о своем выживании и не желали идти ни на какие дополнительные расходы. Лишь немногие проектно-конструкторские организации России к настоящему времени используют у себя дополнительные проверки, гарантирующие правильность расчетов параметрической устойчивости и учитывающие различие между преобразованиями, эквивалентными в классическом смысле и в расширенном. С течением времени таких организаций будет становиться больше, поскольку фирмы, использующие у себя дополнительные расчеты, рекомендованные в [12,13,15], могут с полным основанием утверждать, что их продукция более надежна, имеет меньшую вероятность аварий, чем продукция фирм-конкурентов.

Пока можно привести только отрицательные примеры. Так, в 1995-1999г.г. производилась замена отслужившего свой срок вспомогательного оборудования на Ленинградской атомной электростанции (ЛАЭС). Заменялись насосы, электроприводы, шкафы управления т.п., чей срок службы короче, чем у ядерных реакторов.

Поскольку ЛАЭС расположена всего в 70 километрах от многомиллионного города Петербурга, то любая авария на ней особенно опасна и Санкт-Петербургский государственный университет (СПбГУ) обратился в 1995г. к дирекции ЛАЭС и к Администрации губернатора Петербурга с предложением провести все дополнительные расчеты параметрической устойчивости вновь устанавливаемого оборудования для снижения вероятности аварий. Тогда для этого требовалась сумма, эквивалентная 20 тыс. долларов. Дирекция ЛАЭС и Администрация губернатора Петербурга ответили отказом. Этот отказ получил общественный резонанс. В газетах Петербурга и газете партии «Зеленых» появились статьи, осуждающие отказ Администрации губернатора принять необходимые меры для повышения безопасности ЛАЭС. 0б этом стало известно шведам, которые всегда очень внимательно следят за обстановкой на ЛАЭС, расположенной в 600 км от столицы Швеции.

В 1996г. Правительство России и Администрация губернатора С.-Петербурга выступили с инициативой проведения в городе Олимпийских игр 2004 года. Швеция выставила в качестве города-кандидата свою столицу. Развернулась большая и дорогостоящая кампания по продвижению кандидатуры Петербурга – потом было подсчитано, что на эту кампанию была истрачена из бюджета города сумма, эквивалентная 20 миллионам долларов. С-Петербургский университет несколько раз предупреждал Администрацию губернатора и Правительство России о том, что отказ от конкретных предложений Университета о повышении безопасности ЛАЭС будет использован (и, прежде всего, Швецией) для торпедирования кандидатуры Петербурга. Эти предупреждения остались без ответа и в результате в марте 1997г. на заседании Международного Олимпийского комитета в Лозанне кандидатура Петербурга была отвергнута уже в первом туре голосования по мотиву «небезопасности города», а Стокгольм благополучно прошел на второй тур. 20 миллионов долларов, истраченных из бюджета Петербурга, пропали зря – пропали, прежде всего, из-за нежелания учитывать предостережения и предложения С.-Петербургского государственного университета.

Так своеобразно пересеклись (и в данном случае неудачно пересеклись) недавние разработки в области прикладной математики с экономической и спортивной жизнью России.

В данном случае научное открытие, сделанное в Петербурге, в России, пока еще не принесло непосредственной пользы ни России, ни Петербургу, Но это – досадное исключение. История прикладной математики показывает нам, что научные исследования и разработки почти всегда используются, служат основой технического прогресса и позволяют улучшить благосостояние человечества. Нужно лучше усваивать уроки истории, интенсивнее вести научные исследования, шире использовать их результаты – и тогда наша жизнь станет лучше.

Глава 10. Корректные, некорректные и промежуточные задачи прикладной математики (1902-2000г.г).

Понятие о некорректных задачах математики, разделение задач на корректные и некорректные, было введено в 1902 году выдающимся французским математиком Жаком Адамаром (Hadamard, 1865-1963). Ж. Адамар прожил долгую и плодотворную жизнь, преподавал во многих высших учебных заведениях Франции, сделал немало научных открытий; исследование некорректных задач является наиболее значительным из его научных достижений. Адамар назвал некорректными те математические задачи, решения которых существенно изменяются при сколь угодно малых изменениях коэффициентов, параметров, начальных или граничных условий.

