

## ИССЛЕДОВАНИЯ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ НА ФАКУЛЬТЕТЕ ПМ–ПУ СПбГУ

Петров Ю.П.  
Санкт–Петербургский гос.университет  
E-mail: petrov1930@mail.ru

С первых лет существования факультета на нем, под общим руководством В.И. Зубова, развернулись исследования по синтезу оптимальных систем управления. Известно, что для большинства систем управления несложно найти оптимальное программное управление как функцию времени, которое обеспечит максимум (или минимум) критерию качества управления (т.е. точности и стабилизации слежения, расходу энергии и топлива) или другим критериям. Для определения оптимального управления достаточно составить дифференциальные уравнения Эйлера вариационного исчисления для функционала — критерия качества (с учетом уравнений связи) и найти их решения (экстремали), доставляющие максимум. Это сделать несложно. Главная трудность заключается в том, что движение по экстремали почти всегда неустойчиво и поэтому неизбежные малые погрешности в математической модели системы управления и действующих на нее сил приводят к большим отклонениям реального поведения системы от оптимального.

Для обеспечения реального оптимума нужно было найти управление, обеспечивающее одновременно и оптимальность и устойчивость движения — это обеспечивалось, если движение происходило по устойчивому подсемейству экстремалей. В отыскании уравнений устойчивого подсемейства и заключалась главная трудность. Действительно, если уравнения системы имели порядок  $n$ , то уравнения Эйлера приобретали порядок  $2n$ , а уравнения устойчивого подсемейства — порядок  $n$ . Таким образом, отыскание уравнений устойчивого подсемейства было эквивалентно понижению вдвое порядка уравнений Эйлера, что до сегодняшнего времени остается в общем случае задачей неразрешимой. Успеха удавалось достичь лишь для частного случая линейных систем управления при квадратичных (или среднеквадратичных) критериях качества. В этом случае уравнения Эйлера линейны и понижение их порядка вдвое выполнимо (во многих методиках синтеза понижение порядка уравнений Эйлера в явном виде не выступает, но суть дела и основная трудность заключаются именно в нем). Исследованию частного случая линейных систем посвящена обширная литература (смотри, например монографии [1; 2; 5] и обширную библиографию, помещенную в них).

Возник вопрос (первая проблема) — а не существует ли еще одного класса систем управления, для которых можно провести понижение порядка и синтез оптимального управления? Такой класс был найден и описан в монографиях [3; 4]. Это — объекты управления, для которых критерии качества являются вырожденными функционалами. Исследование этого класса позволило реализовать оптимальные регуляторы для целого ряда транспортных систем. Реализация всего лишь одной оптимальной системы для речного флота, описанной в [3], позволила в 1969–1980 гг получить экономию на топливе в размере 40 миллионов тогдашних рублей. Поскольку строительство здания факультетов ПМ–ПУ и матмеха в Петергофе обошлось примерно в эту сумму,

то можно считать, что здание построено на средства, полученные от реализации всего одной из научных разработок факультета ПМ–ПУ.

Интересно отметить, что за весь 20 век было открыто лишь два класса систем управления, для которых реализуется оптимальное устойчивое управление: это широко известный класс линейных систем с квадратичными критериями качества (этому классу систем посвящены многие тысячи публикаций) и менее известный класс систем с вырожденными критериями качества, исследованный на факультете ПМ–ПУ [3; 4; 6; 7].

Второй важной проблемой, которая получила решение на факультете ПМ–ПУ, была проблема обеспечения параметрической устойчивости оптимальных систем. Известно, что теория оптимального синтеза была разработана еще в 50–х годах [5], но практического применения она долго не получала потому, что обнаружилось опаснейшее явление — потеря устойчивости оптимальными системами при неизбежном на практике малом «дрейфе» их параметров в ходе эксплуатации. В течение более десяти лет усилия многих выдающихся исследователей и в России, и за рубежом были безуспешно направлены на поиск алгоритмов синтеза, свободных от этого опасного недостатка. Перелом произошел в 1973 году. В начале 1973 года П.В. Надеждин доказал, что еще один алгоритм, незадолго до того предложенный украинскими математиками Лариным В.Б., Науменко К.И., Сунцевым В.Н. на самом деле также не обеспечивает параметрической устойчивости, но в том же году, в монографии [4] было показано, что поиски подобного алгоритма бесплодны, что к синтезу надо подходить совсем по-другому и обеспечивать параметрическую устойчивость нужно другим путем, за счет неизбежной (но малой!) жертвы частью критерия качества. Метод синтеза, минимизирующий «жертву», был изложен в монографии [6], стр. 218–226, и учебном пособии [11], стр. 144–153. Обеспечение параметрической устойчивости позволило, наконец, использовать методики оптимального синтеза для существенного улучшения качества работы многих реальных систем. Это отражено в работах [7; 8; 9; 10; 16] и многих других.