Поскольку на практике измерить и задать для расчета идеально точно величину коэффициентов, параметров и т.п. почти всегда невозможно, то практический смысл имеют, разумеется, только корректные задачи – те, решения которых не меняются существенно при неизбежных малых погрешностях в задании параметров, при малых изменениях (вариациях) их. Фактически математика на протяжении всех трех тысяч лет своего существования решала корректные задачи и лишь Адамар в 1902 году доказал существование целых классов задач некорректных. Ситуация в математике до 1902г. напоминает известную пьесу Мольера, герой которой всю жизнь говорил прозой, но не подозревал об этом, поскольку не знал разницы между прозой и стихами. На необходимость различения корректных и некорректных задач впервые указал Адамар в своей публикации 1902 года.

Вот знаменитый пример Адамара, относящийся к решению задачи Коши для уравнения Лапласа – т.е. уравнения в частных производных

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0\,, \tag{1}$$

где U – функция двух переменных x и y, у которой заданы граничные условия – т.е. заданы значения самой функции $U(x;y)$ при $y=0$ – эти значения равны некоторой функции $f(x)$ аргумента x, и заданы значения производной $\frac{\partial U}{\partial y}$ при $y=0$ – эти значения также будут некоторой функцией $\psi(x)$ того же аргумента x, где $-\infty<x<+\infty$. Решения уравнения (1) зависят от граничных условий и определяются ими.

Уравнение (1) описывает, например, распределение тепла в пластине, расположенной выше оси $y=0$.

Если $f(x)=f_1(x)=0$ и $\psi(x)=\psi_1(x)=0$, то, решая уравнение (1), найдем, что

$$U_1(x;y)=0. \tag{2}$$

Если же функция $f(x)=f_2(x)=0$, но функция $\psi(x)=\psi_2(x)=\frac{1}{a}\sin ax$, где $a>0$, то решением уравнения (1) будет в этом случае функция двух переменных

$$U_2(x;y)=\frac{1}{a^2}\sin ax\cdot \mathrm{sh}\, ay\,. \tag{3}$$

Поскольку модуль разности функций $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ не превышает $\frac{1}{a}$:

$$\left|\psi_1(x)-\psi_2(x)\right|=\left|0-\frac{1}{a}\sin ax\right|\le\frac{1}{a}\,, \tag{4}$$

то за счет выбора большого значения a, он может быть сделан сколь угодно малым. В то же время модуль разности решений

$$\left|U_1(x;y) - U_2(x;y)\right| = \left|\frac{1}{a^2}\sin ax \cdot shay\right| \qquad (5)$$

для любого $y>0$ при больших a велик (действительно, при больших значениях аргумента ay гиперболический синус очень велик, и поэтому дробь $\frac{shay}{a^2}$ быстро возрастает). Так, при $y=1$ имеем (с точностью до трех знаков)

a	3	10	20
$\frac{shay}{a^2}$	1,11	110	$606 \cdot 10^3$

Таким образом, сколь угодно малые изменения граничных условий могут привести в данном случае к большим изменениям решений, поэтому рассматриваемая задача решения уравнения (1) – некорректна.

Пример Адамара относится к достаточно сложным задачам математической физики, к уравнениям с частными производными. Однако некорректными могут быть и совсем простые задачи. Пример: пусть задано огородить участок земли площадью s. Минимум длины изгороди p будет в том случае, если участок имеет форму круга. В этом случае, как известно, $p = p_{\min} = 2\sqrt{\pi s}$, (поскольку для круга $p=2\pi R$ и $s=\pi R^2$, то исключая R, получаем p_{min}). Однако это решение не имеет практического смысла: если истинная величина огораживаемой площади хотя бы на сколь угодно малую величину Δs превысит расчетное значение s, то минимальной длины изгороди p_{min} уже не хватит, изгородь замкнуть не удастся. Рассматриваемая задача некорректна, и это типично для очень многих задач на максимумы и минимумы: если мы нашли минимальное значение любой величины, удовлетворяющей некоторому условию, то уже при сколь угодно малом отличии истинной величины условия от расчетной рассчитанное нами минимальное значение окажется недостаточным, поставленное условие выполнено уже не будет. Таким образом, с некорректными задачами фактически приходится сталкиваться очень часто, во многих задачах на экстремум.

Общий рецепт решения некорректных задач не сложен: поскольку прямое решение некорректной задачи практического смысла не имеет, нужно заменить некорректную задачу другой, корректной. Желательно при этом, чтобы в решение новой задачи входил параметр, такой, чтобы при некотором его значении рассматриваемая корректная задача переходила в исходную, некорректную, и тем самым можно было бы приблизиться к решению исходной задачи сколь угодно близко.

В примере с изгородью нужно перейти к такой формулировке: поскольку огораживаемая площадь s может измеряться с погрешностью и максимально возможное значение погрешности равно Δs, то надо искать: какой запас длины изгороди Δp нужно добавить к минимальному значению $p_{\min} = \sqrt{4\pi s}$ для того, чтобы при $\Delta s \neq 0$ изгородь всегда можно было замкнуть? Решение несложно: из уравнения

$$p + \Delta p = \sqrt{4\pi}\sqrt{s + \Delta s} \qquad (6)$$

сразу находим

$$\Delta p = \sqrt{4\pi}(\sqrt{s + \Delta s} - \sqrt{s}). \qquad (7)$$

В данном простом случае само значение Δs можно рассматривать как параметр; при $\Delta s = 0$ получаем решение исходной некорректной задачи: для огораживания участка площадью s нужна изгородь длиной $\sqrt{4\pi s}$. Само решение смысла не имеет (точнее – смысл его утрачивается при сколь угодно малом Δs). Но приблизиться к решению некорректной задачи с любой степенью точности в данном случае можно с помощью последовательности решений корректных задач. Решение приобретает смысл, если известна оценка для максимально возможной величины Δs.

После опубликования в 1902 г. первой работы Ж. Адамара о некорректных задачах стало ясным, что перед решением любой математической задачи необходимо проверить: корректна поставленная задача или нет. Если такой проверки не делать, если решать некорректную задачу обычными методами, как корректную, то почти неизбежна серьезная ошибка: математику будет казаться, что задача решена, а на самом деле это решение практического смысла не имеет и только вводит в заблуждение.

До 1902 г. исследователи интуитивно избегали подобных ошибок (и, разумеется, вводили «запас» при решении задач на минимум), после опубликования работ Ж. Адамара некорректных задач стали избегать уже сознательно и постепенно стали перед решением проводить (хотя и не всегда!) проверку корректности. Простейшая из возможных проверок - повторение решения при немного измененных коэффициентах, начальных условиях и т.п. Если новое решение при немного измененных коэффициентах сильно отличается от исходного, задачу относили к некорректным, которые первоначально считали не имеющими смысла.

К середине 20-го века стало выясняться, что некорректные задачи часто встречаются при исследовании многих важных проблем физики и техники, поэтому просто отмахиваться от некорректных задач не следует, а нужно разрабатывать методику подхода к подобным задачам. На этом направлении важные успехи были достигнуты московской школой академика Андрея Николаевича Тихонова (1906-1995). Работы А.Н. Тихонова и его последователей (Арсенин В.Я., Гласко В.Б., Гончарский А.В., Иванов В.К., Лавреньев М.М., Морозов В.А., Ягола А.Г. и другие) получили высокую оценку и заслуженное признание. Мы не будем подробно останавливаться на этих работах и на используемом в них методе регуляризации некорректных задач, (т.е., собственно, замене исходной некорректной задачи на сходящуюся к ней последовательность корректных задач), поскольку все эти вопросы подробно рассмотрены в учебном пособии для студентов вузов, обучающихся по специальности «прикладная математика»: Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. «Методы решения некорректных задач». Эта книга выдержала уже три издания (1974,1979,1986г.г.) и широко известна [20]. Мы не приводим также списка публикаций по решению различных некорректных задач, поскольку большой список приведен в библиографии легко доступной книги [20] (в списке, приведенном в конце этой главы, добавлены лишь работы, опубликованные после 1986 г.)

Рассмотрим вместо этого некоторые некорректные задачи, непосредственно встретившиеся в теории управления при синтезе оптимальных регуляторов с обратной связью. Как уже рассказывалось в предыдущей главе, для ряда объектов управления минимум критерия качества лежит на границе устойчивости, и поэтому многие из задач синтеза оптимальных регуляторов являются некорректными.