Третьей проблемой, препятствующей широкому применению теории оптимального управления, была проблема обеспечения комплекса реальных технических требований к системе управления с учетом таких трудно формализуемых математически требований, как непосредственная реализуемость, надежность, простота реализации и т.д. Полного и окончательного решения третья проблема не получила и до настоящего времени, но в работах [7], стр. 160–169, [11], стр. 132–170, было дано решение задачи обеспечения наиболее важных технических требований.

Четвертая проблема, решенная на факультете ПМ–ПУ — это проблема правильного учета реальных ограничений на управление — ограничений типа

$$|u| \leq 1. \quad (1)$$

В общепринятой линейной теории ограничения типа (1) заменяются на среднеквадратичные:

$$\langle u^2 \rangle \leq 1/k^2. \quad (2)$$

Разумеется, если выбрать, например, что обычно и рекомендуется,  $k \geq 3$ , то (2) не противоречит (1) и линейная теория справедлива. Однако еще давно было подмечено, что уменьшение коэффициента  $k$  до  $k = 1,4 \div 1,8$  существенно улучшает качество управления, но при этом линейность системы нарушается и

линейную теорию, на которой основан расчет, применять уже нельзя. Решение проблемы было дано в [7], стр. 190–200.

Пятая важная проблема, возникшая в теории управления позже остальных, заключается в исследовании возможностей оптимизации при неизвестном спектре возмущающих воздействий и погрешностей измерения. Решения для известных спектров появились еще в 50-х годах, [5], а после решения на факультете ПМ–ПУ второй проблемы, о которой мы рассказали, оптимальные регуляторы получили широкое практическое применение. Позже выяснилось, что спектры часто не известны или же могут сильно меняться с течением времени. Встал вопрос — как же поступать в этом случае? Впервые общий подход к этой проблеме и решение ее для ряда частных случаев на путях гарантирующего управления были даны в [4], стр.115–121. Позже, начиная с 1981 года, над этой проблемой стали интенсивно работать математики США, использовавшие известную сильную методику « $H^\infty$ -оптимизации». Эта методика требовала применения сложных алгоритмов и обзримого решения не давала. Простое решение в виде элементарных формул на основе совсем другого подхода было опубликовано в [12] и [13]. Работа над пятой проблемой протекала уже в сложные для российской науки годы, годы трудностей и унижения, и решение пятой проблемы показало, что и в этих условиях русская наука может идти впереди науки более благополучных стран.

Шестая проблема, работа над которой продолжается, выросла на почве исследований оптимального управления, но значение ее много шире. При исследовании оптимальных систем (впервые — в [11], стр. 220–230) неожиданно было обнаружено, что эквивалентные преобразования математических моделей, не изменяющие самых решений как таковых, могут изменять некоторые важные свойства решений — такие, как параметрическая устойчивость, непрерывная зависимость от параметра и т.п. Но отсюда сразу следует, что никакое исследование характеристического полинома или матрицы коэффициентов исследуемой системы не может само по себе дать правильного ответа на вопрос об устойчивости. Более того, даже существование у системы функции Ляпунова не гарантирует, вопреки привычным представлениям, от потери устойчивости при сколь-угодно малых, неизбежных на практике, вариациях параметров ([14], стр.34–38, [13], стр.118–122).

Тем самым было доказано, что традиционные, применяемые во всех проектно–конструкторских организациях и в России и за рубежом методы расчета устойчивости не надежны, не полны, могут в особых случаях, описанных в [13; 14], давать ошибочные результаты и быть причиной аварий и даже катастроф. Для восстановления надежности расчета необходимы дополнительные несложные проверки, описанные в [8; 11; 13; 14; ].