Вот простой пример, приводившийся в [9]: объект управления описывается уравнением

$$4Dx=(D+1)u+\varphi(t), \tag{8}$$

где x – регулируемая переменная, $D=\dfrac{d}{dt}$, u – управляющее воздействие, $\varphi(t)$ – возмущающее воздействие, стационарный случайный процесс со спектром:

$$S_\varphi=\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+\omega^2}\,. \tag{9}$$

Требуется найти математическую модель регулятора, обеспечивающего устойчивость замкнутой системы и минимум критерия качества

$$J = 9\langle x^2 \rangle + \langle u^2 \rangle \tag{10}$$

Выполнив вычисления, рекомендуемые традиционной методикой синтеза оптимального управления [9], мы найдем математическую модель регулятора

$$(3D-5)u=12(D+4)x, \tag{11}$$

обеспечивающего критерию качества (10) минимальное значение $J_{min}=0.4336$. Регулятор (11) обеспечивает устойчивость замкнутой системы, но если коэффициент при Dx в уравнении объекта управления (8) отклонится от своего номинального значения, и это уравнение примет вид

$$4(1+\varepsilon)Dx=(D+1)u+\varphi(t), \tag{12}$$

то, замкнув регулятором (11) объект управления (12), убедимся, что характеристический полином замкнутой системы имеет теперь вид

$$-12\varepsilon D^2+(80+20\varepsilon)D+48. \tag{13}$$

При $\varepsilon=0$ полином (13) гурвицев и замкнутая система устойчива, но уже при сколь угодно малых $\varepsilon>0$ полином (13) перестает быть гурвицевым, замкнутая система теряет устойчивость, и ни о каком минимуме критерия качества (10) вообще уже нельзя говорить. Для объекта управления (8) и спектра возмущающего воздействия (9) задача о минимуме функционала (10) — некорректна.

Эту некорректность можно заранее предвидеть, поскольку для объекта управления (8) степень n операторного полинома при регулируемой переменной x равна единице, степень m операторного полинома при управлении тоже равна единице, а для спектра (9) будет $p=0$ и $q=1$. Таким образом, известный критерий Ю. Петрова:

$$p \geq m+q-1 \tag{14}$$

в данном случае не выполнен, что говорит о некорректности в данном случае задачи о минимуме критерия качества (10); это подтверждает и прямое исследование полинома (13).

Таким образом, критерий Ю. Петрова (14) позволяет заранее различать корректные задачи синтеза оптимальных регуляторов от задач некорректных – и позволяет производить это различение гораздо проще, чем прямой, но гораздо более громоздкий метод повторения вычисления оптимального регулятора и характеристического полинома замкнутой системы при немного измененных коэффициентах объекта управления (тем более что проверку надо производить при изменениях всех коэффициентов объекта управления, что для объектов высокого порядка крайне трудоемко).

Теперь рассмотрим тот подход, который предлагался в [9] для решения этой некорректной задачи.

Для того чтобы удовлетворялось неравенство (14), увеличим степень числителя p в спектре (9) и заменим его при расчете регулятора на спектр

$$S_{\varphi} = \frac{2}{\pi}\frac{1+k^2\omega^2}{1+\omega^2}. \qquad (15)$$

Для спектра (15) имеем $p=1$, $q=1$; теперь неравенство (14) выполнено, и можно быть уверенным, что рассматриваемая нами задача при $k\neq 0$ станет корректной.

Действительно, выполнив прежний расчет оптимального регулятора, но уже для спектра (15), мы придем к регулятору

$$[(3-11k)D-(5+3k)]u=12[(1+3k)D+4]x, \qquad (16)$$

а, замкнув этим регулятором объект управления (12), найдем характеристический полином замкнутой системы

$$(20k-3\varepsilon+11\varepsilon k)D^2+(20+12k+5\varepsilon+3\varepsilon k)D+12. \qquad (17)$$

Исследуя формулу (17) мы убеждаемся, что устойчивость замкнутой системы зависит от соотношения чисел ε и k.

При $k=0$ устойчивость теряется при сколь угодно малых $\varepsilon>0$. Чем больше k, тем больше интервал чисел ε, при которых сохраняется устойчивость, – т.е. тем больше интервал допустимых вариаций параметров объекта управления, не приводящих к потере устойчивости. С увеличением коэффициента k этот интервал очень быстро расширяется. Так, уже при $k=0.1$ устойчивость сохранится для всех $|\varepsilon| \le 1$, т.е. не только для малых, но и для больших отклонений параметров объекта от расчетных значений.

Теперь нетрудно рассчитать потерю в критерии качества – ту жертву, которая была принесена ради удовлетворения дополнительного требования – сохранения устойчивости при вариациях параметров объекта управления. Замкнув объект (8) регулятором (16), и вычисляя функционал (10) при спектре возмущающего воздействия (9), мы получим для $k=0.1$ значение $J=0.4374$ или всего на 0.876% больше, чем при $k=0$. (Заметим, что расчет критерия ведем, естественно, для истинного спектра возмущающего воздействия (9); спектр (15) применяется только для расчета регулятора). Столь малая жертва в критерии качества объясняется тем, что для объекта управления (8) существенны, в основном, малые частоты в спектре возмущающего воздействия, а переходя от спектра (9) к спектру (15), мы изменяем его в основном в районе высоких частот. Вот почему методика обеспечения сохранения устойчивости при вариациях параметров, предложенная в [9], приводит к меньшим потерям в критерии качества, чем более распространенная методика замены функционала (10) на функционал

$$J_1 = m^2\langle x^2\rangle + \langle u^2\rangle + k^2\langle \dot{x}^2\rangle, \qquad (18)$$

где k – коэффициент, специально вводимый для обеспечения сохранения устойчивости при вариациях параметров.

Таким образом, выявляется прямая связь между регуляризацией некорректных задач, предложенной А.Н. Тихоновым, и методикой, позволившей преодолеть трудности с потерей устойчивости, которые так долго препятствовали практическим приложениям теории оптимального управления (об этой методике более подробно рассказывалось в предыдущей главе). Параметр k во введенном для расчета регулятора спектре (15) – это, фактически, регуляризующий параметр, который позволяет заменить исходную некорректную задачу на последовательность корректных задач. Чем меньше значение k, тем ближе решение корректной задачи синтеза оптимального регулятора к исходной некорректной задаче о точном минимуме критерия качества — но зато тем меньше интервал допустимых вариаций параметров объекта управления, не приводящих еще в потере устойчивости.

Неожиданная встреча с третьим классов задач прикладной математики

На протяжении первых девяти десятилетий 20-го века все математики считали, что существует только два класса математических задач: издавна известный класс корректных задач (их называли еще «корректно поставленными» задачами [18]) и класс задач некорректных, введенный в рассмотрение Жаком Адамаром в 1902 году. Только в 1990 г. вскрылось существование еще одного класса: класса задач, изменяющих свою корректность при эквивалентных преобразованиях исходной математической модели – в том числе и при преобразованиях, используемых в ходе ее решения. Такие задачи нельзя отнести ни к корректным, ни к некорректным. Их надо рассматривать скорее как задачи-перевертыши, задачи-перебежчики, способные перебегать из одного класса в другой и этим серьезно затруднять решение. Эти задачи следует выделить в отдельный, третий класс и уделить ему серьезное внимание.

Существование третьего класса задач прикладной математики существенно осложняет проблему обоснования достоверности решения прикладной задачи. Действительно, если, например, не проверить перед решением корректность задачи и решать некорректную задачу по обычной методике, как задачу корректную, то можно, как известно, получить ошибочный ответ. Поэтому, начиная с 1902г., совершенно справедливо советуют перед решением проверить корректность. Но если даже исходная математическая модель корректна, но в ходе решения над нею производятся эквивалентные преобразования (а они очень часто производятся), то, вообще говоря, мы не можем быть уверены в достоверности решения: если задача в ходе эквивалентных преобразований стала некорректной, то, например, даже уже сколь угодно малые неизбежные погрешности округления могут привести к коренному изменению решения и к грубым ошибкам.