В дальнейшем выяснилось, что шестая проблема выходит далеко за пределы теории управления, что ошибочные результаты могут получиться при решении систем дифференциальных уравнений, некоторых алгебраических задач и т.п., а связано это с тем, что привычные эквивалентные (в классическом смысле) преобразования, не изменяющие, согласно определению, самих решений, могут изменять корректность решаемой задачи. Для избежания ошибок следует применять преобразования, эквивалентные в расширенном смысле, изучение свойств которых еще только начинается. Было также обнаружено, что помимо

двух известных классов задач математики и физики — класса корректных и класса некорректных задач, — существует особенно сложный для решения третий класс — класс задач, меняющих свою корректность при преобразованиях, используемых в ходе их решения — более подробно об этом рассказано в [13; 14]. История развития различных подходов к решению перечисленных шести проблем отражена в [15].

### Заключение.

Изложенный материал показывает, что на факультете ПМ–ПУ удалось найти решения шести важных научных проблем. Эти решения были получены в 1969–2001 годах в работах проф. Петрова Ю.П. совместно с его аспирантами: Веремеем Е.И. (в дальнейшем — профессор факультета ПМ–ПУ), Галактионовым М.А., Еремеевым В.В. (в дальнейшем — сотрудники факультета ПМ–ПУ), аспирантами Шумиловым В.Ф., Кузьминой Т.Г., Корниловым Ю.Н., Даниленко Г.С., Шумиловой Н.И., Сосиной Н.А., Пассовой М.В., Лапкиным С.А., Фроленковым Д.Б. и докторантами Абдуллаевым Н.Д. [7], Червяковым В.В. [8], Рассказовым Ф.Н. [9] (в дальнейшем — зав.кафедрой в Самаре), Марусевой И.В. [16] (в дальнейшем — зав. кафедрой в Петербурге). Итоги их работ отражались прежде всего во многочисленных журнальных статьях 1969–2000 гг. Не имея возможности дать полный список статей, отметим, что большинство их отражены в библиографиях публикаций [3–16].

### Литература

1. Летов А.М. Динамика полета и управление. М. «Наука», 1969, 359 с.
2. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М. «Мир», 1977, 650 с.
3. Петров Ю.П. Оптимальное управление движением транспортных средств. Л. «Энергия», 1969, 95 с.
4. Петров Ю.П. Оптимизация управляемых систем, испытывающих воздействие ветра и морского волнений. Л. «Судостроение», 1973, 214 с.
5. Солодовников В.В. Статистическая динамика линейных систем управления. М., 1960.
6. Петров Ю.П. Вариационные методы теории оптимального управления. Издание второе, дополненное. Л. «Энергия», 1977, 280 с.
7. Абдуллаев Н.Д., Петров Ю.П. Теория и методы проектирования оптимальных регуляторов Л.: «Энергоатомиздат», 1985, 240 с.
8. Петров Ю.П., Червяков В.В. Системы стабилизации буровых судов. Издание первое — 1985, издание второе, дополненное — 1997, издательство СПбГТУ, 261 с.
9. Велин Н.В., Рассказов Ф.Н. Анализ оптимальных стохастических систем управления электроприводами. Самара, 1996.

10. Панасюк В.И., Ковалевский В.Б., Политыко Э.Д. Оптимальное управление в технических системах. Минск, «Наука и техника», 1990, 272 с.
11. Петров Ю.П. Синтез оптимальных систем управления при не полностью известных возмущающих силах. Учебное пособие. Издательство Ленинградского университета, 1987, 289 с.
12. Петров Ю.П. Вариационные методы синтеза гарантирующих управлений. Методические указания, факультет ПМ–ПУ, С.Петербург, СПбГУ, 1995, 53 с.
13. Петров Ю.П., Новые главы теории управления С.Петербург, СПбГУ, 2000, 156 с.
14. Петров Ю.П., Петров Л.Ю. Неожиданное в математике и его связь с авариями и катастрофами последних лет. С.Петербург, СПбГУ, 1999. Второе издание — 2000 г., 115 с.
15. Петров Ю.П. Лекции по истории прикладной математики. С Петербург, СПбГУ, 2001, 337 с.
16. Марусева И.В., Петров Ю.П., Казаков А.Ю. Введение в основы автоматики и информатики. Учебное пособие М.: Издательство «Прометей», 1991, 155 с.