Кроме того, исходные, непосредственно вытекающие из законов физики и механики, математические модели исследуемых объектов перед исследованием корректности очень часто преобразуют к более удобной для исследования или к стандартной форме – приводят, разумеется, только с помощью эквивалентных преобразований. Однако, после исследований 1990 г. выявилось, что без дополнительных проверок использованных преобразований нет твердых оснований для уверенности в том, что если корректна преобразованная модель, то корректна и исходная задача – и тем самым возникает возможность серьезной ошибки.

Существование задач третьего класса было выявлено лишь в самом конце 20 века в ходе исследований оптимального управления. Мы уже упоминали в предыдущей главе, что при разработке методов синтеза оптимальных систем А.М. Летовым были предложены регуляторы, использующие в канале обратной связи полный вектор регулируемых переменных и обеспечивающие хорошее протекание переходных процессов. Поскольку полностью значения всех регулируемых переменных очень часто измерить невозможно, то наиболее естественной была замена не измеряемых переменных на комбинации измеряемых переменных и их производных путем эквивалентных преобразований, сохраняющих неизменными решения системы, а значит и переходные процессы в ней. При этих преобразованиях как раз и встретились с парадоксальным явлением: первоначально рассчитанная замкнутая система, включающая в себя регулятор, использующий все регулируемые переменные, безусловно, сохраняла устойчивость при вариациях любых параметров объекта управления или регулятора. В то же время эквивалентная ей система с регулятором, использующим только одну (измеряемую) переменную и ее производные теряла устойчивость при сколь угодно малых вариациях параметров – хотя обе системы были эквивалентны друг другу и переходные процессы в них (при номинальных значениях параметров) были тождественны.

Впервые пример таких систем был приведен в 1973г. в уже упоминавшейся в предыдущей главе статье П.В. Надеждина [8]. Однако в 1973г. причины явления, с которым тогда неожиданно встретились, еще не были поняты. Частично это было связано с тем, что П.В. Надеждин говорил не об эквивалентных, а об «элементарных» преобразованиях. Дело в том, что «эквивалентные» преобразования (их называют еще «равносильными преобразованиями») – это точно определенное математическое понятие (смотри, например, [7]): эквивалентными называют преобразования, при которых исходная и преобразованная системы имеют одни и те же решения. Что же касается «элементарных» преобразований, то они не имеют общепризнанного определения и совершенно не ясно, какие преобразования считать элементарными и какие – нет.

Кроме того, П.В. Надеждин считал, что в рассмотренном им примере после преобразований теряется «грубость» исследуемой системы. На самом деле это не так. Известные термины «грубость», «грубые системы» были введены А.А. Андроновым, А.Л. Виттом и С.Э. Хайкиным в 1937г. ([2], стр. 341-385). Они называли так описываемые дифференциальными уравнениями объекты, которые не меняют существенно своего поведения при вариациях параметров, но при условии, что эти вариации не изменяют порядка дифференциального уравнения, описывающего объект. Эта последняя оговорка существенна. Если ее не делать, то вообще вряд ли можно будет найти пример «грубой» системы, «грубого» объекта: при изменении порядка дифференциального уравнения поведение объекта почти обязательно меняется.

Между тем в примере, рассмотренном П.В. Надеждиным, при вариациях параметров изменялся порядок уравнения - это означало, что рассмотренный в [8] пример не имеет отношения к известной проблеме «грубости» и «негрубости». Фактически, в примере из [8] произошла одна из первых встреч с новым явлением (изменением корректности), но тогда, в 1973г., это еще не было понято.

П.В. Надеждин считал, что потеря устойчивости при сколь угодно малых вариациях параметров в системе, которую ранее В.Б. Ларин, К.И. Науменко и В.Н. Сунцев считали оптимальной, свидетельствует только о непригодности предложенного и используемого ими алгоритма синтеза оптимальных систем управления, поскольку он приводит, по мнению П.В. Надеждина, к «негрубым системам». Авторы алгоритма возражали П.В. Надеждину на страницах того же журнала «Автоматика и телемеханика» в 1973 году, справедливо указывая, что рассматриваемый пример под определение «не грубой» системы, данное А.А. Андроновым и его соавторами в [2], заведомо не подходит. Однако вступившие в дискуссию авторы тогда еще не поняли, что они столкнулись с чем-то новым, требующим особого объяснения, и поэтому существа нового явления, возникшая в 1973 году дискуссия не прояснила.

Другие неосознанные встречи с новым явлением происходили у исследователей, занимающихся устойчивостью по части переменных (В.И. Зубов [6], Воротников В.И. [3] и другие).

Вот один из примеров, приведенных в [3]; система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - 2x_3 \\ \dot{x}_2 = 4x_1 + x_2 \\ \dot{x}_3 = 2x_1 + x_2 - x_3 \end{cases} \qquad (19)$$

имеет характеристический полином

$$\lambda^3+\lambda^2-\lambda-1=(\lambda+1)^2(\lambda-1) \qquad (20)$$

с положительным корнем $\lambda_3=1$, и поэтому все ее решения, все переменные $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ устойчивыми быть не могут. Однако по переменной x_1, система (19) устойчива, что можно проверить прямым интегрированием системы (19). Введем новую переменную $\mu=x_2-2x_3$ и преобразуем систему (19) к новым переменным с помощью эквивалентных преобразований. Поскольку $\dot{\mu} = \dot{x}_2 - 2\dot{x}_3$, то с учетом второго и третьего из уравнений (19) имеем

$$\dot{\mu} = 4x_1 + x_2 - 2(x_1 + x_2 - x_3) = -\mu,$$

и окончательно получаем для переменных x_1 и μ уравнения:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 + x_1 = \mu \\ \dot{\mu} + \mu = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Система (21) имеет гурвицев характеристический полином

$$\lambda^2+2\lambda+1=(\lambda+1)^2,$$

поэтому ее решения $x_1(t)$ и $\mu(t)$ – устойчивы, и кроме того – как легко проверить – сохраняют устойчивость при вариациях любых пяти ненулевых коэффициентов системы (21). В то же время в исходной системе (19) устойчивость решения $x_1(t)$ исчезает при сколь угодно малых вариациях некоторых коэффициентов – например, коэффициента при x_2, во втором из уравнений (19). И этот пример не единичен — почти все примеры известных μ-преобразований, используемых при исследовании устойчивости по части переменных, относятся к системам, теряющим эту устойчивость при сколь угодно малых вариациях коэффициентов и параметров (и поэтому эта устойчивость практического смысла не имеет).

Изменения корректности решения после эквивалентных преобразований наблюдались и в задачах линейного программирования (книга [22], стр. 136-145), и также не получили объяснения.

Таким образом, в руках исследователей, фактически, уже находились примеры изменения свойства сохранения устойчивости при вариациях параметров (это свойство часто называют «параметрической устойчивостью») после эквивалентных преобразований уравнений. Но сущность этих примеров долго не понималась. Так, например, явления, происходящие с системами (19) и (21) даже в 1991 году в монографии [3] на стр.79 объяснялись тем, что «свойство асимптотической устойчивости по отношению к части переменных обладает повышенной чувствительностью по отношению к вариациям коэффициентов».

На самом деле, разумеется, «повышенная чувствительность» тут не при чем. В теории оптимального управления к 1991 году уже неоднократно обнаруживались примеры, когда параметрическая устойчивость по всем переменным (а не по части их) тоже исчезала после совершенно эквивалентных преобразований (смотри [10]).

Перелом в понимании произошел в 1987 году, когда в монографии [10] был поставлен решающий вопрос: а какой, собственно, смысл заключен в утверждении, что решения некоторого уравнения, например, уравнения

$$\dot{x} + x = 0 \tag{22}$$

параметрически устойчивы или, что то же самое, сохраняют устойчивость при вариациях параметров?

Ведь, фактически, это не суждение о самом уравнении (22); это утверждение о свойствах его окрестности, а именно, утверждение о семействе уравнений

$$(1+\varepsilon_1)\dot{x} + (1+\varepsilon_2)x = 0\,, \tag{23}$$

где ε_1 и ε_2 малы в сравнении с единицей. Когда мы утверждаем: «решения уравнения (22) параметрически устойчивы», то это означает, что устойчивы решения всех уравнений, лежащих в его окрестности, то есть устойчивы решения у всего семейства (23) при любых малых ε_1 и ε_2. Отсюда следовал важный вывод, опубликованный в [10]: эквивалентные преобразования, не меняющие решений самого уравнения, совсем не обязаны оставлять неизменными свойства окрестности уравнения (или системы уравнений), не обязаны сохранять неизменными свойства решений всего окружающего уравнение семейства – типа семейства (23).

Поэтому при эквивалентных преобразованиях свойство параметрической устойчивости может сохраняться, но может и не сохраняться. Этого не замечали так долго только потому, что при эквивалентных преобразованиях параметрическая устойчивость чаще всего сохраняется. Случаи не сохранения параметрической устойчивости не многочисленны, но важны – поскольку неожиданная встреча с таким случаем может стать причиной ошибок в расчетах и тем самым стать причиной аварий и даже катастроф.

Это утверждение было подкреплено в [10] рядом примеров. Однако, публикация монографии [10] не вызвала большого интереса и настороженности среди широких кругов инженеров и работников проектно-конструкторских организаций, занимающихся проектированием и расчетом систем управления, проверкой их устойчивости. Поскольку в монографии [10], согласно ее названию, шла речь об оптимальных системах, то ее читателям казалось, что неожиданные выводы о возможном изменении параметрической устойчивости после эквивалентных преобразований относятся лишь к сравнительно узкому и не всех интересующему классу оптимальных систем.

На самом деле это не так. Выводы о возможном изменении параметрической устойчивости после эквивалентных преобразований относятся к любым системам управления, и из этих выводов следует, что традиционные методы расчета устойчивости и параметрической устойчивости — не полны, не гарантируют достоверности расчета и могут быть причиной аварий и катастроф.

Вот один из примеров приводившихся в работе [12]: система, состоящая из объекта управления

$$(D^3+4D^2+5D+2)x_1=(D^2+2D+1)u \qquad (24)$$

и регулятора

$$(D+1)u=(D^2+4D+5)x_1 \qquad (25)$$

имеет характеристический полином

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda^3+4\lambda^2+5\lambda+2; & -(\lambda^2+2\lambda+1) \\ \lambda^2+4\lambda+5; & -(\lambda+1) \end{vmatrix} = \qquad (26)$$

$$= \lambda^3+5\lambda^2+7\lambda+3 = (\lambda+1)^2(\lambda+3)$$

с корнями $\lambda_1=-3;\ \lambda_2=\lambda_3=-1$. Все корни характеристического полинома отрицательны и лежат далеко от мнимой оси. Поэтому на основании традиционных методов расчета устойчивости и параметрической устойчивости, опирающихся на теорему о непрерывной зависимости корней полинома от его коэффициентов, неизбежно следует вывод: система устойчива и параметрически устойчива. На самом деле этот вывод ошибочен: система (24)–(25) теряет устойчивость при сколь угодно малых вариациях некоторых коэффициентов. Так, если коэффициент при D^2u в уравнении (24) равен не единице, а некоторому числу m, то характеристический полином системы принимает вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda^3+4\lambda^2+5\lambda+2; & -(m\lambda^2+2\lambda+1) \\ \lambda^2+4\lambda+5; & -(\lambda+1) \end{vmatrix} = \qquad (27)$$

$$= (m-1)\lambda^4+(4m-3)\lambda^3+5m\lambda^2+7\lambda+5$$

При $m=1$ полином (27) совпадает, естественно, с полиномом (26). При $m=1.001$ полином (27) принимает вид

$$\Delta=0{,}001\lambda^4+1{,}004\lambda^3+5{,}005\lambda^2+7\lambda+5, \qquad (28)$$

и является гурвицевым полиномом, замкнутая система устойчива. При $m=0.999$ полином (27) равен

$$\Delta=-0{,}001\lambda^4+0.996\lambda^3+4.995\lambda^2+7\lambda+5, \qquad (29)$$

и уже не будет гурвицевым (нарушено необходимое условие Стодолы), замкнутая система неустойчива.

Вообще, если $m=1-\varepsilon$, где $\varepsilon>0$, то уже при сколь угодно малом ε устойчивость теряется – т.е. в системе (24)-(25) сколь угодно малое отличие некоторых коэффициентов от расчетных значений приводит к потере устойчивости – но любое исследование характеристического полинома (26) об этом ничего не скажет.

Систему (24)-(25) можно привести к нормальной форме Коши, например, введя новые переменные: