Ю. П. Петров

ИСТОРИЯ И ФИЛОСОФИЯ НАУКИ

МАТЕМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА, ИНФОРМАТИКА

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2005

УДК 681.3.06
ББК 32.973.26
П30

Петров Ю. П.

П30 История и философия науки. Математика, вычислительная техника, информатика. — СПб.: БХВ-Петербург, 2005. — 448 с.: ил.

ISBN 5-94157-689-7

Учебное пособие содержит материал, необходимый и достаточный для подготовки и сдачи нового экзамена кандидатского минимума по истории и философии математики, вычислительной техники и информатики в соответствии с изменением перечня кандидатских экзаменов. Приведены сведения о зарождении и развитии математики как науки, формировании понятия алгоритмизации, появлении и эволюции вычислительной техники, рассмотрена история и философия информатики. Особо выделена история развития методов оптимизации, теории автоматического управления, теории некорректных задач. Даны рекомендации к ответам на ка

199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ОАО "Техническая книга"
190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29.

Отпечатано с диапозитивов в ГПП "Печатный двор"
Министерства Российской Федерации по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций.
197110, Санкт-Петербург, Чкаловский пр.,15.

Оглавление

Предисловие **1**

Часть I **3**

Глава 1. Математика Древнего мира **6**

1.1. Древний Египет и Древний Вавилон 6
1.2. Древняя Греция 9

Глава 2. Возрождение математики в Западной Европе **30**

Глава 3. Зарождение и развитие математического анализа **41**

Глава 4. Неевклидовы геометрии **58**

Глава 5. Проблема обоснования анализа и математики в целом в XIX и XX веках **76**

Глава 6. Развитие математики в России. Петебургская и московская математические школы **92**

6.1. Становление российской математики 92
6.2. Петербургская математическая школа 93
6.3. Московская математическая школа 102

Глава 7. История некоторых примечательных теорем **109**

7.1. Теорема Л. Эйлера о многогранниках 109
7.2. Теорема о четырех красках 114
7.3. Теорема Ферма 115
7.4. Заключение 118

Глава 8. О новом экзамене кандидатского минимума по истории и философии науки **121**

8.1. Доказательства и опровержения в науке (К. Поппер). Роль воображения и интуиции 122
8.2. Индукция и дедукция в математике 125
8.3. Доказательства с помощью компьютера 128

8.4. "Априорное" знание и аксиоматический подход 129
8.5. Концепция научных революций Т. Куна 131
8.6. Философия математики 137
8.7. Прикладная математика....144

Глава 9. Вычислительная техника. Алгоритмы и приборы 145

9.1. Первые алгоритмы и счетные устройства....145
9.2. Русские счеты 149
9.3. Таблицы квадратов и извлечение корней 151
9.4. Таблицы логарифмов и логарифмическая линейка 152
9.5. Проблема надежности вычислений....158

Глава 10. Вычислительная техника. Вычислительные машины....162

10.1. Механические вычислительные машины 162
10.2. Арифмометры и вычислительные машины с электроприводом....165
10.3. Программируемые машины. Чарльз Бэббидж и дочь Байрона — леди Августа Ада Лавлейс 169
10.4. Релейные и аналоговые машины 174
10.5. Электронные вычислительные машины....180
10.6. Настольные машины....188
10.7. Персональные компьютеры 194

Глава 11. История и философия информатики....197

11.1. Письменность и книгопечатание....198
11.2. Использование технических достижений....201
11.3. Исследования в области теории информации 208
11.4. Философские вопросы информатики....220
11.5. "Стрела времени" и работы И. Р. Пригожина....229
11.6. Переход к использованию в информатике вычислительных машин. Социальная информатика....242
Литература к главе 11 248

ЧАСТЬ II 251

Глава 12. Вариационное исчисление и теория оптимальных процессов 254

12.1. Необходимые условия экстремума....254
12.2. Достаточные условия....261
12.3. Вариационные принципы....266
12.4. Условный экстремум 273
12.5. Сильный экстремум. Разрывные экстремали и экстремали с вертикальными отрезками....277

12.6. Экстремумы в замкнутых областях и теория оптимальных процессов 281
Литература к главе 12 297

Глава 13. Развитие теории управления 301

13.1. Устойчивость и инвариантность 301
13.2. Случайные процессы 320
13.3. Синтез оптимальных регуляторов 325
13.4. Встреча с проблемой сохранения устойчивости при вариациях параметров 330
13.5. Обеспечение комплекса требований к системе управления 335
13.6. Учет реальных ограничений на управляющие воздействия 337
13.7. Проблема гарантирующего управления 340
13.8. Аналитическое конструирование регуляторов 346
13.9. Оптимальные регуляторы в нелинейных системах управления 352
Литература к главе 13 359

Глава 14. Проблема обеспечения надежности вычислений при ограниченной точности исходных данных. Корректные, некорректные и промежуточные задачи 364

14.1. Некорректные задачи 365
14.2. Неожиданная встреча с третьим классом задач математики, физики и техники 372
14.3. Расширение класса задач, промежуточных между корректными и некорректными 384
14.4. Новые результаты в проблеме непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметров 391
14.5. Обнаружение ошибок в популярных пакетах прикладных программ (MATLAB, Mathcad и других). Методы исправления ошибок 393
14.6. Практические приложения 394
14.7. Заключение 397
Литература к главе 14 398

Примечания 401

Приложение. Программы кандидатских экзаменов "История и философия науки" ("Философия науки") 413

Предисловие 413
Программа-минимум кандидатского экзамена по философии науки 414

Литература 427

Книги по истории математики и вычислительной техники 427
Издания классиков науки 428
Биографии 429

Именной указатель 431

Предметный указатель 437

Предисловие

Это учебное пособие написано для аспирантов и соискателей, претендующих на степень кандидата физико-математических или технических наук по многочисленным специальностям, имеющим отношение к математике, прикладной математике, вычислительной технике, информатике и теории управления, т. е. для всех тех, кому, согласно приказу Минобразования с 01.07.2005 вместо экзамена по философии надо сдавать экзамен по истории и философии науки.

Книга также адресована студентам — особенно студентам тех вузов, где читаются лекции по истории математики, вычислительной техники, информатики, — и всем, кто интересуется математикой, вычислительной техникой и информатикой и хочет лучше знать историю этих областей науки.

Основное внимание в первой части книги (главы 1—11) уделено вопросам, входящим в программы нового кандидатского экзамена по истории и философии науки. Отдельные разделы посвящены философии математики и философским проблемам информатики.

Во второй части (главы 12, 13, 14) дано более углубленное изложение избранных разделов истории науки, причем рассказано не только о новой, но и о новейшей истории науки — изложение доведено до конца XX века.

В основу книги положены лекции, прочитанные автором на факультете прикладной математики — процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета (СПбГУ) и изданные в 2001 году. Рецензентом издания был член-корреспондент Российской академии наук В. И. Зубов.

Работа выполнялась при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 05-01-00317.

Вопросы и пожелания читателей принимаются на e-mail **petrov1930@mail.ru**, а также в адрес издательства "БХВ-Петербург".

Часть I

Выбирая объем и стиль изложения первой части, автор стремился к тому, чтобы предлагаемый материал был прост, доступен для студентов и всех тех, кто интересуется историей науки, но в то же время был достаточен для ответа на вопросы программ нового, введенного с 01.07.2005, кандидатского экзамена по истории и философии науки — достаточен для аспирантов и соискателей ученой степени кандидата физико-математических или технических наук по специальностям, связанным с математикой, прикладной математикой, вычислительной техникой и информатикой.

История методов оптимизации, теория управления, а также история проблемы обеспечения надежности вычислений — изложены во второй части.

Глава 1

Математика Древнего мира

1.1. Древний Египет и Древний Вавилон

Математика возникла одновременно с образованием первых земледельческих государств. До тех пор, пока люди жили племенами и малыми общинами, им хватало простейших навыков счета в переделах первых десятков. С появлением государств, объединивших десятки и сотни тысяч людей, общественная жизнь усложнилась. Появилась необходимость учитывать налоги и повинности, вносимые тысячами земледельцев и, следовательно, оперировать с многозначными числами. Стало нужно распределять земельные участки и, значит, вычислять их площадь; с появлением складов и амбаров для зерна возникла необходимость рассчитывать их вместимость, — т. е. вычислять объем. Таким образом, появилась потребность в определенном уровне математических знаний.

Математические знания, безусловно, существовали во многих древних землевладельческих государствах, однако восстановить уровень знаний, который в них существовал, можно лишь по сохранившимся документам, найденным при археологических раскопках. Далеко не всегда документы сохранялись, и поэтому сколько-нибудь подробные данные мы имеем лишь о математике Древнего Египта и Древнего Вавилона. Египтяне писали на хрупком папирусе, но в сухой почве Египта некоторые папирусы пережили тысячелетия и дошли до нас. Вавилоняне писали клинописью на сырой глине, которая затем обжигалась. Найдены сотни тысяч обожженных глиняных табличек с клинописными текстами, некоторые из них посвящены математическим расчетам.

В папирусных текстах с египетскими иероглифами и глиняных табличках с вавилонской клинописью оживает перед нами седая древность. Сохранились тексты, дошедшие до нас со времен первых фараонов Египта (Древнее царство), а это 2700—2000 лет до нашей эры. Не меньшую древность имеют и клинописные таблички, некоторые из них относятся к эпохе первых вавилонских царей, правивших 2300—1900 лет до нашей эры.

Математика в Древнем Вавилоне достигла несколько большего развития, чем в Египте, поэтому рассмотрим более подробно вавилонскую математику, или, правильнее, — математику древнего Двуречья, ибо одна из самых древних земледельческих культур мира возникла по берегам двух текущих рядом великих рек — Тигра и Евфрата. Сейчас эту территорию занимает государство Ирак. Как в наши дни, так и в древности Двуречье — это засушливая равнина, дождей мало, но почвы плодородны и при искусственном орошении дают богатые урожаи. Сохранились клинописные таблички, позволяющие подсчитать, что в государствах древнего Двуречья урожай (в современных мерах) достигал 30 центнеров с гектара. Это большой урожай. Именно он обеспечивал тот избыток, прибавочный продукт, на котором выросли культура и наука городов и государств, расположенных в долинах Тигра и Евфрата.

Великие реки Тигр и Евфрат — капризны, они то разливаются, то мелеют, несут с собой плодородный ил, но и грозят разрушительными наводнениями. Для того чтобы жить на этой негостеприимной земле, необходим согласованный труд тысяч людей. Только совместным трудом людей, подчиненных единой воле, оказалось возможным построить сеть каналов, проводящих животворную влагу на поля, создать систему дамб, ограждающих от наводнений, и поддерживать все это сложное хозяйство в порядке.

Сама природа подталкивала людей к объединению, и города-государства возникли здесь очень рано — еще за несколько тысячелетий до нашей эры в Двуречье появились города шумерского народа — Ур, Урук, Лагаш, а в XXIII веке до н. э. уже существовало единое государство, объединившее все города Двуречья, — государство со столицей в Вавилоне. Это было деспотическое государство, с неограниченной властью царя и регулярными общественными работами по строительству и поддержанию в порядке каналов, плотин и дамб. Такими работами руководило сословие писцов — сословие почетное и уважаемое. Писцами нередко становились даже сыновья правителей. "Писец должен уметь писать понятно, хорошо знать математику, уметь межевать земли, примирять спорящих" — читаем мы на одной из древних клинописных табличек.

Из опыта писцов и возникла вавилонская математика, а опыт этот был велик, ибо царство вавилонское существовало долго. Если считать от царя Саргона Древнего, в XXIII веке до н. э. впервые объединившего Двуречье, и до персидского завоевания, покончившего в 538 году до н. э. с самостоятельностью Вавилона, то мы насчитаем 17 веков независимого существования. Безусловно, математика не была одной и той же все это долгое время, она развивалась, но развитие было медленным, да и ограниченность числа дошедших до нас математических текстов не позволяет достаточно хорошо представить себе развитие вавилонской математики. Мы опишем только то, что вавилоняне умели, — а умели они многое.

Вавилоняне пользовались шестидесятеричной системой счисления (именно от вавилонян идет традиция делить градус на 60 минут и минуту на 60 секунд). Они умели складывать и вычитать многозначные числа и дроби. Для облегчения умножения и деления они составили обширные таблицы. Имелись у них также таблицы степеней некоторых чисел до десятой степени включительно, пригодные одновременно и для отыскания корней. Вавилоняне умели решать линейные и квадратные уравнения, правильно вычислять площади прямоугольников, треугольников, трапеций, объемы куба, параллелепипеда, призмы, пирамиды.

Однако мы не найдем у них самого привычного нам элемента математики — доказательства. Правила вычисления заучивались как догма и передавались от одного поколения писцов к другому. Порукой верности служила вековая практика. При этом точные и приближенные формулы не разделялись, если только приближенная формула удовлетворяла практическим требованиям.

Характерным примером служит использовавшееся еще в Древнем Египте правило для вычисления площади произвольного четырехугольника со сторонами a, b, c, d. Египтяне считали, что площадь четырехугольника равна произведению полусумм пар противоположных сторон, т. е.:

$$S = \frac{a+c}{2} \times \frac{b+d}{2}. \tag{1}$$

Эта формула — приближенная, и можно привести примеры четырехугольников, для которых ее погрешность сколь угодно велика. Так, например, площадь ромба со стороной a и острым углом β равна, как известно, $S_T = a^2 \sin\beta$, в то время как по формуле (1) имеем $S_{\text{пр}} = a^2$. Чем меньше угол β, тем больше погрешность. Однако на практике формула (1) применялась в Египте для расчета площади земельных участков, форма которых обычно бывала близка к прямоугольнику, а в этом случае формула (1) давала достаточную точность. Сознавали ли древние землемеры, что формула (1) является приближенной, мы не знаем.

И точные, и приближенные формулы и правила заучивались учениками без доказательств, заучивались как рецепт, как догма.

Сходными чертами с математикой Древнего Египта и Древнего Вавилона обладала и математика государств, существовавших 1,5—3 тысячи лет назад на территориях Индии и Китая. Везде мы обнаруживаем большой арсенал практических знаний, умение проводить громоздкие вычисления с большими числами, но не находим основного звена математики как науки — не находим доказательства. Математика как наука возникла не в Египте, не в Двуречье, не в Индии и Китае — она возникла в Древней Греции, и это произошло не случайно.

1.2. Древняя Греция

Математика в Древней Греции начала развиваться позже и на другой социально-экономической основе, чем математика Древнего Египта и Древнего Вавилона. Греция не имела таких плодородных орошаемых земель, как в долинах Нила, Тигра и Евфрата, однако с течением времени, при неуклонном совершенствовании орудий труда сравнительно мало плодородные почвы Греции стали приносить прибавочный продукт, служивший материальной базой для развития культуры и науки. Помимо земледелия, греки издавна занимались и рыболовством. Изрезанность береговой линии, обилие заливов и бухт способствовали тому, что греки рано стали морским народом. Торговые и завоевательные плавания греческих мореходов (они получили поэтическое отражение в эпических песнях "Илиады" и "Одиссеи", в мифах об аргонавтах) способствовали расширению кругозора греческого народа, воспитывали любознательность и пытливость.

К VI веку до н. э. греки, помимо собственно Греции, населяли многочисленные города по побережью Малой Азии и Италии. Все эти города были самостоятельны. Греция не знала централизации. Она делилась на самостоятельные города-государства ("полисы"), наиболее знаменитыми из которых были Афины, Спарта, Милет, Сиракузы. В большинстве этих городов установилась демократическая форма правления, когда городские ремесленники, купцы, матросы, окрестные земледельцы на народном собрании непосредственно решали все государственные дела, избирали должностных лиц и предводителей войска, образовывали многочисленные коллегии присяжных, которые вершили суд. Так в Афинах, например, суд присяжных — гелиэя — состоял из 500 человек и регулярно переизбирался, так что практически почти каждый гражданин участвовал в суде, привыкал к логике и доказательствам судебных ораторов.

Демократия способствовала развитию личности, невиданному раньше расцвету производительных сил, культуры и науки. Греческая наука — и в том числе греческая математика — это творение свободных людей, полноправных участников общественных и государственных дел, людей, привыкших думать и рассуждать, выслушивать доводы и оспаривать их. Необходимо, разумеется, помнить об ограниченности греческой демократии, где рядом со свободными полноправными гражданами существовали массы рабов. Рабский труд оказывал глубочайшее влияние на Древнюю Грецию. С одной стороны, создавая прибавочный продукт, он обеспечивал полноправным гражданам свободное время для занятия государственными делами, искусством и наукой, с другой стороны — массовое рабовладение, обесценивая труд свободных людей, подрывало самые основы греческой демократии, которая, поэтому, оказалась недолговечной. В VI веке до н. э. устанавливается демократическое правление в большинстве греческих городов-полисов, в V веке эти города победоносно отражают персидское нашествие, а уже в IV веке до н. э. внутренние раздоры среди демократии приводят к ее кризису, свободные города-полисы постепенно попадают под власть македонской монархии, а затем — римской империи.

Эпоха расцвета греческой демократии оказалась недолговременной (менее 300 лет), но в науке она оставила неизгладимый след.

"Отцом греческой науки" обычно считают Фалеса Милетского — купца, политического деятеля, философа, астронома и математика, жившего примерно в 625—547 годах до н. э. в городе Милете. Наиболее известен Фалес как философ, но он же был и первым греческим геометром, который доказал, например, что:

- диаметр делит круг пополам;
- углы при основании равнобедренного треугольника равны;
- вертикальные углы равны;
- если у двух треугольников сторона и два угла, прилежащих к ней, равны, то и треугольники равны.

Последнее утверждение Фалес использовал, в частности, для определения высоты египетских пирамид по длине отбрасываемой ими тени, для оценки расстояния кораблей на море.

Но главная суть того нового, что внес Фалес, было само понятие о доказательстве того или иного утверждения, т. е. о выводе его из других, более очевидных и заведомо верных утверждений. Мы не знаем в деталях, как проводил свои доказательства Фалес, ибо работы его до нас не дошли, дошел лишь их пересказ в работах позднейших греческих ученых. Можно догадываться, что, например, теорему о равенстве вертикальных углов Фалес выводил из очевидного для него принципа (аксиомы), что если от двух равных величин отнять третью, то остатки будут равны.

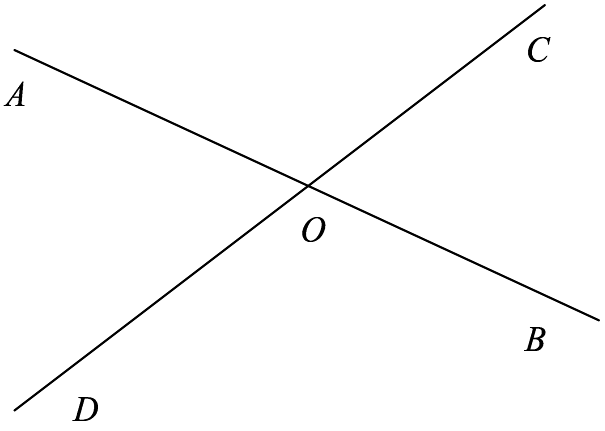


Рис. 1.1. К теореме Фалеса о равенстве вертикальных углов

Действительно, вертикальные углы *AOD* и *COB* (рис. 1.1) можно рассматривать как остатки после вычитания из углов *AOB* и *COD* (равных каждый двум прямым) одного и того же угла *AOC*. Отсюда и следует, доказывал своим согражданам Фалес, что вертикальные углы равны.

Мы так привыкли к тому, что в основе математики лежит доказательство, что с трудом представляем себе, как может быть иначе. А ведь на самом деле доказательства появились только в Древней Греции. Математики Древнего Египта и Древнего Вавилона, как мы уже отмечали, не знали доказательств. Более того, математики Китая — не только древнего, но и средневекового, математики Японии — вплоть даже до самого XVIII века — тоже не знали, что такое доказательство. А ведь китайские и японские математики достигли в Средние века высокого уровня развития. Китайцы умели, например, решать системы линейных уравнений со многими неизвестными (аналогичный методу Гаусса метод "фан-чен" — последовательного исключения неизвестных — был известен китайцам еще во II веке до н. э.). Китайцы решали не только квадратные уравнения, но и уравнения высших степеней — так, например, уравнение:

$$576x^4-2640x^3+1729x^2+3960x-1695252=0$$

не испугало китайского математика XIV века Чжу Шицзе, который нашел его корень $x=8\frac{2}{3}$. И в то же время доказательств китайцы (как и японцы до XVIII века) не знали. В достоверности результатов они убеждались проверкой, например — подстановкой корня в уравнение, но не доказывали своих утверждений в современном смысле этого слова. Пример Египта и Вавилона, Китая и Японии показывает, что математика веками и тысячелетиями может развиваться совершенно особым, непривычным для нас, путем.

Греция является исключением. В Греции — и только в Греции — достигло развития математическое доказательство, а все другие страны — арабские государства Средних веков, средневековая Европа — следовали уже проложенным путем.

Можно долго фантазировать на тему: а что было бы, если, например, в V веке до н. э. воевавшие с Грецией персы достигли успеха и погубили бы греческую науку? Когда, при каких условиях математическое доказательство возникло бы вновь? Или оно так и не возникло бы? Об этом можно долго спорить, факты же говорят об одном — математическое доказательство было создано трудами ученых Древней Греции, а математики всех других народов — Индии, стран ислама, средневековой Европы — использовали греческий опыт, опирались на уже выработанную греками традицию доказательства.

Почему традиции математического доказательства зародились именно в Древней Греции, а не в других странах? Об этом можно высказывать только догадки. Безусловно, существенную роль сыграла привычка свободного гражданина греческого города-государства к демократическому обсуждению общественных дел, привычка выслушивать обстоятельные доводы ораторов в народном собрании, обвинителей и защитников в суде, привычка обсуждать эти доводы, взвешивать их обоснованность. И переходя к рассмотрению научных вопросов, греческий гражданин сохранял эту привычку: ему хотелось не только уяснить истину, но и убедить окружающих в своей правоте, привести убедительные доводы, привести доказательства своих утверждений. Так, по всей вероятности, возникла в Древней Греции традиция математического доказательства.

Позже Аристотель учил, что доказательства не только устанавливают справедливость тех или иных фактов, но проясняют сущность этих фактов и раскрывают логические связи между ними.

Другая характерная черта греческой науки — интерес греков, помимо прикладных задач, еще и к чисто теоретическим вопросам. Греки развивали математику не только ради ее приложений, но и ради любознательности, ради постижения законов, управляющих миром, которые — как они впервые подметили — можно свести к числу и мере.

Числовые закономерности стали изучаться греческим философом Пифагором и его учениками. О самом Пифагоре, жившем с 564 по 473 годы до н. э., сохранилось мало достоверных сведений. В основном до нас дошли связанные с его именем легенды — вроде той, что, доказав теорему, известную сейчас под именем теоремы Пифагора, он велел принести в жертву 100 быков. Однако достоверно известно, что, занимаясь музыкой, Пифагор и его ученики подметили, что качественные отличия звуков обуславливаются чисто количественными различиями в длине струн. Если длины струн относятся как 1:2, 3:2 или 4:3, то разница в тонах будет октавой, квинтой или квартой, и музыкальные интервалы благозвучны, при других отношениях длин возникает диссонанс, и т. п. Так, наблюдения над музыкой натолкнули пифагорейцев на великую мысль, что все закономерности мира можно выразить с помощью чисел, или, как впоследствии пересказал их идеи Аристотель: "элементы чисел являются элементами всех вещей, и весь мир в целом является гармонией и числом".

Новый подход греков к математической науке — подход, основанный на рассуждении и доказательстве, позволил грекам в немногие десятилетия далеко перекрыть все достижения древних египтян и вавилонян, накапливавшиеся в течение многих веков. Греки быстро открыли множество фактов (теорем), относящихся к свойствам прямоугольников, параллелограммов и других геометрических фигур. Фактически вся та геометрия, которая сегодня изучается в средней школе, была открыта греками. Причем интересно, что греки основное внимание сосредоточили не столько на конкретных практических задачах, сколько на их обобщениях.

Рассмотрим одно их таких обобщений — знаменитую задачу об удвоении куба. Еще в древности была известна задача об удвоении квадрата — т. е. о построении такого квадрата, площадь которого была бы в два раза больше данного. Такая задача часто возникала при распределении земельных участков, и греки быстро нашли ее решение. Умели они и строить квадраты, площадь которых была в три, в четыре, в любое число раз больше данного. Все построения производились циркулем и линейкой и особых затруднений не вызывали. Однако у греков возникла мысль об обобщении задачи из плоскости в пространство, о построении куба, объем которого был бы ровно в два раза больше объема данного куба. Такая задача вряд ли возникла из практических потребностей, однако древние греки с большим жаром отдавались ее решению. Возникла даже красивая легенда о том, откуда взялась сама эта проблема — проблема удвоения куба. Легенда рассказывает, что на греческом острове Делос разразилась эпидемия, от которой умирало много людей. Жители обратились за помощью к жрецам Аполлона — покровителя острова. Оракул храма Аполлона якобы ответил, что эпидемия прекратится тогда, когда будет удвоен (и в точности удвоен) жертвенник Аполлона, имеющий форму куба. Эта легенда отражает стремление греков объяснить, почему они столько сил и внимания отдали такой, не имеющей большого практического значения, задаче, как удвоение куба.

А задача оказалась очень сложной и, несмотря на все приложенные усилия, ее никак не удалось решить с помощью линейки и циркуля. Нам теперь, конечно, понятна причина затруднений древних греков — ведь с помощью циркуля и линейки можно решать лишь задачи, сводящиеся к уравнению второй степени или цепочкам таких уравнений, а удвоение куба сводится к уравнению третьей степени. Действительно, если ребро данного куба равно a, а ребро искомого куба обозначить через x, то для определения x получаем уравнение третьей степени

$$x^3 = 2a^3,$$

не сводящееся к квадратному или цепочке квадратных уравнений. После долгих лет безуспешных попыток найти x с помощью циркуля и линейки греки стали пробовать другие методы и обнаружили, что задача об удвоении куба и многие другие, не разрешимые циркулем и линейкой, получают решение, если предварительно построить новые кривые — эллипс, гиперболу, параболу. Так задачи об удвоении куба дали первый толчок к изучению этих кривых — кривых второго порядка, которые впоследствии стали играть столь важную роль и в математике, и в астрономии. Истинная роль этих кривых была полностью оценена лишь в XVII веке, когда Кеплер установил, что планеты движутся по эллипсам. А началось все со скромной (но трудной) задачи об удвоении куба.

Не меньшую популярность имели в древности и еще две знаменитые задачи — трисекции угла (т. е. деления циркулем и линейкой произвольного угла на три равные части) и квадратуры круга (т. е. построения квадрата, в точности равновеликого данному кругу). И здесь мы видим процесс обобщения. Совсем не трудно разделить циркулем и линейкой любой угол на две равные части. Но заманчиво обобщить задачу и найти метод деления угла на n частей. Уже при $n = 3$ обобщение оказалось неожиданно трудным. Традиционных инструментов геометрии — циркуля и линейки без делений явно не хватало. Греки нашли остроумное решение, использующее дополнительный инструмент — линейку с нанесенными метками — но не оставляли упорных попыток найти "классическое" построение — т. е. использующее только гладкую линейку и циркуль. Трудно представить, сколько труда и сил отняла эта задача; только в XIX веке было окончательно доказано, что циркулем и линейкой трисекция угла не осуществима[1*]. Та же судьба постигла и третью знаменитую задачу древности — квадратуру круга. Она была предметом пристального внимания и упорных усилий многих математиков Древней Греции,

---

[*] Примечания приведены в соответствующем разделе, расположенном в конце книги. — *Ред.*

и лишь в XIX веке было доказано, что циркулем и линейкой она также не разрешима.

К сожалению, о самой интересной ранней эпохе древней математики — эпохе, когда в спорах и дискуссиях вырабатывались ее методы, мы знаем мало. Нам известны имена выдающихся греческих математиков — Архит из Тарента (428—347 гг. до н. э.), Антифон (469—399 гг. до н. э.), Гиппократ Хиосский (около 400 г. до н. э.), Евдокс Книдский (около 408 — около 355 гг. до н. э.), Феодор из Кирены, Теэтет — дошли до нас и рассказы о задачах, которые они решали. Однако подлинные работы греческих математиков той поры до нас не дошли. Мы знаем о них лишь в пересказах позднейших математиков, работы которых история сохранила. Известно лишь, что и тогда кипели острые научные споры. Так, при вычислении площадей и объемов греки столкнулись с проблемой предельного перехода. Известно, что уже в V веке до н. э. греки знали не только формулу для расчета объема пирамиды (одна треть произведения площади основания на высоту), но и соответствующую формулу для конуса. Почти очевидно, что конус они рассматривали как предельный случай пирамиды с бесконечно большим числом боковых граней, и на этом пути получили правильную формулу для объема конуса.

Однако хорошо известно, что предельный переход — дело тонкое, и при переходе от конечного к бесконечному возникают многие логические трудности и противоречия. На эти противоречия еще в V веке до н. э. обратил серьезное внимание философ Зенон из Элеи, который придал им броскую и запоминающуюся форму "апорий" (парадоксов).

Вот одна из апорий: летящая стрела никогда не достигнет конца своего пути, потому что она должна сперва долететь до середины пути, затем до середины остатка и т. д. Прежде чем попасть в цель, стрела должна отсчитать бесконечное множество "середин" остающегося ей пути, и значит, никогда не достигает цели.

Вот другая, особенно знаменитая, апория — "Ахиллес и черепаха". Пусть впереди быстрого Ахиллеса ползет черепаха, начальное расстояние между ними — a, а скорость Ахиллеса в k раз больше скорости черепахи. Сколь бы велико ни было k, указывает Зенон, Ахиллес никогда не догонит черепаху, — когда он пробежит разделяющее их первоначальное расстояние a, черепаха проползет $\frac{a}{k}$, когда Ахиллес пробежит и его, черепаха отползет на $\frac{a}{k^2}$ — и т. д. Всякий раз между ними будет оставаться отличное от нуля расстояние $\frac{a}{k^n}$.

Не следует смотреть на апории упрощенно, как на остроумные софизмы. Греки прекрасно знали, что стрелы попадают в цель и Ахиллес догоняет черепаху. Однако им нужно было математически, — т. е. непротиворечиво — объяснить, как это происходит, а объяснение процесса реального движения является очень непростым делом.

Из курса философии мы знаем (еще Гегелем доказано), что все достаточно сложные понятия — и уж во всяком случае такие понятия, как "движение", "бесконечность" — являются понятиями внутренне противоречивыми. Можно ли построить математическую теорию движения, свободную от противоречий самого понятия "движение"? Совершенно бесспорного ответа на этот вопрос мы не имеем и в наше время.

Древние греки были первыми из тех, кто серьезно задумывался над трудностями математического описания понятий движения и бесконечности. Вот одна из трудностей — запишем путь Ахиллеса до встречи:

$$S_A = a + \frac{a}{k} + \frac{a}{k^2} + \ldots$$

и путь черепахи:

$$S_Ч = \frac{a}{k} + \frac{a}{k^2} + \ldots .$$

Каждому отрезку $\frac{a}{k^n}$ пути Ахиллеса соответствует отрезок $\frac{a}{k^{n+1}}$ пути черепахи. Поэтому к моменту встречи Ахиллес должен пройти столько же отрезков пути, сколько и черепаха. С другой стороны, можно рассуждать и иначе. Каждому отрезку пути черепахи $\frac{a}{k^n}$ можно сопоставить равный по величине отрезок пути Ахиллеса. Тогда получается, что к моменту встречи Ахиллес должен пробежать на один отрезок (начальный отрезок a) больше, чем черепаха. Если обозначить количество отрезков, пройденных черепахой до встречи, через α, то тогда получается, что $\alpha = \alpha + 1$ (не следует забывать, что α не является конечным числом). Таким образом, в мире бесконечного теряет свою силу одна из важнейших аксиом: "целое больше своей части".

С этой трудностью, стоящей на пути проникновения в бесконечное, встретились впоследствии и математики нового времени. Они пошли, как мы увидим, по другому пути, отличному от пути математиков Древней Греции. Греческие математики стремились, прежде всего, к безукоризненной логической строгости и поэтому они вообще отказались от понятия завершенной, "актуальной" бесконечности. Так, например, после долгих дискуссий и обсуждений греки отказались рассматривать окружность как правильный многоугольник с бесконечным числом сторон, а круг — как актуальную бесконечную совокупность равнобедренных треугольников с вершинами в центре круга и основаниями на сторонах вписанного в окружность многоугольника с бесконечным числом сторон. Такое рассмотрение было очень удобно, поскольку позволяло легко и просто найти, например, площадь круга как сумму площадей составляющих его треугольников — т. е. как произведение длины окружности на половину радиуса:

$$S = 2\pi r\frac{r}{2} = \pi r^2.$$

Однако греки считали, что операции с актуальными бесконечностями могут приводить к противоречиям и неверным результатам. Поэтому для вычисления площадей и объемов криволинейных фигур и тел они стали, начиная с IV века до н. э., использовать предложенный Евдоксом метод "исчерпывания". В этом случае не используется актуальная бесконечность, — вместо этого доказывается, что потенциально, с увеличением числа шагов исчерпывания, разность между объемом искомого тела и некоторым заранее известным объемом может быть сделана сколько угодно малой.

Метод Евдокса строг, но очень громоздок, а главное — он позволял доказать уже известный результат, но не позволял находить площади и объемы новых фигур и тел.

Отказ от понятия актуальной бесконечности был первой большой жертвой, принесенной математиками Древней Греции ради требований строгости.

Вторая жертва была связана с открытием несоизмеримости. Несоизмеримость открыли пифагорейцы еще в V веке до н. э., обнаружив, что сторона квадрата несоизмерима с его диагональю. По отдельным замечаниям, сохранившимся у более поздних авторов, мы можем приблизительно восстановить ход рассуждений пифагорейцев: предположим, что в квадрате *ABCD* сторона *AB* и диагональ *AC* соизмеримы, т. е. их отношение равно отношению двух целых чисел:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{m}{n}, \tag{2}$$

причем m и n не являются оба четными, иначе дробь $\frac{m}{n}$ можно было бы сократить на два. Из (2) следует, что $(AC)^2 : (AB)^2 = m^2 : n^2$, но по теореме Пифагора $(AC)^2 = 2(AB)^2$ и, следовательно:

$$m^2 = 2n^2. \tag{3}$$

Из равенства (3) вытекает, что m — четное число, $m=2t$, а, следовательно, n — нечетное. Но, подставив соотношение $m=2t$ в равенство (3), получим:

$$4t^2=2n^2,$$

или $n^2=2t^2$, откуда следует, что n должно быть четным. Таким образом, предположение о соизмеримости стороны квадрата и его диагонали приводит к противоречию. Отсюда, по мнению древних греков, следовало, что бесполезно искать число x, являющееся решением даже простейшего квадратного уравнения $x^2=2$. По мнению греков, такого числа (дроби) нет, ибо оно не может быть ни четным, ни нечетным. Довольствоваться приближенными значениями корней квадратных уравнений (как это делали вавилоняне, умевшие последовательными итерациями находить корни с любой желаемой степенью точности) греки не хотели, поскольку они стремились к безукоризненно строгому результату.

В конечном счете, греки вообще отказались от поисков арифметического или алгебраического решения квадратных уравнений и стали применять очень громоздкий чисто геометрический метод, когда коэффициенты уравнения задаются в виде отрезков, а неизвестное x определяется построением с помощью циркуля и линейки. При таком способе трудность несоизмеримости отпадает, получается точное, а не приближенное значение корня (если предположить, конечно, что мы располагаем идеальными инструментами), но если говорить о реальной точности, достигаемой при геометрических построениях реальными циркулем и линейкой, то она, конечно, гораздо ниже той, которая достигается при арифметическом вычислении корня после нескольких последовательных итераций. Однако древних греков волновала не действительная точность, а принципиальная, поэтому они в математике с бóльшим рвением отдавались геометрии и очень мало внимания уделяли реальным вычислениям.

Вообще, характерной чертой развития греческой математики является быстро нарастающий отрыв теории от практики, "чистой" математики от прикладной, хотя самих этих терминов — чистая и прикладная математика — тогда еще не употребляли. На заре греческой математики великий Фалес, доказав первые теоремы, сразу же применял их для определения высоты египетских пирамид по измерениям длины отбрасываемой ими тени, для измерения расстояния до корабля в море и для многих других практических приложений. Однако в ходе дальнейшего развития греческой математики приложение ее к решению практических задач стало считаться все более и более второстепенным делом.

Эта особенность греческой науки неразрывно связана с самим фундаментом древнегреческого общества — рабовладением. Действительно, если труд — удел раба, то всю прикладную часть науки, все то, что расширяет возможности и могущество труда, греки постепенно начинали считать не стоящим внимания свободного человека.

Отрыв греческой математики от практической жизни был закреплен и усилен философской школой Платона, занявшей господствующее положение к IV веку до н. э., в эпоху упадка греческой демократии. Платон, живший в 427—347 гг. до н. э., был философом-идеалистом и считал, что окружающий нас материальный мир, воспринимаемый нашими чувствами, есть лишь бледное, неверное отражение другого мира — мира бессмертных идей, не воспринимаемых чувствами, но постигаемых разумом.

Платон приводит интересное сравнение (даем его в пересказе): Представим себе людей, живущих в глубине темной пещеры, не видящих ничего, кроме ее стен, на которые падают тени реальных предметов нашего мира. Люди, не видящие ничего, кроме этих теней, могут начать считать именно тени единственной реальностью, и лишь усилие мысли позволит им понять, что истинный и прекрасный мир лежит далеко за пределами их темной пещеры. Природа не дала людям органов чувств для постижения мира бессмертных идей. Наши глаза, уши позволяют нам ощущать лишь тени мира идей — реальные, бренные предметы окружающего мира, а истинный мир бессмертных идей, как считал Платон, постижим лишь разумом, силой отвлеченной мысли.

Сейчас мы настолько привыкли к материалистическому мировоззрению, что нам уже не так легко постигнуть точку зрения Платона. Возьмем, например, понятие сферического тела. Для нас сфера — это математическая абстракция от реальных тел, форма которых близка к сферической. Для Платона настоящей, истинной, реальностью была идеальная сфера — геометрическое место точек, равностоящих от центра, а все реальные земные тела, близкие к сфере, — это лишь искаженные отражения этой идеальной сферы.

Из философских воззрений Платона вытекает и та большая роль, которую он отводил математике. Действительно, для последователей Платона было очевидным, что только математика могла помочь постичь законы, управляющие единственным истинным для них миром — миром идей, миром идеальных треугольников, окружностей, конусов, сфер. И единственным путеводителем в этом идеальном мире могло быть лишь строгое математическое рассуждение, очищенное от всякой наглядности, от всякой апелляции к нашим ощущениям, восприятиям, к нашей интуиции. Только строгое доказательство, а не свидетельство наших чувств — может, по Платону, установить истину.

Из философских идей Платона и его последователей берет свое начало такая характерная черта греческой математики, как обостренное внимание к строгости доказательств. Под несомненным влиянием этих идей написан знаменитый трактат Евклида "Начала".

Говоря о математике Древней Греции, мы, как уже отмечалось, не должны забывать, что почти все работы греческих математиков V—IV веков до н. э. не дошли до нас. Сохранились лишь отдельные, часто отрывочные, фрагменты из работ таких математиков, как Архит из Тарента, Феодор из Кирены, Теэтет, Гиппий из Элиды, Гиппократ Хиосский, Евдокс Книдский. Поэтому можно лишь с большим трудом и весьма неполно восстановить путь развития греческой математики, который, конечно, не был ровным и прямолинейным, протекал в ожесточенных спорах и дискуссиях — особенно о проблемах конечного и бесконечного, соизмеримости и несоизмеримости. Восстановить детали этих споров уже невозможно. О греческой математике мы судим, в основном, по итоговому, завершающему труду — по трактату Евклида "Начала". Этот трактат, состоящий из 13 книг, дошел до нас полностью в многочисленных списках. Евклид, живший в конце IV — начале III века до н. э., подвел итоги предшествующему, примерно трехсотлетнему, развитию греческой математики. Надо отметить, что современники не слишком ценили Евклида, считали его лишь популяризатором идей своих великих предшественников. Но история оправдала Евклида. Именно его трактат выдержал испытание временем, многократно переписывался, а поэтому и дошел до нас через века в полном виде, в отличие от работ его предшественников, из которых до нас дошли отрывки и неполные пересказы.

Заметим, что, в отличие от самого трактата, биография Евклида до нас не дошла. О жизни Евклида, как и о жизни других греческих математиков, мы почти ничего не знаем. Неизвестны даже точные годы его рождения и смерти.

Изложение у Евклида ведется строго дедуктивно. Начинается его трактат с определений, постулатов и аксиом. Определения Евклида ("точка есть то, что не имеет частей", "линия есть длина без ширины") сразу подчеркивают, что дальнейшее изложение будет относиться не к реальному, а к идеальному миру, миру Платона, не постигаемому чувствами, но постигаемому разумом. Свойства этого мира надо логически выводить из аксиом и постулатов. Вот формулировки аксиом Евклида:

1. Равные одному и тому же равны между собой.
2. И если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны.
3. И если от равных отнимаются равные, то и остатки будут равны.

4. И совмещающиеся друг с другом равны между собой.
5. И целое больше части.

А вот постулаты Евклида:

1. От всякой точки до всякой точки можно провести прямую.
2. Ограниченную прямую можно непрерывно продолжать по прямой.
3. Из всякого центра всяким раствором может быть описан круг.
4. Все прямые углы равны между собой.
5. И, наконец, знаменитый "пятый постулат" (о нем мы еще много будем говорить, когда дойдем до возникновения неэвклидовой геометрии):

   если прямая, пересекающая две прямые, образует внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, то, продолженные неограниченно, эти две прямые встретятся с той стороны, где сумма углов меньше двух прямых.

Опираясь на эти аксиомы и постулаты, Евклид методически доказывает десятки теорем.

- В первой из 13 книг "Начал" излагается планиметрия прямолинейных фигур, устанавливаются основные свойства треугольников, прямоугольников и трапеций. Завершает первую книгу теорема Пифагора.
- Во второй книге излагаются элементы геометрической алгебры (геометрическое решение квадратных уравнений).
- В третьей книге рассматриваются свойства круга, его касательных и хорд.
- В четвертой книге даются методы построения (циркулем и линейкой) правильных многоугольников при $n = 3, 4, 5, 10$ и 15.
- В пятой книге излагается теория отношений Евдокса и основанный на ней "метод исчерпывания", с помощью которого затем доказываются теоремы о площадях и объемах криволинейных фигур и тел.
- В шестой книге излагается учение о подобии и геометрический метод решения квадратных уравнений вида:

  $$\frac{b}{c}x(a \pm x) = S.$$

- Книги 7, 8 и 9 посвящены арифметике. В них изложены теория делимости, алгоритм нахождения общего наибольшего делителя двух чисел (алгоритм Евклида), приводится разложение любого натурального числа на простые множители, доказывается, что такое разложение единственно, и, наконец, доказывается знаменитая теорема Евклида о том, что простых чисел бесконечно много.

Доказательство этой теоремы гениально просто — допустим, что существует только конечное число простых чисел: $p_1; p_2 ... p_n$. Рассмотрим число $N = p_1 \cdot p_2 ... p_n + 1$. Оно будет либо простым, и тогда мы имеем новое простое число, не совпадающее с нашими $p_1; p_2 ... p_n$, либо оно будет составным, и тогда оно делится на простое число q, снова не совпадающее ни с одним из $p_1; p_2 ... p_n$.

Однако простота и наглядность доказательства этой теоремы Евклида о простых числах является исключением. Вообще же доказательства Евклида длинны, сложны и трудны для читателя.

☐ В десятой книге Евклида говорится об отрезках, являющихся корнями квадратных и биквадратных уравнений, и дается их классификация.

☐ Одиннадцатая книга посвящена стереометрии. Она содержит теоремы о прямых и плоскостях в пространстве и о равновеликости параллелепипедов и призм.

☐ В двенадцатой книге методом исчерпывания Евдокса доказано, что площади кругов относятся как квадраты их диаметров, объемы шаров — как кубы их диаметров, и что объем пирамиды и конуса в три раза меньше объемов призмы и цилиндра с теми же основаниями и высотами.

☐ Наконец, тринадцатая завершающая, книга "Начал" посвящена построению пяти правильных многогранников — тетраэдра, куба, октаэдра, додекаэдра, икосаэдра — и доказательству того, что других правильных многогранников не существует.

Отношение к великому труду Евклида не у всех одинаково. Для очень многих математиков более позднего времени он был образцом. В школах Англии еще в XVIII и XIX веках учили школьников геометрии по дословным переводам "Начал" на английский язык. А вот Алексей Николаевич Крылов как раз по этому поводу писал: "Можно лишь удивляться, как общество «защиты детей от жестокого обращения и покровительства животным» допускало, чтобы 12—13-летних мальчиков мучили в школах переводами Евклида". (А. Н. Крылов "Значение математики для кораблестроения", 1938).

Надо сказать, что, действительно, "Начала" Евклида написаны очень тяжело, хотя с удивительной логичностью. Евклид нигде не поясняет, для какой цели вводится та или иная теорема, нигде не определяет общего плана изложения. В ходе длинных и сложных доказательств многочисленных теорем он ни разу не указывает, не поясняет, почему выбран тот или другой путь доказательства, какие наводящие соображения могли бы натолкнуть читателя на понимание основной идеи доказательства. Поэтому читать и понимать Евклида — занятие трудное и сложное. Иной раз кажется, что Евклид и не стремится совсем к тому, чтобы его понимали, ему важно только, чтобы с ним соглашались. Если ты согласился с постулатами и аксиомами, то ты неизбежно должен согласиться и со всей последовательностью теорем, этого требует железная логика изложения. Евклид ведет читателя по лабиринту теорем, как ведут слепого; на каждом шагу читатель обязан согласиться с евклидовой логикой, должен признать, что теорема доказана, и доказана правильно, но общий план лабиринта и цель путешествия по нему остаются не раскрытыми.

Для того чтобы понять, почему Евклид писал так, а не иначе, полезно разобраться предварительно, а зачем вообще писал Евклид свои "Начала", и с какой целью изучали их его современники.

Мы уже упоминали, что практические приложения науки в эпоху Евклида, в эпоху развитого рабовладения, подорвавшего уважение к труду, не считались ни важным, ни нужным делом. Поэтому прикладной стороне математики, возможности практического применения доказанных лемм и теорем Евклид специально и демонстративно не уделяет никакого внимания. Его цель — в другом. Евклид ставил своей задачей развить в читателях логику и (частично) эстетические чувства. Трактат Евклида предназначен для тренировки ума в логических построениях и для воспитания чувства прекрасного (от созерцания идеальных геометрических форм). А раз так, то, действительно, зачем же Евклиду было стремиться к простоте и доступности изложения? Чем труднее изложение, — тем лучше протекает тренировка разума в логике, лишь бы само изложение было безупречно логично и эстетически совершенно. И недаром завершает трактат Евклида книга о правильных многогранниках — тетраэдре, октаэдре, кубе, икосаэдре и додекаэдре — самых эстетически прекрасных объектах геометрии.

В английских частных школах XVIII—XIX веков, воспитывавших джентльменов, учили школьников по дословным переводам Евклида не для того, чтобы они потом хорошо вычисляли площади и объемы — этим джентльмены не занимались, — а для того, чтобы школьники на примере геометрии учились логике рассуждения, для того, чтобы они потом могли красноречиво и логично выступать в суде, в администрации, в парламенте — ради этого и учили будущие английские джентльмены трудные "Начала" Евклида.

Что же касается Алексея Николаевича Крылова, то он рассматривает математику совсем с другой стороны, он видит в математике орудие решения прикладных задач, которые ставит жизнь, и считает, что именно этому надо обучать школьников. А как раз решению практических задач Евклид не учит (мы уже рассмотрели, почему не учит), и поэтому А. Н. Крылов отрицательно относился к тому, чтобы в школах математика изучалась "по Евклиду". Современная школа, в общем, пошла за А. Н. Крыловым: наши школьные программы все больше отходят от традиций Евклида, и это не случайно.

Дело в том, что на пути к строгости изложения греки принесли слишком много тяжелых жертв. Стремясь избавиться от парадоксов актуальной бесконечности, они не только закрыли себе путь к построению дифференциального и интегрального исчисления, но и должны были при доказательстве любой теоремы о площадях и объемах криволинейных фигур и тел прибегать к длинному, сложному и скучному "методу исчерпывания". Стремясь избавиться от парадокса несоизмеримости, греки должны были излагать понятия алгебры на чисто геометрическом языке. Даже для уравнений второй степени это отягощало и делало крайне громоздким изложение решения, а уравнения третьей и высшей степеней практически так и остались недоступными.

Жертвы, принесенные греками на алтарь строгости, были тяжелы, но к эпохе жизни Евклида сложились прочные убеждения в их необходимости. Мы уже упоминали, что о жизни Евклида не сохранилось достоверных биографических сведений. Сохранилось лишь несколько анекдотов, которые, по всей вероятности, отражают не реальные факты жизни Евклида, а общие представления людей того времени о математике и математиках.

В одном анекдоте рассказывается, что царь Птолемей, современник и покровитель Евклида, спросил: неужели и ему, царю, для изучения геометрии нужно проходить столь долгим и трудным путем изучения лемм и теорем, непонятно как связанных друг с другом? На что Евклид, по преданию, гордо ответил, что в математике и для царей не существует легкого пути. Возможно, что в анекдоте этом отразилось недоумение не одного царя Птолемея, но и многих греков — зачем, почему математики излагают свою науку столь сложно и трудно, а также и твердая уверенность современных Евклиду математиков в том, что другого стиля изложения в настоящей науке нет и быть не может.

В другом анекдоте говорится о том, как ученик спросил у Евклида, какая польза может быть от изучения геометрической теории? Евклид якобы отвечал: "Раб, дай ему скорее обол (мелкую монету). Подумать только! Этот несчастный думает, что из геометрии можно извлечь какую бы то ни было практическую пользу". Этот анекдот тоже хорошо отражает мнение современников Евклида о практической значимости его науки.

Трактат Евклида подвел итоги развитию математики в самостоятельных греческих городах-полисах, но сам Евклид принадлежал к новой эпохе, эпохе эллинизма, когда после походов Александра Македонского в 336—323 гг. до н. э. потеряли прежнюю самостоятельность города-полисы, но зато возникли новые эллинистические государства: Птолемеев на территории Египта, Селевкидов на территории Двуречья и ряд других. В новых эллинистических государствах уже не существовало демократии, деспотическая власть принадлежала царям, но наукам и искусству многие из царей покровительствовали. Особенно надо отметить царей из династии Птолемеев. Основателем династии был Птолемей I, полководец Александра Македонского; после смерти в 323 г до н. э. своего повелителя Александра он превратил Египет в самостоятельное царство, где династия Птолемеев царствовала почти 300 лет (последней царицей этой династии была Клеопатра, и после ее гибели в 31 г. до н. э. Египет был превращен Октавианом Августом в провинцию римской империи). Еще Птолемей I основал в новой столице Египта — Александрии — особое учреждение Мусейон (дом муз), в который были приглашены многие видные ученые того времени. Мусейон субсидировался государством, и ученые получали жалование. По сути дела, это был прообраз нынешних научно-исследовательских институтов. Покоренный греками Египет продолжал жить во многом своей жизнью, но в городах — и, прежде всего, в многолюдной Александрии — жило много греков, говорили по-гречески, и традиции греческой культуры успешно развивались на новой, египетской почве.

В эпоху эллинизма греческая наука приобретает новые черты, наука начинает субсидироваться государством, появляются библиотеки (крупнейшая из них — библиотека при Мусейоне в Александрии — насчитывала до 700 тысяч рукописей), вокруг Мусейона формируется Александрийская научная школа — группа ученых, объединенных общими взглядами и общими традициями. К Александрийской школе (первой в истории научной школе) принадлежал и Евклид, ее традициям следовал он при написании "Начал", и, разбирая "Начала", мы уже рассмотрели основные из этих традиций: выдвижение на первый план безукоризненной строгости, геометрический стиль изложения, отказ от "актуальной бесконечности". Этим традициям следовал не только Евклид, но и другие математики Александрийской школы, наиболее выдающимися из которых были Аполлоний (265—170 гг. до н. э.) и Архимед (287—212 гг. до н. э.). Работы Аполлония посвящены, в основном, коническим сечениям — эллипсу, параболе и гиперболе, свойства которых Аполлоний с удивительным искусством выводит чисто геометрически, не пользуясь никакой алгебраической символикой, еще неизвестной в то время.

Более широкий круг вопросов рассматривался в математических работах Архимеда — одного из наиболее разносторонних и гениальных ученых всех времен. О самом Архимеде мы знаем несколько больше, чем о других математиках древности. Известно, что он родился в 287 году до н. э. в богатом торговом городе Сиракузы в Сицилии, где и провел бóльшую часть жизни, до 212 года до н. э., когда родной город Архимеда был взят римлянами, а сам

Архимед убит при штурме. Архимед много раз бывал в Александрии, пользовался ее библиотекой и был в дружеской переписке с александрийскими учеными. Наиболее известны работы Архимеда в области физики ("закон Архимеда" в гидростатике), изобретенные им машины, — например, "Архимедов винт" для подъема воды, а также многочисленные военные машины, которые построил Архимед в трудную пору, когда его родной город был осажден римлянами.

Вот что пишет об этом Плутарх: "римляне напали с двух сторон, и сиракузяне растерялись и притихли от страха, полагая, что им нечем сдержать столь грозную силу. Но тут Архимед пустил в ход свои машины, и в неприятеля, наступавшего с суши, понеслись всевозможных размеров стрелы и огромные каменные глыбы, летевшие с невероятным шумом и чудовищной скоростью, сокрушавшие все на своем пути и приводящие в расстройство боевые ряды. А на римские суда вдруг стали опускаться укрепленные на стенах брусья и либо топили суда силою толчка, либо, схватив железными руками или клювами, наподобие журавлиных, вытаскивали суда носом вверх из воды, а потом, кормою вперед, пускали ко дну". Далее Плутарх рассказывает, что командовавший римлянами Марцелл отказался от приступов и перешел к блокаде города, поскольку "римляне были запуганы до крайности и, едва заметив на стенке веревку или кусок дерева, поднимали крик и пускались наутек в полной уверенности, что Архимед наводит на них новую машину". В дальнейшем жители Сиракуз настолько уверовали в могущество машин Архимеда, что проявили беспечность, и город был взят внезапной ночной вылазкой. Архимед, как мы уже отмечали, погиб при штурме.

Изумительные военные машины Архимеда в наибольшей мере запечатлелись в памяти современников, но и в области математики Архимед сделал очень много. Так, например, им были найдены площади круга и параболических сегментов, объемы шара, эллипсоида, сегментов шара. В сочинениях Архимеда все найденные им зависимости для площадей и объемов доказываются строго геометрически, — т. е. доказывается, например, методом исчерпывания, по Евдоксу, что разность между объемом шара и величиной $\frac{4}{3}\pi r^3$ может быть сделана сколь угодно малой, но откуда берется сама величина $\frac{4}{3}\pi r^3$ — не поясняется. Но для того, чтобы доказывать, что разность между объемом шара и величиной $\frac{4}{3}\pi r^3$ может быть лишь сколь угодно малой, нужно предварительно найти эту величину. И поскольку Архимед нашел не только объем шара, но и многих других тел (а также площади целого ряда фигур), становится ясно, что он владел способом, позволяющим находить (а не только доказывать) формулы для площадей и объемов. Но в чем состоял этот способ, долгое время оставалось неясным. И лишь в XX веке была найдена новая рукопись Архимеда — письмо к его другу Эратосфену "О методе". В этом письме Архимед частично раскрывает свой метод отыскания площадей и объемов. Письмо это было найдено приват-доцентом Петербургского университета Пападуло-Керамевсом среди старых рукописей в одном из иерусалимских монастырей. После опубликования в 1906 году этого письма стало ясно, почему Архимед не афишировал свой метод, раскрыл его только в письме к другу, которое оставалось неизвестным последующим поколениям математиков и было найдено лишь случайно. Дело в том, что метод Архимеда был нестрог. Он рассматривал фигуры, как состоящие из бесконечно большого числа элементарных малых частей, и свойства частей искусно переносил на фигуру в целом. Фактически метод Архимеда использовал актуальную бесконечность и был зародышем интегрального исчисления, но этот зародыш развития не получил. Не желая выслушивать упреков в нестрогости и недоказательности своих рассуждений от изощренных в логике насмешливых математиков Александрийской школы, Архимед не раскрывал методов, которыми он фактически находил интересующие его площади и объемы. Архимед публиковал лишь наименее важную, заключительную часть своего исследования — педантично-строгие доказательства по Евдоксу. В результате, самое важное в работах Архимеда — его метод, предвосхитивший позднейшую методику интегрального исчисления, — не получил широкого распространения и поэтому в дальнейшем оказался прочно забыт и был заново открыт математиками Нового времени лишь 1800 лет спустя.

Так традиции, сложившиеся в греческой математике, оказались тормозом на пути дальнейшего развития науки. И нельзя считать случайностью, что после Евклида, Аполлония, Архимеда в греческой математике наблюдается постепенный спад.

Еще не раз появлялись выдающиеся математики. Так, во II—III веках до н. э. работали Диокл и Никомед — их имена мы встречаем сейчас в названиях изучаемых ими кривых — циссоида Диокла (или Диоклеса, если следовать латинскому написанию его имени) и конхоида Никомеда. В I веке нашей эры в Александрии жили Герон (с его именем связана известная "формула Герона" для вычисления площади треугольников) и Менелай, работавший в области сферической тригонометрии. К III веку относятся оригинальные арифметические работы Диофанта, лежащие вне основного русла развития греческой математики (они посвящены не фигурам, а числам и уравнениям). В IV—V веках развивалась деятельность Паппа Александрийского, женщины-математика Ипатии (370—415 гг.), философа и математика Прокла (410—485 гг.). Именно по дошедшим до нас комментариям Прокла к I книге

"Начал" Евклида, в которых Прокл дает краткий обзор истории геометрии до Евклида, мы имеем возможность составить представление о математических работах Фалеса Милетского и других математиков — предшественников Евклида, чьи рукописи погибли и до нас не дошли. Так что выдающиеся ученые были, но в целом греческая математика после великих свершений Евклида, Архимеда и Аполлония постепенно снижает свой уровень и вырождается.

История греческой математики дает нам возможность проследить не только рост, но и деградацию определенной области науки. За последние столетия наука почти беспрерывно растет и развивается, мы отвыкли связывать между собой такие понятия, как "наука" и "деградация", и тем поучительнее для нас изучение истории греческой науки, и в том числе истории постепенного падения греческой математики.

Часто падение греческой математики объясняют внешними причинами — экономическими трудностями в приходящих в упадок эллинистических государствах, постепенно попадавших под эгиду Рима, влиянием христианской церкви и т. п. Эти объяснения не выдерживают критики. Переход под власть Рима, в конечном счете, не только не подорвал, но упрочил благосостояние многих греческих городов. Александрия оставалась процветающим городом и греческим культурным центром вплоть до ее завоевания арабами в 641 году н. э., — т. е. после смерти Архимеда у математиков Александрийской школы было в распоряжении более 800 лет свободного развития, и если за эти 800 лет математика падала ниже и ниже, то причина, во всяком случае, лежит не в уровне благосостояния.

Ссылаются в оправдание упадка греческой математики и на влияние христианской церкви. Но церковь вовсе не была враждебна к греческой науке вообще. К философии Платона и неоплатоников, к логике Аристотеля христианская церковь относилась с полным вниманием, развивала и продолжала их работы (разумеется, уже в своем духе). Единственный пример враждебности церкви к конкретному математику — гибель женщины-математика Ипатии, растерзанной в Александрии в 415 году н. э. озверелой толпой, науськанной александрийским епископом Кириллом — является исключением, а не правилом.

Нет, греческая математика погибла вследствие не внешних, а внутренних причин. Мы уже указывали, что греческие математики Александрийской школы развивали науку, не обращая внимания на ее приложения, а просто как безупречно строгое упражнение в логике и эстетике. Фактически они превратили математику в интеллектуальную игру, и поэтому не следует удивляться, что греческую математику постигла жестокая судьба всех игр: со временем игра надоела и ее забросили.

Заметим, что судьба греческой математики отличается от судеб других ветвей античной науки. Такие науки, как астрономия, медицина успешно, развивались во времена Римской империи, в первые века нашей эры и стали приходить в упадок лишь много позже, когда уже весь античный мир начал распадаться под ударами варварских племен, которые, начиная с III века н. э., усилили свой натиск на Западную Европу.

Античный мир пал во многом потому, что его наука, несмотря на отдельные достижения, еще не успела стать силой, способной повлиять на исход военных столкновений. Действительно, во многом ли отличалась военная техника варварских племен, сокрушивших западную Римскую империю в V веке, от военной техники самих римлян? Отличалась, но очень не на много. Исход столкновения решала численность войск, а варвары были многочисленнее.

Наука могла бы изменить это положение. На примере обороны Сиракуз, организованной Архимедом, мы помним, какой великой силой даже в те далекие времена становилась наука тогда, когда математические методы ложились в основу проектирования военных машин. Но даже великий Архимед был не в силах в одиночку противостоять тенденциям своего времени, которые властно толкали математику подальше от приложений и ради достижения строгости превращали ее в интеллектуальную игру. Мы помним, что Архимед даже не решился опубликовать методы, которыми он пользовался, не желая выслушивать упреков в нестрогости, и методы его погибли вместе с ним. Другие математики имели еще меньше сил и возможностей противостоять традициям Александрийской школы, и эти традиции неминуемо вели к упадку, а затем и к гибели античной математики; возродилась она много позже.

Глава 2

Возрождение математики в Западной Европе

В V веке нашей эры западная Римская империя пала под натиском варварских племен. Нашествие варваров привело к упадку культуры. Если в Римской империи грамотность была правилом, и даже пароль в армии давался в письменном виде, то в V—XII веках грамотность в Западной Европе была редчайшим исключением, грамотны были священники, да и то не все.

На многие века Западная Европа перестала быть центром передовой науки, в том числе и математики. В VII—XII веках традиции греческой математики, забытой в Западной Европе, были подхвачены арабами. В тот период именно в странах ислама переводились на арабский язык творения греческих ученых, рождались новые математические идеи, в частности — в области алгебры. Между прочим, само слово "алгебра" происходит от арабского "аль-джебр": арабы называли так правила переноса членов из правой части уравнения в левую, и наоборот, с учетом знаков.

В XIII веке нашествие монгольских завоевателей разорило большинство стран ислама. Одновременно в Западной Европе постепенно развивается хозяйство, повышается материальное благосостояние, растут многочисленные города, появляется интерес к культуре и науке. Центрами науки в Западной Европе стали университеты. В XII веке появились первые университеты Европы — в Болонье (около 1100 г.), затем в Париже, Оксфорде (Англия). В 1348 году был основан университет в Праге, в 1364 году — в Кракове, в 1365 году — в Вене, в 1385 году — в Гейдельберге, в 1409 году — в Лейпциге, в 1469 году — в Базеле. Крупнейшим университетом был парижский, в котором временами училось до 20 тысяч студентов.

Структура средневекового университета копировала цеховую структуру средневекового города. Ремесленники города делились на цехи. Были цехи суконщиков, каменщиков, плотников, пекарей и т. п. Производить изделия на продажу разрешалось только полноправным членам цеха — мастерам, которым помогали подмастерья. Подмастерья, а тем более посторонние, не члены цеха, к самостоятельной работе не допускались. Стать мастером можно было, лишь проучившись несколько лет в подмастерьях, а главное — нужно было изготовить образцовое изделие — шедевр — и предъявить его товарищам по цеху. Лишь после одобрения шедевра (и после пирушки, задаваемой товарищам по цеху) подмастерье делался полноправным мастером.

Университеты копировали цеховую организацию. Преподавать имели право лишь лица, имевшие степень магистра, а для того чтобы стать магистром, надо было написать диссертацию и публично защитить ее перед коллегией магистров университета.

Интересно, что во всех других сферах деятельности цеховая структура исчезла, а в науке она сохранилась до наших дней. Защита диссертации, ученые степени (магистра, доктора, много позже — кандидата наук) — все это идет от средневековых ремесленных цехов.

Организация преподавания в большинстве университетов была сходной: университет состоял из четырех факультетов — искусств, богословия, права и медицины. Студенты — обычно подростки — поступали сперва на факультет искусств, где учились шесть лет, после чего имели право перейти на один из старших факультетов, где они уже окончательно специализировались по богословию, праву или медицине[2]. Математике, наряду с грамматикой, риторикой и т. п. обучали на факультете искусств, обычно в объеме первых книг "Начал" Евклида и основ сферической астрономии, оптики и теории движения планет. Отдельных кафедр математики не было, не существовало долгое время и преподавателей, специализирующихся на преподавании математики. По-видимому, первым преподавателем, специализирующимся на математических науках, стал магистр Венского университета Иоганн из Гмундсена (1380—1442).

Математика в средневековых университетах следовала традициям греческой математики и, прежде всего — традициям Евклида. Основное внимание направлялось на логические рассуждения и доказательства, особое внимание университетские схоласты уделяли парадоксам конечного и бесконечного, свойствам бесконечных рядов — так, например, Н. Орем (1323—1382) установил расходимость гармонического ряда $I+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$. При этом вопросы применения математики университетских профессоров того времени интересовали мало — для них математика была, прежде всего, упражнением в логике. Поэтому параллельно с университетской математикой развивалась математика практическая, искусство вычисления, которое необходимо было купцам и менялам той эпохи. Выдающимся представителем вычислительной математики был Леонардо Пизанский (1180—1240), известный также под именем Фибоначчи. Отец его торговал и в Алжире, где Леонардо учился у учителей-арабов. Мы уже упоминали, что в XII—XIII веках именно арабы располагали наиболее глубокими математическими знаниями. В основном труде Леонардо "Книга абака" (абак — это счетная доска, распространенная в то время) систематизированы, прежде всего, достижения арабской вычислительной математики, к которым Леонардо сумел прибавить также и много собственных результатов.

Прежде всего Леонардо доказывает преимущества десятичной позиционной нумерации, которую сам он называл "индийской"; впоследствии ее стали называть арабской нумерацией. Именно после книги Леонардо начинается победоносное шествие арабских цифр по Западной Европе, которая до этого пользовалась неудобными "римскими" цифрами. Далее Леонардо излагает правила умножения и правило проверки результата по остатку от деления на девять сумм цифр сомножителей, излагает правила деления и признаки делимости на 2, 3, 5, 9, а также правила действий со смешанными числами и дробями.

Помимо арифметических действий Леонардо описывает приемы решения задач коммерческой арифметики, основанные на пропорциях, тройном правиле и его обобщениях, правила раздела суммы пропорционально паям участников и т. п., приводит знаменитую задачу о наименьшем числе гирь, с помощью которых можно взвесить все целые веса, меньшие некоторого заданного (и дает решение — гири должны иметь вес, пропорциональный степеням тройки — 1, 3, 9, 27 и т. д.). Отдельно рассмотрены у Леонардо правила суммирования некоторых рядов — арифметической и геометрической прогрессий, ряда квадратов и названного впоследствии его именем знаменитого возвратного "ряда Фибоначчи": $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$. Отметим, что к изучению этого ряда привела Леонардо Фибоначчи практическая задача о вычислении потомства пары кроликов. Далее в трактате Леонардо рассматриваются многочисленные задачи из купеческой практики, сводящиеся к решению систем линейных уравнений и к квадратным уравнениям.

Таким образом, мы убеждаемся, что уже к XIII веку купеческие города Италии нуждались в довольно высоком уровне прикладных математических знаний, которые использовались купцами и менялами в их повседневной практике. Появилась потребность в преподавателях математики; излагая купцам элементарные методы вычислений, сами преподаватели работали над более сложными задачами. Так, например, преподавателем математики в Риме, Милане, Болонье и других городах был Лука Пачоли (1445—1515), современник и друг Леонардо да Винчи, изобретатель двойной ("итальянской") бухгалтерии. В его работах начинает постепенно широко использоваться алгебраическая символика. Излагая методы решения квадратных уравнений, Пачоли отметил, что для решения кубических уравнений вида: $x^3 + ax = b$ "искусство алгебры еще не дало способа, как не дан еще способ квадратуры круга" (подразумевалось, естественно, не решение уравнений третьей степени путем последовательных итераций, а решение в радикалах). Однако спустя лишь несколько десятилетий итальянцы Сципион дель Ферро (1456—1526), Николо Тарталья (1500—1557), Джироламо Кардано (1501—1576) и Луиджи Феррари (1522—1565) — кстати, все они были преподавателями математики — нашли решение в радикалах уравнений не только третьей, но и четвертой степени.

Первым нашел частные случаи решения уравнений третьей степени Сципион дель Ферро, однако он, не публикуя решения, сообщил его своему ученику Фиору, который использовал решение Ферро для выступления на математических турнирах, которые тогда были в моде. На одном из турниров, состоявшемся в 1535 году, Фиор встретился с Тартальей. Перед турниром Тарталья самостоятельно нашел правило решения, решил все задачи Фиора и вышел победителем турнира. Тарталья хранил свое правило в тайне и лишь под большим секретом сообщил его Кардано. Кардано самостоятельно нашел доказательство формул Тартальи, после чего счел себя вправе опубликовать их в 1545 году в своей книге "Великое искусство, или об алгебраических правилах", упомянув, впрочем, об авторстве Тартальи. Вот отрывок из книги Кардано "Великое искусство" (цитирую по работе Гутер Р. С., Полунов Ю. Л. Джироламо Кардано. — М.: "Знание", 1980): "В наше великое время Сципион дель Ферро открыл формулу (подразумевается формула для решения неполного кубического уравнения. — *Ю. П.*)… Так как подобное искусство превосходит все человеческое остроумие и всю ясность ума смертного, то его нужно рассматривать как подарок небесного происхождения… Это настолько славное открытие, что от того, кто мог его достигнуть, можно ожидать, что он достигнет всего. Соперничая с ним (со Сципионом дель Ферро. — *Ю. П.*) Николо Тарталья из Брешии, наш друг, решил ту же самую проблему и после долгих просьб передал ее мне".

Мы видим, что авторство Тартальи оговорено, и все же, несмотря на это, за правилом решения кубичного уравнения в радикалах закрепилось название "формула Кардано". В той же книге было опубликовано найденное учеником Кардано — Феррари — правило решения уравнений четвертой степени. Формулы Кардано послужили поводом к исследованию и постепенному введению в математическую практику мнимых и комплексных чисел, — как известно, именно в том случае, когда кубичное уравнение имеет три действительных корня, они по формулам Кардано выражаются через корни из комплексных чисел.

Решение уравнений 3-й и 4-й степеней, недоступное ни математикам Древней Греции, ни математикам стран ислама, подчеркивало, что к XVI веку передовое место в науке прочно перешло к Западной Европе. Научные достижения опирались, прежде всего, на достижения экономические. В то время как страны Восточной и Центральной Европы, Западной Азии в XIII—XV веках терпели разорение от нашествий татаро-монголов, а затем турок, в избавленной от нашествий Западной Европе быстрыми темпами развивалась экономика, которая стала предъявлять все новые и новые требования к уровню математических знаний. С XV века, с путешествий Колумба и Васко да Гамы, начинается эпоха великих географических открытий. Суда государств Западной Европы начинают бороздить моря и океаны. Появляется острая потребность в точной картографии, в методах навигации, а эта потребность в свою очередь стимулирует развитие тригонометрии, как плоской, так и сферической. Тригонометрией занимались немецкий математик Иоганн Мюллер (1436—1476) по прозвищу Региомонтан, вычисливший в частности, таблицы синусов и тангенсов с семью десятичными знаками, и великий польский астроном Николай Коперник, составивший еще более точные таблицы. Необходимость в обширных вычислениях подготовила почву для изобретения логарифмов, что и сделали независимо друг от друга шотландец Джон Непер (1550—1617) и швейцарец Иост Бюрги. Наибольшее распространение и популярность получила книга Непера "Описание удивительной таблицы логарифмов", изданная в Эдинбурге в 1614 году. В ней содержались вычисленные Непером логарифмы синусов и косинусов от 0 до 90° с интервалом в одну угловую минуту с семью десятичными знаками. Логарифмы Непера и Бюрги были близки к тому, что мы сейчас называем натуральными. Десятичные логарифмы были введены англичанином Генри Бригсом (1561—1631); в 1617 году он опубликовал таблицу десятичных логарифмов чисел от 1 до 1000 с четырнадцатью знаками.

Идея логарифмической линейки была впервые предложена Уингейтом в книге, вышедшей в 1624 году. К 1630 году У. Отред (1575—1660) и независимо от него Р. Деламей изготовили хорошо работающие экземпляры линеек. В 1654 году Р. Биссакер, тоже англичанин, усовершенствовал линейку, введя скольжение одной шкалы в пазах другой. После этого логарифмическая линейка приняла практически современный вид.

Возникнув как средство облегчения вычислений, логарифмы дали затем мощный импульс развитию теоретической математики, доставив пример новой функциональной зависимости — логарифмическую функцию.

Вообще математика в Западной Европе к XVI—XVII векам пошла по совершенно другому пути, чем математика Древней Греции. Ученые Западной Европы XVI—XVII веков — это, прежде всего, инженеры, изобретатели, астрономы, философы; к математическим задачам их толкала настоятельная потребность снять вставшие перед ними практические проблемы, что они и делали в тесном контакте с мастерами и ремесленниками того времени. Решение практических задач открывало новые математические объекты, которые становились предметом дальнейшего изучения, в свою очередь, стимулируя теоретическую мысль. Рассмотрим характерный пример, связанный с работами Христиана Гюйгенса (1629—1695). Началом послужила одна из важнейших практических задач XVII века — усовершенствование маятниковых часов. Было подмечено, что период колебаний простого кругового маятника зависит от размаха и не позволяет ему быть точным измерителем времени. А между тем именно в это время точные часы были очень нужны — прежде всего для целей навигации. Широту в XVII веке уже умели определять довольно точно, измеряя высоту над горизонтом небесных светил. Теоретически долготу любого места в ходе плавания можно вычислить путем сравнения местного времени, определяемого по кульминации Солнца или звезд, со временем пункта отправления — если только это время достаточно точно хранят хорошие часы. В качество часов долгое время все и упиралось — обычные маятниковые часы, в которых центр тяжести маятника движется по окружности, нужной точности не обеспечивали, особенно в условиях качки корабля. Лучше других это понимал Христиан Гюйгенс, соединивший в своем лице талант изобретателя, выдающегося часового мастера с талантом математика. Гюйгенс предложил и разработал несколько остроумных конструкций маятниковых часов, повышающих точность, и он же заметил, что главным препятствием к дальнейшему увеличению точности служит принципиальное свойство обычного маятника — зависимость периода колебаний от их амплитуды. На качающемся корабле не удавалось сохранить постоянную амплитуду колебаний, и часы неизбежно теряли точность. Гюйгенс поставил интереснейшую задачу — по какой кривой (вместо окружности) должен двигаться центр тяжести маятника для того, чтобы период колебаний не зависел от амплитуды. И он нашел эту кривую — с помощью удивительно остроумных рассуждений, приведенных в его трактате "Маятниковые часы", опубликованном в 1673 году (трактат этот переведен на русский язык и издан в составе книги: Гюйгенс X. Три мемуара по механике. — изд. Академии Наук СССР, 1951). Искомая кривая оказалась циклоидой — кривой, которую описывает закрепленная точка окружности, катящейся по прямой без скольжения. Заметим, что сам Гюйгенс более живо определял циклоиду: это та кривая, "которую описывает в воздухе гвоздь, вбитый в обод колеса, при его качении". Как раз незадолго до этого в работах учеников Галилея Вивиани и Торричелли эта кривая была впервые описана; название "циклоида" было придумано самим Галилеем.

В те же годы вообще многие ученые интересовались свойствами различных кривых, свойствами касательных к этим кривым, свойствами эволют и эвольвент, поскольку было замечено, что новые кривые обладают неожиданными и часто полезными свойствами. Так, циклоида оказалась полезной при создании точных часов. Однако как заставить центр тяжести маятника двигаться точно по циклоиде? Гюйгенс нашел оригинальное решение: пусть нить подвеса маятника колеблется между двух "щек", изогнутых по кривым — эволютам циклоиды (рис. 2.1). Для того чтобы правильно изогнуть "щеки", нужно было эти кривые — эволюты циклоиды — найти. Гюйгенс нашел их, создав по пути саму теорию эволют и эвольвент. Эта теория позволила Гюйгенсу построить часы, в которых центр тяжести маятника двигался по циклоиде, в результате чего период колебания перестал зависеть от амплитуды.

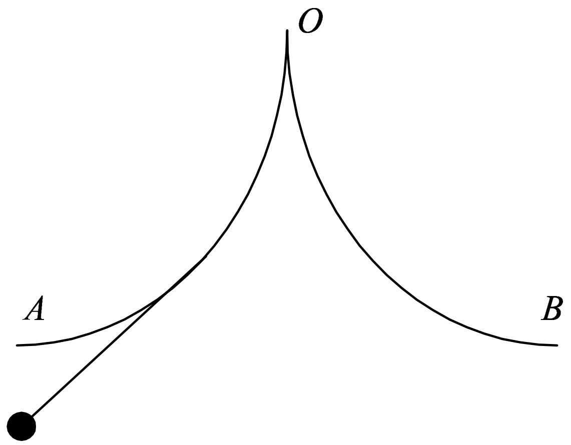


Рис. 2.1. Маятник Гюйгенса. *AO* и *OB* — направляющие щеки, изогнутые по дугам эволют циклоиды

Хотя в дальнейшем часовая техника пошла по несколько другому пути, и циклоидный маятник Гюйгенса был заменен более совершенными устройствами, работа Гюйгенса с особенной наглядностью показала пользу соединения математики и практики, плодотворность применения математических методов и теорем к решению конкретных технических задач. Это была новая черта математики Западной Европы XVII века, коренным образом отличающая ее от математики Древней Греции, которая была, прежде всего, "интеллектуальной игрой".

Изучение кривых, их эволют и эвольвент, касательных и нормалей, вычисление длины различных кривых и площади фигур, ими ограниченных, стало серьезным и важным делом и привлекло внимание многих ученых. Развернулись поиски методов, позволяющих находить касательные и вычислять площади не для одной конкретной кривой или фигуры, а для целых классов их, и эти поиски вскоре привели, как мы увидим, к построению основ дифференциального и интегрального исчисления.

Вот что писал об этом синтезе технических задач и математических методов решения Христиан Гюйгенс в 1673 году, в предисловии к своим мемуарам "Маятниковые часы, или геометрические доказательства, относящиеся к движению маятников, приспособленному к часам": "При помощи геометрии я нашел новый, до сих пор неизвестный, способ подвешивания маятников. Я исследовал кривизну некоторой кривой, которая удивительнейшим образом подходит для обеспечения равенства времени качания маятника. После того как я заставил маятник качаться по этой кривой, ход часов стал чрезвычайно правильным и надежным, как показали испытания на суше и на море. Эта кривая — та, которую описывает гвоздь, вбитый в обод колеса при его качении. Математики нашего времени называют ее циклоидой; из-за разных других ее свойств она исследовалась многими, а мною — ввиду ее пригодности для измерения времени, которую я обнаружил, исследуя ее по строгим методам науки и не подозревая еще ее применимости. Для применения моего изобретения к маятникам мне необходимо было установить новую теорию, а именно теорию образования новых линий при посредстве развертывания кривых" (на современном языке — это теория эволют и эвольвент). "Здесь я, — продолжает Гюйгенс, — столкнулся с задачей сравнения длины кривых и прямых линий. Я изучал этот вопрос несколько долее, чем нужно было для моей цели, так как теория показалась мне изящной и новой. Я показал полезность применения в часах сложного маятника. Для изучения его природы я должен был произвести исследование о центре качения… Я доказал при этом ряд теорем относительно линий, площадей и тел… Но всему этому я предпосылаю описание механического устройства часов и применения маятника в форме, оказавшейся наиболее удобной для астрономических целей".

На примере цитированных мемуаров Гюйгенса особенно ярко видна основная особенность стремительно развивающейся математики XVI—XVII веков — она начинает с решения конкретных практических задач, восходит к теоретическим обобщениям, а обобщения эти применяет для решения новых задач. Именно тесная связь с практикой, соединение в одном лице математика с философом, инженером, астрономом обеспечило бурное развитие математики Западной Европы, в короткий срок перекрывшей самые выдающиеся достижения греческих ученых.

Заметим, что в XVI—XVII веках переводятся на латынь и печатаются в Западной Европе труды Евклида, Архимеда, Аполлония, Паппа (в то время и вплоть до XIX века латынь была международным языком науки, и это облегчало общение ученых). В этих трудах математики Западной Европы смогли почерпнуть новые идеи, которые стали отправной точкой их собственного творчества. Труды великих греков переводят, оживленно обсуждают — и это после того, как в течение многих веков рукописи великих греческих математиков пылились никому не нужные на самых дальних полках библиотек Византии; теперь наступила их вторая жизнь. Возрождение античной математики в Западной Европе связано с тем, что методы строгого дедуктивного рассуждения Евклида и его последователей были включены как составная часть в гораздо более богатый и разнообразный арсенал методов, которыми пользовались математики XVI—XVII веков. Они были людьми, тесно связанными с практикой, с ее потребностями и не колебались (в отличие от древних греков) использовать для решения математических задач методы неполной индукции — ее как раз на грани XVI—XVII веков горячо пропагандировал Ф. Бэкон (1561—1626), а также такие методы, как аналогия, простая догадка, проверка на конкретных числовых примерах. Добавление к этим методам строгого дедуктивного рассуждения, так блестяще разработанного в Древней Греции, дало математике новый могучий импульс развития.

Таким образом, история показывает нам, что превратившаяся в чисто теоретическую науку математика Древней Греции хирела и постепенно погибла. В отличие от нее, наука Западной Европы XV—XVII веков сумела соединить интерес к теории с решением практических задач, и этот синтез теории и практики стал основой дальнейшего развития математики.

Изменился и стиль изложения математических книг. Долгие века считался образцовым стиль Евклида: сначала — определения и постулаты, затем — цепочка теорем и их доказательства. Стиль Евклида был настолько популярен, что Б. Спиноза (1623—1677) даже свой знаменитый трактат по этике написал "по Евклиду", в виде цепочки теорем (трактат Спинозы так и назывался: "Этика, доказанная геометрическим путем"; в современных переводах его называют просто "Этика").

Началом нового стиля можно считать опубликованную в 1637 году "Геометрию" Р. Декарта (1596—1650). Эта работа, заложившая, кстати, основу современной аналитической геометрии, написана уже как сплошное связное изложение, без разделения на теоремы, но с четкими подзаголовками, ясно указывающими, что полезного принесет читателю тот или иной раздел книги. Вот первые подзаголовки знаменитой книги Декарта: "Как исчисление арифметики относится к построению геометрии?", "Как следует получать уравнения, служащие для решения задач?", "Как они решаются?"

Декарт не пренебрегает доказательствами, его утверждения доказаны, но стиль изложения Декарта подчеркивает практическую направленность математического исследования. Изложив первые понятия зарождающейся аналитической геометрии, Декарт сразу указывает, что эти понятия имеют ценные практические приложения, в частности, в оптике, при выборе формы линз для появившихся как раз в то время зрительных труб.

И вряд ли можно считать случайностью, что турецкое нашествие, поглотившее в XV веке Византийскую империю и страны Балканского полуострова, в XVI веке — Венгрию и Северную Африку, в XVII веке было победоносно отбито Западной Европой. Важную роль сыграло превосходство европейской артиллерии. Конечно, не нужно делать упрощенного вывода: "европейская артиллерия была лучше потому, что высокого уровня достигла европейская математика". Превосходство европейской артиллерии слагалось из многих факторов, но к числу их следует отнести и разработки математиков XVI—XVII веков по баллистике. Так, например, уже упоминавшийся нами итальянский математик Николо Тарталья, помимо решения кубичного уравнения, известен и работами по баллистике. Именно он, например, доказал впервые, что наибольшую дальность полета пушечного ядра обеспечивает угол подъема ствола, равный 45 градусам.

Сыграло свою роль в отражении турок и превосходство европейской оптики — над совершенствованием ее, над расчетами зрительных труб работали Галилей, Кеплер и Декарт, несколько позже — Ньютон.

Выбирая свой стиль изложения, столь отличный от стиля Евклида, Декарт стремился обеспечить читателю наиболее легкую, понятную и доступную дорогу к постижению математических истин, ту самую "царскую дорогу", возможность которой отрицал Евклид. В дальнейшем разные математики писали одни "в стиле Евклида", другие — "в стиле Декарта". Постепенно установилось разделение: работы по чистой математике чаще пишутся "в стиле Евклида", по прикладной математике — "в стиле Декарта"[3]. Такой известный классик прикладной математики, как А. Н. Крылов, формулируя свои результаты, вообще не употреблял слово "теорема". Конечно, никоим образом не следует делать вывода, что один стиль изложения "лучше" другого. И в "стиле Евклида", и в "стиле Декарта" написаны прекрасные книги. Все зависит от того, какую цель ставил перед собой тот или другой автор.

Вообще, в стиле изложения результатов исследований в области математики Декарт такой же новатор, как и в развитии ее основных идей. Вот что, например, писал о вкладе Декарта Ф. Энгельс ("Диалектика природы", М., 1952, стр. 206): "Поворотным пунктом в математике была декартова переменная величина. Благодаря этому в математику вошли движение и диалектика, и благодаря этому же стало немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление, которое тотчас и возникает, и которое было, в общем и целом, завершено, а не изобретено Ньютоном и Лейбницем".

К истории зарождения дифференциального и интегрального исчисления, которое именовалось первоначально "исчислением бесконечно малых", мы и переходим.

Глава 3

Зарождение и развитие математического анализа

Начиная с XVII века, математика настолько усложняется и разветвляется, что уже нет возможности в хронологическом порядке перечислять открытия, сделанные во всех ее областях. Поэтому в истории математики XVII—XVIII веков мы осветим лишь ее центральный и наиболее важный для дальнейшего развития раздел — зарождение основ математического анализа, который первоначально развивался как исчисление бесконечно малых величин.

Зарождение исчисления бесконечно малых — предшественника современного дифференциального и интегрального исчислений — было важнейшим достижением математики XVII века. Древние греки отказались в свое время ради строгости от понятия актуальной бесконечности — и это обеднило содержание их результатов. Математики XVII века были гораздо смелее. При вычислении объемов, центров тяжести различных фигур они рассматривали фигуры как суммы бесконечно большого числа бесконечно малых элементов, при построении касательных рассматривали кривую как ломаную линию с бесконечно большим числом бесконечно малых сторон.

В чем причина этой смелости? Математики XVII века хорошо знали трудности и парадоксы, подстерегавшие их при использовании понятия бесконечности. Переводы греческих авторов, писавших об этих трудностях, были им хорошо известны. Однако, в отличие от их греческих предшественников, для ученых XVII века математика была не упражнением в логике, а средством решения практических задач, выдвигаемых жизнью. Они ценили методику бесконечно малых за то, что она позволяла им получить новые и важные результаты. Они видели, что использование бесконечно малых может иногда приводить к ошибкам и парадоксам, но поскольку задачи, решаемые ими, были задачами практическими, сопоставление с опытом позволяло отсеивать неправильные решения, неправильные методы рассуждений и позволяло постепенно вырабатывать методы, свободные от ошибок.

Методы исчисления бесконечно малых развивались медленно, на протяжении всего XVII века. В работах Кеплера (1571—1630), Декарта (1596—1650), Кавальери (1598—1647), Торричелли (1608—1647), Ферма (1601—1665), Паскаля (1623—1662), Барроу (1630—1677)[4] разбирались примеры построения касательных ко многим интересным кривым, были вычислены площади и объемы многих конкретных фигур. Во второй половине века, прежде всего в работах Ньютона и Лейбница, а также их учеников и последователей — Якова Бернулли (1654—1705), его брата Иоганна Бернулли (1667—1748), Лопиталя (1661—1704) и других — исчисление бесконечно малых оформилось в единый и мощный метод исследования. Не имея возможности остановиться подробно на всех упомянутых нами предшественниках Ньютона и Лейбница, мы — помимо Декарта, о котором уже говорилось, — остановимся несколько подробнее на личности Пьера Ферма (1601—1665). По образованию Ферма был юрист, и после окончания университета в Тулузе (Южная Франция) многие годы исполнял должность советника суда. Математикой он занимался в свободное время, как увлечением, но работы его проложили новые пути во многих отраслях математики. Наиболее известны исследования Ферма по теории чисел — малая теорема Ферма, утверждающая, что для любого целого числа a разность $a^p - a$ делится на p, где p — простое число, и знаменитая "великая" теорема Ферма, доказанная полностью лишь совсем недавно. В этой теореме Ферма утверждал, что уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет решений в целых числах при натуральном $n > 2$. Запись этой теоремы сохранилась на полях принадлежащего Ферма экземпляра сочинений Диофанта. Ферма написал, что он знает доказательство этой теоремы, "но поля слишком малы, чтобы вместить его". Частные случаи ее были доказаны Эйлером для $n = 3$ и $n = 4$, Дирихле (1805—1859) для $n = 5$, Куммером (1810—1893) для всех $n \leq 100$. Более подробно историю доказательства теоремы Ферма мы рассмотрим в *главе 7*.

Не менее важными, чем исследования в области теории чисел, были работы Ферма по определению максимумов и минимумов. Одним из первых Ферма ясно осознал, что максимум или минимум достигаются там, где скорость изменения переменной величины обращается в нуль, и поэтому задачи о максимумах находятся в тесной зависимости с задачами о построении касательной. Ферма решил задачи об определении конуса и цилиндра наибольшего объема, вписанных в шар, используя уравнения, которые мы (в современных обозначениях) записали бы как

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)=0\,.$$

Таким образом, начиная с работ Ферма, математика обрела новое, необычайно богатое поле приложений — если раньше ее методы использовались лишь для вычисления, то теперь методы отыскания максимумов и минимумов стали постепенно применяться для поиска и построения оптимальных конструкций, оптимальных решений технических задач. Старая задача о построении касательной (т. е., фактически, о производной функции) наполнилась новым важным содержанием.

Теперь, опуская за недостатком места разбор работ других, кратко упомянутых нами зачинателей исчисления бесконечно малых, перейдем к рассмотрению работ корифеев — Ньютона и Лейбница.

Исаак Ньютон родился в 1642 г. в семье небогатого английского фермера и в 1661 г. поступил в Кембриджский университет, в Тринити-колледж. В те годы английские университеты сохраняли очень много средневекового. Университет делился на колледжи, объединявшие по нескольку кафедр; во главе колледжа стоял мастер. И кафедры, и колледжи создавались в основном на пожертвования частных лиц. Поэтому и возникло, например, такое положение, что Тринити-колледж долго не имел кафедры математики; она была основана в 1663 г. на крупное денежное пожертвование, внесенное Лукасом. Первым профессором лукасовской кафедры стал Барроу, учитель Ньютона. Сам же Ньютон начал свой путь в Кембриджском университете с самой низшей стадии — он поступил туда субсайзером. Студенты того времени делились на сайзеров и субсайзеров, пенсионеров и коммонеров-феллоу. Самую высокую плату вносили коммонеры. Они оплачивали не только право учения, но и некоторые привилегии, в число которых входила и такая привилегия, как право не посещать лекции. Пенсионеры оплачивали только жилье. Сайзеры и субсайзеры получали жилье и питание за счет колледжа, но часто должны были исполнять обязанности слуг. Получившие первую ученую степень (бакалавра) именовались феллоу и входили в совет колледжа.

В середине XVII века в Тринити-колледже насчитывалось 40 феллоу, 3 профессора, 30 сайзеров и субсайзеров, 144 пенсионера.

Поступивший в Тринити-колледж 19-летний Ньютон вскоре встретился там с выдающимся учителем — Исааком Барроу (1630—1677), который сам много сделал для зарождающегося исчисления бесконечно малых. Уже в 1665 г. Ньютон получает степень бакалавра, но в том же году жестокая эпидемия чумы, от которой только в Лондоне умерло около 100 тысяч человек, прерывает занятия в университете. Ньютон, подобно многим другим, спасавшимся от чумы, уезжает в деревню, где и проводит в уединении около двух лет. Это самые плодотворные годы в научном развитии Ньютона, годы формирования его научных концепций.

В эти же годы формировалось постепенно и понимание Ньютоном исчисления бесконечно малых. В основе его концепции лежало интуитивно ясное для Ньютона понятие скорости. Если тело движется равномерно, то скорость определяется делением пути на время. А если движение неравномерное? Для Ньютона было очевидно, что и в этом случае в каждый момент времени тело имеет вполне определенную скорость, и за сколь угодно малое время проходится сколь угодно малый путь. Отношение пройденного пути ко времени, за которое он пройден, дает скорость. Для того чтобы получить мгновенную скорость, надо перейти к пределу, т. е. взять "последнее отношение" приращения пути к приращению времени, когда приращение времени стремится к нулю.

Таким образом, в основе построений Ньютона лежит физическое представление о непрерывно изменяющихся текущих величинах. Их Ньютон называл флюентами (от слова *fluere* — течь) и обозначал буквами x, y, z, а скорости изменения флюент Ньютон назвал флюксиями и обозначал теми же буквами, но с точкой: $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$.

Ньютон сформулировал две основных проблемы исчисления бесконечно малых.

- ☐ Проблема 1. По данному соотношению между флюентами определить соотношение между флюксиями.
- ☐ Проблема 2. По данному уравнению, содержащему флюксии, найти соотношение между флюентами.

Если перейти к более привычному для нас языку, то флюенты Ньютона — это функции времени, а флюксии — это их производные. И тогда делается ясным, что первая проблема Ньютона — это проблема вычисления производной, а вторая проблема — это нахождение интеграла по его подынтегральному выражению, или, в более общем случае, — определение решения уравнения, связывающего производные, т. е. дифференциального уравнения. Сформулировав эти две центральные проблемы, получившие окончательное решение много позже, Ньютон тем самым дал программу дальнейшего развития математического анализа на много десятилетий вперед.

Каким же образом решал поставленные проблемы сам Ньютон? Производные (флюксии) он вычислял через предельный переход. Вот пример вычисления Ньютоном производной от функции x^n (из рукописи Ньютона, опубликованной впервые в 1704 г.): "Величина x течет равномерно. Требуется найти флюксию величины x^n". Для лучшего понимания дальнейшего текста Ньютона заметим, что малое приращение он обозначает латинской буквой o, которую не следует путать с нулем, а обозначение Ньютона $\overline{x+o}^{\,n}$ соответствует нашему $(x+o)^n$. С учетом этого читаем далее у Ньютона: "В то же время, когда величина x в своем течении обращается в $x+o$, величина x^n переходит $\overline{x+o}^{\,n}$,

т. е. в

$$x^n + nox^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}o^2x^{n-2} + \ldots \tag{1}$$

и т. д.

Приращения o и $\overline{x+o}^{\,n}$ относятся между собой, как единица относится к

$$nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}ox^{n-2}$$

и т. д.

Если теперь эти приращения исчезают, то последнее их отношение будет отношением единицы к nx^{n-1}, и поэтому флюксия величины x относится к флюксии величины x^n как единица к nx^{n-1}".

Далее Ньютон доказывает, что тем же методом последних отношений можно получить и другие флюксии. Мы убеждаемся, что метод Ньютона очень близок к тому, которым мы пользуемся и сегодня. Более сложной для Ньютона было решение второй проблемы, проблемы интегрирования. Ньютон непосредственно умел интегрировать только степенные функции, т. е. он владел формулой, которая в современных обозначениях записывается как

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c\,. \tag{2}$$

Для более сложных случаев Ньютон разлагал флюксию в ряд и интегрировал почленно. Применение разложения в ряд и почленного интегрирования является изобретением Ньютона.

Надо заметить, что мы изложили основные идеи Ньютона в области исчисления бесконечно малых, которые у самого Ньютона формировались многие годы, начиная с самых плодотворных 1665—1667 годов, которые Ньютон провел в уединении из-за эпидемии чумы. Дальнейшие годы отмечены стремительным научным ростом Ньютона и признанием его со стороны коллег. В 1668 г. он получает звание феллоу, в том же году демонстрирует королевскому обществу построенный им телескоп-рефлектор. В 1669 г. Барроу уступает Ньютону лукасовскую кафедру, и молодой профессор объявляет курс лекций по оптике, в 1677 г. Ньютона избирают в члены Лондонского королевского общества, в 1687 г. выходит из печати его великий труд "Математические начала натуральной философии", в 1703 г. его избирают президентом Лондонского королевского общества. (Заметим, что на титульном листе первого издания "Математических начал натуральной философии" указан 1686 год, так что иногда самую знаменитую книгу Ньютона относят к 1686 г.)

Все эти годы математические работы Ньютона по исчислению бесконечно малых не публиковались; они лежали в рукописях, и содержание их лишь частично становилось известным через переписку и через тех друзей, которым Ньютон показывал рукописи.

Почему происходила столь длительная задержка с публикацией? Надо отметить, что Ньютон был душевно ранимым человеком, тяжело переносившим критику, а новые методы — это он чувствовал, — навлекли бы на себя сильные нападки со стороны ревнителей математической строгости. В работах Ньютона чувствуются эти опасения: "Возражают, — пишет он, — что не существует последнего отношения исчезающих количеств, ибо то отношение, которое они имеют ранее исчезания, не есть последнее, после же исчезания нет никакого отношения". "Могут также возразить, — пишет Ньютон в другом месте, — что если существуют последние отношения исчезающих количеств, то существуют и последние величины их самих и, следовательно, всякое количество должно состоять из неделимых, вопреки доказанному Евклидом".

Ньютон подробно опровергает эти возражения, но, наверное, он чувствовал и сам, что опровержения его не абсолютны и вовлекли бы его в нескончаемую полемику о строгости. Поэтому Ньютон предпочитал полемизировать делом. Вместо изложения своих методов и неизбежной полемики об их правильности он просто применял их к решению конкретных научных задач.

В своих работах по механике он открыл новое богатейшее поле применения исчисления бесконечно малых. Действительно, второй закон Ньютона, связывающий силу и ускорение, может быть записан в дифференциальной форме:

$$m\ddot{x} = F, \tag{3}$$

где m — масса тела; x — перемещение; F — сила.

Ньютон ясно сознавал, что уравнение (3) позволяет по перемещениям тел находить действующие на них силы — для этого достаточно прибегнуть к операции дифференцирования, или (по Ньютону) к нахождению флюксий по данным флюентам. И наоборот, если известны силы, то уравнение (3) позволяет находить скорости и перемещения тел — для этого достаточно выполнить операцию интегрирования или (по Ньютону) нахождения флюенты по данной флюксии. Вот что писал об этом сам Ньютон в "Математических началах натуральной философии": "Сочинение это предлагается нами как математические основания физики. Вся трудность физики, как будет видно, состоит в том, чтобы по явлениям движения распознать силы природы, а затем по этим силам объяснить остальные явления. Для этой цели предназначены общие предложения, изложенные в книгах первой и второй. В третьей же книге мы даем пример вышеупомянутого приложения, объясняя систему мира, ибо здесь из небесных явлений математически выводятся сила тяготения тел к Солнцу и планетам. Затем по этим силам, также при помощи математических предложений, выводятся движения планет, комет, Луны и моря".

Таким образом, Ньютон показал, что исчисление бесконечно малых позволяет найти законы движения земных и небесных тел, а совпадение между найденными законами и прямыми наблюдениями дает возможность судить о правильности использованных математических методов. Только после триумфального успеха "Начал" в Англии, бесспорного признания результатов, полученных Ньютоном, он опубликовал некоторые из своих математических работ ("Рассуждение о квадратуре кривых" в 1704 г., "Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов" в 1711 г.), а "Метод флюксий и бесконечных рядов", написанный в 1671 г., был опубликован в 1736 г., уже после смерти Ньютона, скончавшегося в 1727 г. (Заметим, что сами "Математические начала натуральной философии", вышедшие в 1687 г., написаны целиком в стиле Евклида, как цепочка строго доказываемых теорем, опирающихся на аксиомы, и методы исчисления бесконечно малых в явном виде в них не появляются, хотя фактически, конечно, используются.)

Столь позднее издание трудов Ньютона по исчислению бесконечно малых ограничивало распространение его открытий. Для распространения идей нового исчисления не меньшую, а, пожалуй, даже большую роль сыграли работы великого современника Ньютона — Готфрида Вильгельма Лейбница (1646—1716).

Лейбниц родился в Лейпциге в 1646 г. в семье профессора Лейпцигского университета. Он учился и в университете родного города, и в университете Иены, в 1666 г. защитил диссертацию "О запутанных случаях в праве", причем настолько блистательно, что одновременно с присуждением степени доктора права ему предложили профессуру, но Лейбниц отказался от нее и поступил на службу к одному из владетельных немецких князей — курфюрсту Майнца, а затем, в 1676 г., он переходит на службу к герцогу Ганновера, на должность библиотекаря и советника. Деятельность Лейбница была исключительно разносторонней. Он занимается философией, юриспруденцией, дипломатией, историей, лингвистикой, богословием. Трудолюбие его колоссально. Сохранилось более 14 тысяч писем Лейбница, и почти в каждом письме выдвигается новая мысль, новая идея.

Для России наиболее интересна переписка и личные беседы Лейбница с Петром I (они встречались в 1711 и в 1712 годах). Лейбниц горячо отстаивал необходимость создания в России Академии наук, и не без влияния Лейбница было принято решение об основании Петербургской Академии наук в 1724 г. Ранее, в 1700 г., при содействии своей ученицы, дочери ганноверского герцога Софии-Шарлотты, вышедшей замуж за прусского государя, Лейбниц основал Академию наук в Берлине и стал ее первым президентом. Он же был вдохновителем одного из первых научных журналов "Acta eruditorum" ("Труды ученых"). То огромное значение, которое имеют для развития научной мысли академии наук и научные журналы, было одним из первых понято и оценено Лейбницем.

Вообще о Лейбнице — одном из универсальнейших гениев всех времен — можно говорить очень долго. Мы остановимся только на одном аспекте многосторонней деятельности Лейбница — его работе в области исчисления бесконечно малых. Заинтересовался впервые этой областью Лейбниц сравнительно поздно — в 1672 г., когда ему было уже 26 лет. К этому времени в области исчисления бесконечно малых много отдельных задач было решено такими выдающимися учеными, как Ферма, Декарт, Паскаль. Лейбниц быстро изучил их труды и сумел пойти дальше своих предшественников. Предшественники Лейбница умели проводить касательные, т. е., собственно говоря, вычислять производные, находить максимумы и минимумы для целого ряда конкретных кривых, конкретных функций, прибегая каждый раз к использованию бесконечно малых и к предельному переходу. Лейбниц посмотрел на дело шире, он поставил задачей найти единый автоматический метод, универсальный алгоритм, который позволил бы находить производные сразу для целого класса функций. И Лейбниц решил эту задачу, разработав правила дифференцирования для суммы, произведения, частного и для суперпозиции нескольких функций. Сам термин "дифференциал", столь привычный для нас, и знаки d для дифференциала и $\int$ для интеграла были впервые введены Лейбницем, который не даром уделял столь большое внимание выработке удобной символики. "Следует заботиться, — писал он Чирнгаузу в 1678 г., — о том, чтобы обозначения были удобны для открытий. Это достигается в наибольшей мере тогда, когда знаки коротко выражают и как бы отображают глубочайшую природу вещи; при этом удивительным образом сокращается работа мышления". В обозначениях Лейбница особенно ясной и прозрачной стала важнейшая теорема о взаимной обратимости операций дифференцирования и интегрирования.

Вот что писал об этом сам Лейбниц в статье, опубликованной в 1686 г.:

"если известно, что $d\frac{1}{2}x^2 = xdx$, то, следовательно, и обратно: $\int xdx = \frac{1}{2}x^2$ (у нас суммы и разности или $\int$ и d так же обратны, как степени и корни в обыкновенном исчислении)".

Такова была первая формулировка будущей знаменитой теоремы о взаимной обратности действий дифференцирования и интегрирования — теоремы, получившей позднее имя Ньютона—Лейбница. Мы убеждаемся, что в 1686 г. Лейбниц еще не различал неопределенный и определенный интегралы. В статье 1694 г. он уже различает их и вводит в неопределенном интеграле постоянную интегрирования. Теорема о взаимной обратимости операций дифференцирования и интегрирования позволила Лейбницу найти интегралы многих функций. Если же интегрирование не выполнялось в конечном виде, то Лейбниц, как и Ньютон, прибегал к разложению в ряд. Правило оценки погрешности при суммировании знакопеременного сходящегося ряда было найдено Лейбницем и применяется по сей день. Заметим еще, что Лейбниц предложил механизм для графического интегрирования, т. е. определения интеграла от функции, заданной графиком. Это был первый в истории интегрирующий прибор.

Сравнивая работы Ньютона и Лейбница по исчислению бесконечно малых, мы убеждаемся, что их результаты во многом пересекаются. Работы Лейбница оказали большее влияние на современников потому, что они своевременно и регулярно публиковались в основанном самим Лейбницем научном журнале "Acta eruditorum" — первая статья была опубликована в 1684 г., последующие в 1686, в 1693 и 1694 и т. д. Лейбниц одним из первых понял великое значение для развития науки периодического научного журнала и вообще своевременной научной публикации. Публикация в журнале является лучшим способом пропаганды новых научных идей, а публикация, сделанная своевременно, фиксирует приоритет.

Заметим, что именно споры о научном приоритете жестоко отравили последние годы жизни Лейбница. Началось все с того, что в 1704 г. в журнале "Acta eruditorum" был помещен не вполне одобрительный отзыв о недавно опубликованных математических работах Ньютона. Тогда один из учеников Ньютона, Кейль (1674—1721), выступил в Лондонском королевском обществе с обвинением Лейбница в плагиате, в заимствовании метода у Ньютона, в котором он якобы лишь изменил обозначения. Безусловно, что Кейль и поддержавшее его Лондонское королевское общество действовали из ложного понятного национального патриотизма, но ничего кроме вреда английской науке они не принесли. Англичане отказались от использования гораздо более удобной символики Лейбница, и это затормозило развитие английской математики, во многом изолировав ее от гораздо более быстро развивавшейся математики континента Европы. Лейбницу эти споры о приоритете и заимствованиях доставили на склоне его жизни много тяжелых минут, и только позднейшие исследования рукописей Лейбница неопровержимо доказали, что обвинения в заимствовании были совершенно необоснованными, и что Лейбниц шел своим путем, отличным от пути Ньютона. Также, в отличие от Ньютона, Лейбниц не уклонялся от острой полемики, возникшей вокруг вопроса о том, как понимать столь широко используемые в новом исчислении бесконечно малые величины. По письмам Лейбница мы можем судить, что четкого понимания не было еще ни у самого Лейбница, ни у его корреспондентов. Иногда Лейбниц трактует бесконечно малые как конечные, но пренебрежимо малые величины и даже делает сравнение: они пренебрежимы "как песчинка в сравнении с земным шаром". В других случаях он рассматривает бесконечно малые величины как безгранично убывающие и указывает, что ошибка отбрасывания их может быть сделана меньшей любого сколь угодно малого, но конечного числа.

Противоречия нового исчисления были очевидны, однако оно работало, давало правильные и важные результаты, и это было тем главным, что привлекало к исчислению бесконечно малых внимание новых и новых выдающихся исследователей.

Идеи Лейбница были подхвачены, прежде всего, братьями Бернулли — Яковом (1654—1705) и Иоганном (1667—1748), уроженцами города Базеля в Швейцарии. Интерес к исчислению бесконечно малых пробудился у них после прочтения статьи Лейбница в журнале "Acta eruditorum" в 1684 г. Надо сказать, что эта статья Лейбница была очень краткой и по первому впечатлению Иоганна "представляла скорее загадку, чем объяснение". Однако уже к 1690 г. братья Бернулли не только освоили метод Лейбница, но и решили с его помощью широкий круг задач.

В эти же годы опубликованные статьи Лейбница заинтересовали знатного парижанина, маркиза Гийома Франсуа Лопиталя (1661—1704). Именно Лопиталь стал автором первого учебника по новому исчислению, вышедшего в 1690 г. под названием "Анализ бесконечно малых для познания кривых линий". Лопиталь много заимствовал у братьев Бернулли, под руководством которых он изучал новое исчисление. Однако Лопиталь собрал воедино формальный аппарат нового исчисления и обработал его педагогически, подбирая необходимые примеры и задачи. Именно после создания первого учебника начинается массовое распространение новых идей, и в следующем, XVIII столетии исчисление бесконечно малых становится главным оружием математики. Дальнейшее его развитие связано с именами таких выдающихся ученых

XVIII века, как Эйлер, Лагранж, Клеро, Д. Бернулли, Лаплас, Даламбер, Лежандр, Риккати и многих других.

Остановимся на характерных чертах математики XVIII века. Это время, когда возможности математики, великая польза, которую она может принести государству, были осознаны государственными деятелями многих стран. В XVIII веке математика развивается, в основном, в стенах академий наук — в Париже, Берлине, Петербурге, Лондоне. Именно в XVIII веке появляются профессионалы-математики — люди, занимающиеся математикой (а не только ее преподаванием), как основной профессией и получающие за это занятие, как за решение конкретных задач, нужных государствам, так и за открытие новых математических зависимостей, — деньги от правительства.

Характерна в этом отношении биография Эйлера. Леонард Эйлер родился в 1707 г. в Базеле (Швейцария) в семье пастора. В Базельском университете, который он посещал с 1720 г., он обратил на себя внимание преподававшего там Иоганна Бернулли. Блестяще окончив в 1724 г. университет, Эйлер имел желание остаться там преподавать, но возможности Швейцарии в отношении свободных вакансий на преподавательские должности были очень скромными, и Эйлер принял приглашение начать работу в Петербургской Академии наук, куда, кстати, немного ранее переехали сыновья Иоганна Бернулли — Николай и Даниил. В Петербургской Академии Эйлер получил жалование — 300 рублей в год — и работал до 1741 г., когда он переехал в Берлин, в Берлинскую Академию, где работал до 1766 г., оставаясь, впрочем, почетным членом Петербургской Академии, в трудах которой регулярно печатались его работы. В 1766 г. Эйлера вторично, с большим почетом, уже на жалование в 3000 рублей в год, приглашают в Петербургскую Академию, где он и работает до самой смерти в 1783 г., выполняя многочисленные важные поручения русского правительства[5].

Точно также и Жозеф Луи Лагранж (1736—1813) был членом Берлинской Академии с 1759 г.; с 1766 г. он сменил Л. Эйлера в должности директора математического класса Берлинской Академии, а в 1787 г. переехал в Париж, где стал членом Парижской Академии.

Алексис Клод Клеро (1713—1765) был избран членом Парижской Академии в 1731 г., еще в возрасте 18 лет, и работал в ней до самой смерти. Членом Парижской Академии с 1741 г., (а с 1772 г. — ее непременным секретарем), был Жан Даламбер (1717—1783). С 1773 г. без перерыва работал в Парижской Академии и Пьер Симон Лаплас (1749—1827).

Естественно, что правительства финансировали через академии наук прежде всего работы прикладного характера. Разделение математики на "чистую" и прикладную появляется в конце XVIII века, когда в университетах создаются отдельные кафедры чистой математики и кафедры прикладной математики. Вообще чистая и прикладная математика тесно переплетаются между собой. До некоторой степени условно их можно разделить так: прикладная математика — это решение конкретных задач физики, техники и т. п. математическими средствами, а чистая математика — это исследование математических проблем самих по себе, без заранее намеченного конкретного применения (хотя решение абстрактной математической проблемы может в дальнейшем оказаться полезным при решении прикладных задач, такие примеры в истории науки встречались нередко). Когда, например, Эйлер решал столь важную для морской практики задачу о зависимости усилия в канате, навиваемом на цилиндрический кнехт, от угла навивки (и получил знаменитую формулу $F = F_0 e^{\mu\theta}$, где μ — коэффициент трения, а θ — угол навивки), то он занимался прикладной математикой, а когда он суммировал ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ или доказывал, что уравнение $x^3 + y^3 = z^3$ не имеет решений в целых числах, то он работал в области чистой математики.

Математики XVIII века — это, прежде всего, прикладные математики. Все они много работали над решением прикладных задач, и их теоретические работы возникали на основе обобщения этих решений. Тесная связь с практикой влияла на стиль и характер изложения математических работ того времени. Первостепенное внимание уделялось не строгости изложения, а получению новых результатов. Рассмотрим для примера, как Эйлер в первом томе своего "Введения в анализ бесконечных" (1748) находит разложения в ряды показательных функций (заметим, что вообще разложение в ряд являлось излюбленным приемом исследования для математиков XVIII века). Вот каким путем выводит Эйлер знаменитый ряд $a^z = 1 + kz + \ldots$: "Так как $a^0 = 1$, и при возрастании показателя одновременно увеличивается значение степени, если только a больше единицы, то отсюда следует, что когда показатель бесконечно мало превышает нуль, то сама степень также бесконечно мало превзойдет единицу. Если ω будет числом бесконечно малым, то $a^\omega = 1 + \psi$, причем ψ также будет бесконечно малым числом; положим $\psi = k\omega$, тогда, $a^\omega = 1 + k\omega$, а также $a^{i\omega} = (1 + k\omega)^i$, какое бы число не подставить вместо i.

Итак, будет

$$a^{i\omega} = 1 + \frac{i}{1}k\omega + \frac{i(i-1)}{2}k^2\omega^2 + \frac{i}{1}\frac{(i-1)}{2}\frac{(i-2)}{3}k^3\omega^3 + \ldots$$

Если положить $i = \frac{\omega}{z}$, где z обозначает какое-либо конечное число, то, так как ω — число бесконечно малое, число i будет бесконечно большим; но $\omega = \frac{z}{i}$, так что ω будет дробью с бесконечно большим знаменателем, следовательно — бесконечно малой, какой она и принята. Итак, подставим $\frac{z}{i}$ вместо ω; тогда будет

$$a^z = (1 + \frac{kz}{i})^i = 1 + kz + \frac{(i-1)}{1 \cdot 2i} k^2 z^2 + \frac{(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2i \cdot 3i} k^3 z^3 + \ldots$$

Равенство это будет верным, если вместо i подставить бесконечно большое число, но тогда $\frac{i-1}{i} = 1$; действительно, ясно, что чем большее число подставим вместо i, тем ближе значение дроби $\frac{i-1}{i}$ будет подходить к единице; если i станет больше всякого заданного числа, то дробь $\frac{i-1}{i}$ станет равна единице. Подобным же образом $\frac{i-2}{i} = 1$; $\frac{i-3}{i} = 1$ и так далее; отсюда следует, что $\frac{i-1}{2i} = \frac{1}{2}$; $\frac{i-2}{3i} = \frac{1}{3}$ и т. д. Подставляя эти значения, получаем: $a^z = 1 + kz + \frac{k^2 z^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3 z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$ и т. д. до бесконечности. Это равенство, вместе с тем, показывает соотношение между числами a и k; действительно, если положить $z = 1$, то будет

$$a = 1 + k + \frac{k^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$$

и если $a = 10$, то приближенно $k = 2{,}30258$".

Из этого отрывка видно, насколько свободно обращается Эйлер с бесконечными величинами и рядами, насколько далеки его методы от современных требований к строгости и, тем не менее, окончательные выводы Эйлера безусловно верны.

Иногда говорят, что "от ошибок Эйлера оберегала интуиция". Сами по себе эти слова верны. Надо лишь уточнить, что речь идет не об интуиции как о каком-то врожденном качестве, присущем Эйлеру от природы. Интуиция Эйлера — это результат огромного количества реальных расчетов, выполненных им, всесторонних проверок, которым он подвергал результаты своих расчетов.

Рассмотрим для иллюстрации одну работу Эйлера, на примере которой будет особенно ясен тот путь, на котором Эйлер и другие математики XVIII века достигали правильных результатов.

Еще Я. Бернулли поставил задачу о вычислении суммы ряда обратных квадратов:

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}. \tag{4}$$

Однако задача оказалась трудной и самим Бернулли не была решена. Л. Эйлер для ее решения использовал новый метод, основанный на смелом предельном переходе от конечных полиномов к бесконечным степенным рядам.

Современникам Эйлера было хорошо известно, что если полином степени $2n$ имеет вид $b_0-b_1x^2+...(-1)^n b_n x^{2n}$ и имеет $2n$ различных корней:

$$\beta_1;\ -\beta_1;\ \beta_2;\ -\beta_2;\ ...\ \beta_n;\ -\beta_n,$$

то его можно представить в виде:

$$b_0-b_1x^2+...(-1)^n b_n x^{2n}=b_0(1-\frac{x^2}{\beta_1^2})(1-\frac{x^2}{\beta_2^2})...(1-\frac{x^2}{\beta_n^2}),$$

причем коэффициент

$$b_1=b_0(\frac{1}{\beta_1^2}+\frac{1}{\beta_2^2}+\frac{1}{\beta_3^2}+...\frac{1}{\beta_n^2}). \tag{5}$$

Эйлер рассматривает функцию

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...$$

как "полином бесконечной степени", имеющий бесконечное число корней:

$$0;\ \pi;\ -\pi;\ 2\pi;\ -2\pi...\ \text{и т. д.}$$

Поделив на x, Эйлер переходит к полиному

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-...,$$

имеющему корни: $\pm\pi;\ \pm 2\pi;\ \ldots \pm n\pi$, и по аналогии с конечными полиномами Эйлер заключает, что

$$\frac{\sin x}{x} = (1-\frac{x^2}{\pi^2})(1-\frac{x^2}{4\pi^2})(1-\frac{x^2}{9\pi^2})\ldots, \qquad (6)$$

и тогда, с учетом равенства (5) имеем:

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \ldots \frac{1}{n^2\pi^2},$$

откуда и следует

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \qquad (7)$$

Эйлер сам понимал, что его заключение о сумме ряда (4) "дерзко". Перенос свойств конечных полиномов на бесконечные степенные ряды мог привести и к ошибке, поэтому Эйлер счел необходимым многократно проверить свой метод и свой результат. Вот каковы были проверки, проделанные Эйлером:

1. Эйлер вычислил сумму (4) приближенно, с точностью до 6-го знака и нашел полное совпадение во всех знаках.

2. Пользуясь тем же методом исследования, но сравнивая коэффициенты при x^2 в равенстве (6), Эйлер нашел сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

   и снова, вычисляя приближенно эту сумму прямым подсчетом, нашел полное совпадение до шестого знака.

3. Применяя тот же метод перехода от конечного полинома к бесконечному ряду для функции

   $$1 - \sin x = 1 - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots,$$

   имеющей двойные корни, Эйлер нашел сумму ряда

   $$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots = \frac{\pi}{4},$$

   что совпало с уже известным результатом Лейбница. "Для нашего метода, — писал об этом совпадении Эйлер, — который некоторым может показаться недостаточно надежным, здесь обнаруживается великое подтверждение. Поэтому мы вообще не должны сомневаться в других результатах, выведенных тем же методом".

4. Однако Эйлер не жалел сил для дальнейших проверок своего метода, другим путем вычислил сумму ряда (4) и снова нашел, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. Совпадение результатов, полученных двумя разными методами, было дополнительным доводом в пользу их правильности.
5. Даниил Бернулли (1700—1782), обсуждая результат Эйлера, обратил внимание, что Эйлером не доказано отсутствие комплексных корней в уравнении $\sin x = 0$, наличие которых могло бы поставить под сомнение равенство (7). В ответ на эти сомнения Эйлер дополнительно доказал, что уравнение $\sin x = 0$ не может иметь комплексных корней.

Легко убедиться, что все проверки, проделанные Эйлером, не абсолютны: так, например, ясно, что из совпадения первых шести десятичных знаков суммы ряда (4) и числа $\frac{\pi^2}{6}$ еще не следует с абсолютной достоверностью, что совпадут и все остальные знаки; такие же замечания можно высказать и по поводу остальных пяти проверок. Но в целом проверки, проделанные Эйлером, обеспечивали (по выражению А. Н. Крылова) "ту разумную строгость, которая, избавляя от ошибок, сообщает непреложность выводам".

Проверки, осуществленные Эйлером для подкрепления достоверности вычисления суммы (4), с особенной ясностью проявляют характерную черту математики XVIII века — преобладание прикладной математики, ее методов. Тщательные и многосторонние проверки — характерная черта прикладной математики (напомним еще раз, что прикладной математикой мы называем решение задач физики, техники и т. п. математическими средствами). Естественно, что в прикладной математике проверка окончательного результата необходима, и именно она гарантирует, что задача решена правильно. Пример с суммой ряда (4) показывает, насколько глубоко проникнут Эйлер духом прикладной математики; он применяет ее методы прямых проверок даже к задаче чистой математики — суммированию ряда (4) — несмотря на то, что в области чистой математики любая прямая проверка только относительна; она повышает степень достоверности результата, не гарантируя сама по себе его абсолютной истинности. Эйлер это понимал и именно поэтому он не ограничивался одной-единственной проверкой, а проверял свои результаты всесторонне, самыми различными методами.

В итоге, как мы уже отмечали, практически все результаты Эйлера (за самыми ничтожными исключениями) оказались справедливыми.

Заметим, что математики XIX века в обеспечении достоверности своих результатов шли, как правило, по другому пути — они стремились обосновать свои выводы возможно более строгой дедукцией, а проверку результатов старались не вводить в публикуемый текст. Она оставалась как бы "за сценой". Вот почему так уникальны работы Эйлера. Они с наибольшей откровенностью вводят нас в творческую лабораторию математика, показывают нам не только как доказываются те или иные теоремы, но и как они создавались, путем каких догадок, проверок, отбраковки ошибочных догадок приходил к своим знаменитым теоремам Эйлер. В наше время новые математические результаты получают, собственно, таким же путем, но сейчас не принято писать о процессе своего творчества, публикуют только конечные результаты и поэтому столь полезно еще раз перечитать работы Эйлера. Многие (большинство) из них есть в русских переводах (сам Эйлер писал большей частью на латыни — международном языке науки того времени).

Интересна и полемика, неоднократно вспыхивавшая между выдающимися математиками XVIII века. В ходе научных дискуссий, которые так часто велись тогда (гораздо чаще, чем в веке двадцатом), уточнялись понятия функции, тригонометрического ряда и т. п.

Заканчивая обзор развития математического анализа в XVIII веке, заметим, что именно тогда в ходе прикладных исследований по механике, по астрономии была получена основная часть тех результатов в области анализа и дифференциальных уравнений, которые используются в наше время в повседневной работе прикладного математика и изучаются в вузах. Почти все неопределенные интегралы, которые можно выразить через элементарные функции, были найдены в XVIII веке. XIX век здесь почти ничего не добавил. Почти все типы дифференциальных уравнений, которые можно проинтегрировать в элементарных функциях или в квадратурах, также были найдены в XVIII веке. Век XIX и здесь почти ничего не добавил — не потому, что в XIX веке дифференциальными уравнениями не интересовались, а потому что типов уравнений, интересуемых в квадратурах, немного, и математики XVIII века успели найти почти все. На долю XIX века выпали другие задачи.

Глава 4

Неевклидовы геометрии

История математики XIX века настолько обширна и многообразна, что нет возможности систематически изложить даже основные ее разделы. Здесь мы рассмотрим историю создания неевклидовых геометрий, поскольку это одна из интереснейших глав истории науки, и она раскрывает с особенной ясностью взаимосвязь между чистой и прикладной математикой.

Геометрия, разработанная древними греками — геометрия Евклида, — основывалась на следующих пяти уже рассмотренных нами в *главе 1* допущениях (постулатах):

1. Между любыми двумя точками можно провести прямую.
2. Ограниченную прямую можно непрерывно продолжать по прямой.
3. Из всякого центра любым раствором может быть описан круг.
4. Все прямые углы равны между собой.
5. Если прямая, пересекающая две прямые, образует внутренние односторонние углы, в сумме меньшие двух прямых, то, продолженные неограниченно, эти две прямые встретятся с той стороны, где сумма углов меньше двух прямых.

Из всех постулатов пятый постулат выделялся своей сложной формулировкой и недостаточной очевидностью. Он скорее напоминал теорему, и поэтому многие последователи и комментаторы Евклида считали, что пятый постулат может и должен быть доказан на основе других постулатов и аксиом Евклида (заметим, что в некоторых списках "Начал" постулаты и аксиомы не различаются и пятый постулат получает имя "одиннадцатой аксиомы").

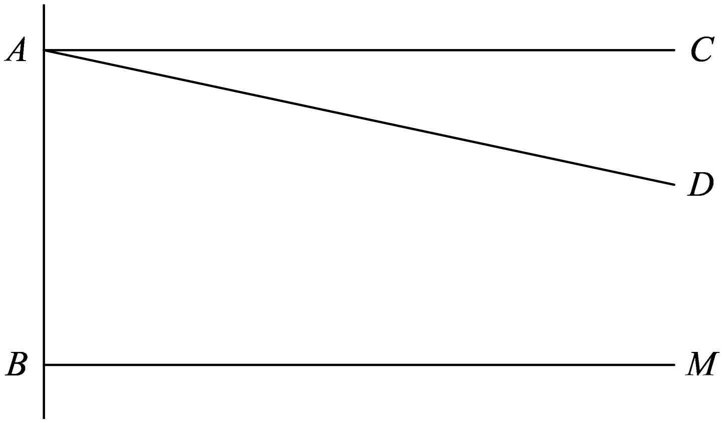


Рис. 4.1. К доказательству Проклом пятого постулата Евклида

Так, в частности, греческий математик Прокл, живший в V веке н. э., предложил следующее доказательство: пусть к прямой *AB* (рис. 4.1) проведены в точках *A* и *B* два перпендикуляра *AC* и *BM*, а через точку *A* — еще и наклонная *AD*. Тогда сумма внутренних углов *BAD* и *ABM* будет меньше двух прямых и, согласно пятому постулату, наклонная *AD* должна пересечься с перпендикуляром *BM*. Прокл доказывает это следующим образом: в различных точках прямой *AC*, все более удаляющихся от *A*, будем строить перпендикуляры к *AC* и продолжать их до пересечения с прямой *AD*. Длина этих перпендикуляров будет все время расти, поэтому рано или поздно, как считал Прокл, она превысит расстояние между точками *A* и *B*, и тогда прямая *AD* пересечет прямую *BM*. Доказательство Прокла опирается на допущение, что расстояние точек одной из двух параллельных прямых до другой не может неограниченно возрастать. Но это допущение, как можно доказать, само эквивалентно пятому постулату Евклида.

Попытки доказать пятый постулат предпринимали очень многие математики: Сабит ибн Корра (IX век), Омар Хайям (1048—1131), Джон Валлис (1616—1703), Джироламо Саккери (1667—1733), Иоганн Ламберт (1728—1777), Адриан Лежандр (1752—1833), Фаркаш Бояи (1777—1857) и многие другие. Никому из них доказательство не удалось. Незаметно для себя они вводили в ходе доказательства новое допущение, равносильное пятому постулату, но так же, как и он, не вытекающее из других аксиом и постулатов Евклида. Правда, работа этих математиков не пропала даром. Стало очевидным, что пятому постулату эквивалентны, например, такие допущения:

1. Сумма внутренних углов треугольника равна двум прямым углам.
2. На плоскости через точку, лежащую вне прямой, проходит только одна параллельная к этой прямой (в современном школьном курсе геометрии именно в этой форме и записывается пятый постулат).

3. Существуют подобные треугольники.
4. Не существует наибольшего треугольника, т. е. треугольника, площадь которого нельзя было бы увеличить.

Потерпев неудачу в прямых попытках доказательства пятого постулата, многие математики предпринимали попытки доказать его "от противного" — т. е. ввести предположение, обратное пятому постулату, — например, предположение, что сумма углов треугольника не равна двум прямым углам, — и выводя из этого предположения следствия, показать, что они противоречат остальным постулатам и аксиомам. По этому пути шел, в частности, Джироламо Саккери. Довольно быстро он доказал, что предположение: "сумма углов треугольника больше двух прямых", действительно, приводит к противоречию с остальными постулатами. Тогда он стал исследовать следствия из предположения "сумма углов треугольника меньше двух прямых". Следствия оказались исключительно запутанными и сложными; на какой-то момент Саккери показалось, что он нашел противоречие и доказал тем самым пятый постулат; затем обнаружилась ошибка в рассуждениях...

Много сил отдал доказательству пятого постулата венгерский математик Фаркаш Бояи. Когда в 1820 г. его сын Янош заинтересовался этой же проблемой, он с ужасом писал сыну: "Ты не должен пытаться одолеть теорию параллельных линий. Я знаю этот путь, я проделал его до конца, я прожил эту бесконечную ночь, и весь свет, всю радость моей жизни я там похоронил. Молю тебя, оставь в покое учение о параллельных линиях; оно лишит тебя здоровья, досуга, покоя, оно погубит счастье твоей жизни. Этот глубокий бездонный мрак может поглотить тысячу таких гигантов, как Ньютон, это ужасная вечная рана в моей душе; да хранит тебя Бог от этого увлечения, которое так сильно овладело тобой. Оно лишит тебя радости не только в геометрии, но и во всей земной жизни...

Учись на моем примере: из-за того, что я хотел постичь теорию параллельных линий, я остался безвестным. Это отняло у меня всю мою кровь, все мое время... Если бы я мог открыть загадку параллельных линий, пусть об этом никто бы не узнал, я стал бы ангелом... Непостижимо, что в геометрии существует эта непобежденная темнота, этот вечный мрак, туча, пятно на девственной, нетронутой истине... Дальше геркулесовы столпы, ни шагу дальше, или ты погибнешь!"

Так писал Ф. Бояи в 1820 г. А в 1829 г. Николай Иванович Лобачевский опубликовал работу, в которой древняя проблема пятого постулата получила новое, революционное решение: Лобачевский утверждал, что пятый постулат доказать нельзя, и что если принять, что сумма углов треугольника меньше двух прямых углов, мы придем к новой геометрии, отличной от геометрии

Евклида, но имеющей такое же право на существование, как и евклидова. Правда, теоремы новой геометрии необычны. Вот некоторые из них:

1. В пространстве существует абсолютная единица длины, равная k.
2. Существует треугольник наибольшей площади, его площадь равна πk^2.
3. Не существует подобных фигур, в частности — и подобных треугольников.
4. Если разные треугольники с тремя равными сторонами не равны между собой, то их углы не равны.
5. Чем больше треугольник, тем меньше сумма его углов.
6. Сумма углов треугольника (в радианах) равна $\pi - \omega$, где ω — "дефект", причем $0 < \omega \leq \pi$; площадь треугольника может быть выражена через его дефект, а именно $S = k^2\omega$ (откуда, кстати, и вытекает существование треугольника наибольшей площади: при $\omega = \pi$ его площадь будет равна $k^2\pi$, этот треугольник будет обобщенным или несобственным, все три вершины его удалены в бесконечность).
7. Для прямоугольных треугольников несправедлива теорема Пифагора, вместо нее имеет место равенство:

   $$ch\frac{c}{k} = ch\frac{a}{k}ch\frac{b}{k}, \tag{1}$$

   и квадрат гипотенузы больше суммы квадратов катетов.

Несмотря на все своеобразие геометрии Лобачевского, различие между нею и евклидовой обнаруживается лишь на расстояниях, больших по сравнению с "абсолютной длиной" k. Так, если стороны треугольника a, b, c малы в сравнении с k, то, разложив $ch\frac{a}{k}$; $ch\frac{b}{k}$; $ch\frac{c}{k}$ в ряды и удерживая первые два члена, получаем из формулы (1) с точностью до членов четвертого порядка малости (т. е. членов вида $\left(\frac{a}{k}\right)^4$, $\left(\frac{b}{k}\right)^4$, $\left(\frac{c}{k}\right)^4$) следующее равенство:

$$a^2 + b^2 = c^2, \tag{2}$$

т. е. для треугольников, размеры которых малы в сравнении с k, выполняются с очень хорошей точностью обычные теоремы евклидовой геометрии, в том числе и теорема Пифагора. В то же время, опираясь на астрономические наблюдения, Лобачевский доказал, что постоянная k, если она существует, очень велика; она не может быть меньше, чем сто тысяч диаметров земной орбиты. Таким образом, для практических целей можно пользоваться как геометрией Евклида, так и геометрией Лобачевского, и обе они имеют право на существование.

Расскажем теперь коротко о жизни основателя новой геометрии — Николая Ивановича Лобачевского.

Он родился в 1792 г. в Нижнем Новгороде в семье уездного землемера. Рано лишившись отца, он с 1802 г. "на казенном коште" учился в Казанской гимназии, затем — в Казанском университете, тоже на "казенном коште", т. е., собственно, почти на казарменном положении. Время было суровое, и свободолюбивый характер молодого студента Лобачевского не раз навлекал на него неприятности. В "шнуровой книге" университета сохранилась запись, что Лобачевский "в значительной мере явил признаки безбожия". Это грозило "отдачей в солдаты". Спасло лишь заступничество профессоров[6]. Учился Лобачевский блестяще, и уже в 1816 г. стал профессором в том же Казанском университете, который окончил за пять лет до того.

Первые годы профессорства Лобачевского были омрачены появлением в Казани Магницкого, известного реакционера. Обследовав университет, этот враг науки предложил императору Александру I "публично разрушить" Казанский университет, ибо, по его мнению, университет "причиняет общественный вред"... На разрушение университета Александр I все же не решился. "Зачем разрушать, — писал он Магницкому, — лучше исправить", и в целях исправления назначил Магницкого попечителем. Новый попечитель не ограничился тем, что выгнал лучших профессоров. Были изъяты скелеты из анатомического театра медицинского факультета, их отпели в церкви и зарыли на кладбище. В такой обстановке начинал свою работу Лобачевский.

Мы потому останавливаемся на этих моментах его биографии, что они оказали влияние и на его научную деятельность. Именно суровая юность и прошедшая в тяжелой борьбе с Магницким молодость выработали в Лобачевском тот железный, несгибаемый характер, который был так необходим творцу новой геометрии. Трудностей на его пути было немало. С Магницким, правда, удалось справиться — реакционер проворовался и новым императором Николаем I был снят. В 1827 г. Лобачевского избрали ректором университета; он пробыл на этом посту до 1846 г. Уже в 1826 г. он сделал на заседании факультета доклад "Сжатое изложение начал геометрии", а в 1829 г. в "Казанском вестнике" была опубликована работа Лобачевского "О началах геометрии". Это была первая в мире опубликованная работа по неевклидовой геометрии. В ней и в последующих работах Лобачевского давался вывод основных теорем новой геометрии, оценка "дефекта" треугольников и возможного значения постоянной k из астрономических наблюдений; давалось применение новой геометрии к вычислению некоторых определенных интегралов.

В 1832 г. работа Лобачевского была послана на отзыв в Академию наук, где попала к знаменитому русскому математику академику М. В. Остроградскому (1801—1861). Остроградский дал отрицательный отзыв. Он отметил тяжелый стиль изложения (что, кстати, справедливо); указав, что предположение о том, что сумма углов в треугольнике меньше двух прямых углов, прилагается Лобачевским к вычислению определенных интегралов. Остроградский заметил также, что один из этих интегралов легко получить классическим путем, а другой неверен.

Поскольку отзыв М. В. Остроградского сыграл роковую роль в судьбе Лобачевского, необходимо остановиться на этом отзыве более подробно. М. В. Остроградский — выдающийся математик, человек, оставивший заметный след в истории математики, его нельзя обвинить ни в пристрастии, ни в некомпетентности. Его ошибка в том, что к труду Лобачевского он подошел как к работе по прикладной математике, обратив основное внимание на помощь новой геометрии в вычислении некоторых определенных интегралов. И Остроградский был прав в том, что уж если говорить только об интегралах, то их, конечно, можно вычислить много проще, не прибегая к построению целой новой геометрии. Однако Остроградский не заметил самого главного в работе Лобачевского — того, что эта работа относится не к прикладной, а к чистой математике и пролагает в этой области новые пути.

Короче, ошибка Остроградского заключалась в том, что он к работе, посвященной чистой математике, применил критерий ценности прикладной математики. Пример Остроградского показывает, что этого ни в коем случае нельзя делать. Нельзя к исследованиям по прикладной математике применять критерии чистой математики. Нельзя поступать и наоборот.

Через два года после отзыва Остроградского в журнале "Сын отечества", который издавали известные доносчики и агенты Третьего отделения Булгарин и Греч, была помещена (анонимно) откровенно издевательская статья о Лобачевском. Вот отрывок из нее: "...даже трудно было бы понять то, каким образом г. Лобачевский из самой легкой, самой ясной в математике науки, какова геометрия, мог сделать такое тяжелое, такое темное и непроницаемое учение, если бы он сам отчасти не надоумил нас, сказав, что его Геометрия отлична от употребительной, которой мы все учились и которой, вероятно, уже разучиться не можем, а есть только воображаемая. Да, теперь все понятно. Чего не может представить воображение, особливо живое и вместе уродливое? Почему не вообразить, например, черное белым, круглое четырехугольным, сумму всех углов в прямолинейном треугольнике меньше двух прямых? Очень, очень можно, хотя для разума все это и непонятно".

Лобачевский послал в журнал ответ на эту статью; журнал отказался опубликовать его. Лобачевский, как ректор, обратился к министру народного просвещения, который приказал поместить ответ. Однако Булгарин и Греч, сотрудничающие с всесильным Третьим отделением, имели возможность пренебречь и приказом министра. Тогда Лобачевский опубликовал ответ в "Ученых записках Казанского университета" в 1835 г. В том же году он напечатал еще одну работу — "Воображаемая геометрия", в 1836 г. — "Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам", в 1838 г. — "Новые начала геометрии с полной теорией параллельных". Лобачевский печатается и за границей: в 1837 г. в журнале "Крелле" на французском языке публикуется "Воображаемая геометрия", а в 1840 г. в Германии в издательстве Финке отдельной книгой выходят "Геометрические исследования" на немецком языке. Наконец, в 1855 г., уже больной и ослепший, Лобачевский диктует свой последний труд — "Пангеометрия", а в следующем году он выходит во французском переводе.

Так упорно и целеустремленно пропагандировал Лобачевский свои идеи о новой геометрии. И все же до последних лет жизни он оставался одинок.

А между тем неевклидовой геометрией занимался не он один. В Венгрии по тому же пути шел Янош Бояи (1802—1860), сын математика Фаркаша Бояи, о котором мы уже говорили. (Заметим, что фамилии этих математиков на венгерском языке пишутся так: "Bolyai", но их произношение русскими буквами передается по-разному. Так, К. А. Рыбников в "Истории математики (изд-во МГУ, 1994 г.) пишет "Больяи", в "Математическом энциклопедическом словаре" 1988 года дается написание "Бойаи", в издании "Математика XIX века" под редакцией А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича и в "Кратком очерке истории математики" Д. Я. Стройка используется написание "Бояи", которому мы и следуем. Разумеется, во всех случаях речь идет об одних и тех же людях). Полное ужаса письмо Фаркаша Бояи, узнавшего, что и его сын заинтересовался пятым постулатом, мы цитировали. Однако сын продолжал заниматься теорией параллельных, и в 1832 году Фаркаш Бояи согласился напечатать как приложение к своему учебнику небольшую работу Яноша: "Приложение, содержащее науку о пространстве абсолютно истинную, не зависящую от истинности или ложности одиннадцатой аксиомы Эвклида (что a priori никогда решено быть не может)".

В этом "Приложении" (по латыни "Appendix" — под этим именем работа Яноша и вошла в историю науки) были кратко изложены основные положения неевклидовой геометрии. В первую очередь Янош послал свою работу на отзыв великому Гауссу — старому другу своего отца. Ответ Гаусса, адресованный его отцу, глубоко поразил молодого ученого: "Я не должен хвалить ее, — писал Гаусс о работе Яноша, — хвалить ее значило бы хвалить самого себя; все содержание этой работы, путь, по которому твой сын пошел, и результаты, которые он получил, почти сплошь совпадают с моими собственными достижениями, которые частично имеют давность в тридцать, тридцать пять лет... Я имел намерение о своей работе, кое-что из которой я уже нанес на бумагу, при жизни ничего не публиковать".

Ответ Гаусса обескуражил Яноша Бояи. Одиночество, непризнание привели его постепенно к тяжелой моральной депрессии. Больше по неевклидовой геометрии он ничего не публиковал — до самой смерти в 1860 году. Только в 1848 году познакомился он с работами Лобачевского (с книгой "Геометрические исследования" на немецком языке). Сохранились записи Я. Бояи, показывающие, что он был внимательным читателем и критиком — но Лобачевскому он ничего не написал. А Лобачевскому, по-видимому, осталась неизвестной единственная работа Я. Бояи. Пути этих двух творцов неевклидовой геометрии не пересеклись — и это было трагедией для обоих.

Перейдем теперь к третьему из творцов неевклидовой геометрии — к великому немецкому математику Карлу Фридриху Гауссу (1777—1855). Он родился в семье мастера-водопроводчика, в мелком немецком княжестве Брауншвейг. Блестящие математические способности он проявил с раннего детства, а первое выдающееся открытие опубликовал в девятнадцать лет, в 1796 году, еще будучи студентом Геттингенского университета. Гаусс доказал, что циркулем и линейкой можно построить правильный семнадцатиугольник, и это было первым существенным продвижением в задаче о построении правильных многоугольников со времен древних греков. Юношеское открытие оставалось всю жизнь любимой работой Гаусса. И на надгробном памятнике он завещал выгравировать вписанный в круг правильный семнадцатиугольник.

Всемирную славу принесла Гауссу работа по определению орбиты планеты по малому числу наблюдений. Интересна история этого открытия. В первую ночь нового XIX века (1 января 1801 г.) итальянский астроном Пиацци (1746—1826) случайно открыл новую планету (ее потом назвали Церерой). Он наблюдал ее девятнадцать раз, затем облачная погода заставила сделать перерыв в наблюдениях, а после перерыва планета исчезла. Сделанных наблюдений было мало для вычисления орбиты планеты, а без этого вычисления было почти невозможно отыскать планету вновь. Попытки ряда математиков и астрономов вычислить орбиту по наблюдениям Пиацци не приводили к успеху, пока за решение не взялся Гаусс. Он разработал новый метод вычисления орбиты, предсказал положение Цереры, и 31 декабря 1801 года она была открыта вновь именно на месте, предсказанном Гауссом!

Но и после этого великого открытия, за которым последовало множество других, Гаусс оставался на скромном положении приват-доцента. Только после того как Петербургская Академия наук пригласила Гаусса в Россию, герцог Брауншвейгский, опасаясь потерять столь выдающийся талант, назначил Гауссу жалованье в 400 талеров в год. После этого Гаусс отказался от переезда в Россию; в 1807 году он стал профессором Геттингенского университета и директором астрономической обсерватории, что, наконец, обеспечило его материально. С годами слава Гаусса неуклонно возрастала. К 1820 году он уже считался признанным "королем" математиков.

Еще с юных лет Гаусс интересовался пятым постулатом Евклида и возможностью его доказательства. Не раз обсуждал он эту проблему со своим другом Фаркашем Бояи. Примерно к 1817 году у Гаусса сложилось убеждение, что пятый постулат недоказуем, и возможна новая геометрия, построенная на его отрицании (высказано это было в письме к астроному В. Ольберсу). В 1824 году Франц Тауринус, юрист по образованию и математик по склонности души, написал Гауссу о заинтересовавших его любопытных выводах, вытекающих из допущения, что сумма углов треугольника меньше 180 градусов. Гаусс ответил Тауринусу замечательным письмом:

"Допущение, что сумма трех углов треугольника меньше 180 градусов приводит к своеобразной геометрии, полностью отличной от нашей (евклидовой); эта геометрия совершенно последовательна, и я развил ее для себя абсолютно удовлетворительно; я имею возможность в этой геометрии решить любую задачу, за исключением определения некоторой постоянной, значение которой иначе как из опыта установлено быть не может. Чем большее значение придадим мы этой постоянной, тем ближе подойдем к евклидовой геометрии, а бесконечно большое ее значение приведет обе системы к совпадению. Теоремы этой геометрии отчасти кажутся парадоксальными и непривычному человеку даже несуразными, но при строгом и спокойном размышлении оказывается, что они не содержат ничего невозможного. Так, например, все три угла треугольника можно сделать сколь угодно малыми, если только взять достаточно большие стороны; площадь же треугольника не может превысить некоторого предела, как бы велики ни были стороны. Все мои старания найти в этой неевклидовой геометрии противоречия или непоследовательности оставались бесплодными, и единственно, что в этой системе противится нашему разуму, это то, что в пространстве, если бы эта система была справедлива, должна была бы существовать некоторая сама по себе определенная (хотя нам и неизвестная) линейная величина. Но мне кажется, что мы, кроме ничего не выражающей словесной мудрости метафизиков, знаем очень мало или даже ничего не знаем о сущности пространства; мы не можем смешивать то, что нам представляется неестественным, с абсолютно невозможным. Если бы неевклидова геометрия была истинной, и упомянутая выше постоянная находилась в определенном отношении к таким величинам, которые доступны нашему измерению на небе или на земле, то ее можно было бы определить из опыта. Я поэтому иногда в шутку высказывал пожелания, чтобы евклидова геометрия не была истинной, ибо мы тогда имели бы абсолютную меру длины".

Это письмо показывает, что Гаусс действительно владел основными идеями неевклидовой геометрии. Но он ничего не публиковал. Более того, в конце письма к Тауринусу он предупреждает, что письмо его не должно быть опубликовано (оно стало известно лишь после смерти Гаусса).

Мы уже описывали, как отнесся Гаусс к работе Яноша Бояи, и какую роковую роль его ответ сыграл в судьбе Яноша. Но это — человеческая слабость Гаусса. Он не любил спешить с публикацией своих исследований, но если кто-либо другой публиковал первым свои результаты в тех областях, над которыми работал Гаусс, он упорно подчеркивал свой идейный приоритет. За это он получил однажды отповедь от Лежандра: "Не существует открытия — пишет Лежандр, — которое нельзя было бы приписать себе, сказав, что те же вещи были найдены на несколько лет раньше; но если не дано этим словам доказательства, состоящего в указании места, где они опубликованы, то это утверждение становится беспредметным и представляет собой только обиду для истинного автора открытия.

В математике случается очень часто, что находят те же самые вещи, которые уже были открыты другими и которые уже известны; подобное случалось со мной много раз, но я никогда не упоминал о них и не называл «нашим принципом» принцип, который другой опубликовал раньше меня". (Эти совершенно правильные слова Лежандра полезно помнить и в наше время).

Прочел Гаусс и работы Лобачевского (прежде всего книгу "Геометрические исследования", опубликованную на немецком языке в 1840 г.). Он даже изучает русский язык, чтобы читать Лобачевского в оригинале. Он осыпает его похвалами в письмах к друзьям, он намеревается написать Лобачевскому. Но письмо остается ненаписанным. Нигде публично о неевклидовой геометрии Гаусс не высказывается, а главное — ничего не публикует.

Почему Гаусс не опубликовал ничего по неевклидовой геометрии? Иногда на этот вопрос дают очень прямолинейный ответ: все дело в том, что Гаусс боялся нападок консервативно настроенных ученых, чьи привычные представления о геометрии он разрушил бы своей публикацией. Нет, такой ответ слишком принижает Гаусса и не вяжется с его жизнью. Не боялся же Гаусс публиковать другие свои открытия, не менее великие и революционные, чем неевклидова геометрия.

Я думаю, что дело здесь в другом. Действительно, вспомним, с чего начинались исследования по неевклидовой геометрии и Лобачевского, и Бояи, и Гаусса? С попыток показать, что следствия из отрицания пятого постулата Евклида приведут к противоречию, и пятый постулат будет тем самым доказан. Вместо противоречия перед ними вставало величественное здание неевклидовой геометрии, возникали новые, интересные и парадоксальные теоремы. Развивая их, можно было идти вперед и вперед, видимого противоречия не ощущалось. Но, может быть, противоречие запрятано глубже? Может быть, при дальнейшем развитии оно проявится, и тогда пятый постулат будет доказан, а вся неевклидова геометрия окажется фикцией, заблуждением? Можно ли публиковать исследования по неевклидовой геометрии, если не доказана ее непротиворечивость? Мне кажется, что именно такое сомнение и было истинной причиной отказа Гаусса от публикаций.

Надо отметить, что Янош Бояи в своей первой работе еще не думал о доказательстве непротиворечивости неевклидовой геометрии, а в дальнейшем он отошел, как известно, от работы над ней. Лобачевский, в отличие от Бояи, понимал необходимость доказательства непротиворечивости, и ему казалось, что он такое доказательство нашел. Однако более подробный анализ показывает, что доказательства Лобачевского не были полными и непротиворечивость не доказывали. Надо отметить, правда, что неполнота доказательств непротиворечивости современниками Лобачевского не была замечена, и самому Лобачевскому они казались убедительными. Гаусс в этом отношении был критичнее. Вообще в творчестве Гаусса, жившего на стыке XVIII и XIX веков, наблюдается уже перелом от "более вольного" стиля XVIII века к скрупулезной строгости чистой математики девятнадцатого столетия. Надо заметить, что Гаусс работал как в области чистой математики, так и в математике прикладной. В работах по прикладной математике Гаусс не стремился к строгости; он применял, например, разложения в ряды, не доказывая даже их сходимости. Он поступал так потому, что в прикладных задачах мог проверить справедливость решения сравнением с экспериментом. Другое дело — чистая математика. Здесь критерий истинности совсем другой. Единственным критерием истинности в чистой математике, считал Гаусс, является отсутствие противоречий, и Гаусс не жалел сил для доведения доказательств чистой математики до наибольшей доступной ему степени строгости. Так, знаменитую теорему о том, что любое алгебраическое уравнение имеет хотя бы один корень, он доказывал 50 лет и дал четыре варианта доказательства (в 1799, 1815, 1816 и 1849 годах).

Можно ли доказать истинность неевклидовой геометрии опытным путем, прямым экспериментом? Гаусс пытался это сделать в 1828 году, когда в ходе геодезической съемки он с наивысшей возможной степенью точности измерил углы треугольника между вершинами трех отдаленных гор и убедился, что сумма его углов равна 180 градусам, а возможное отклонение заведомо меньше, чем ошибки измерения. Заметим теперь, что астрономические наблюдения параллаксов звезд, которые анализировал Лобачевский, вообще не могут дать принципиального ответа на вопрос об истинной сумме углов треугольника, поскольку в этом случае измеряются не три угла треугольника, а два. Астрономические наблюдения могут дать только верхнюю оценку возможного отклонения ("дефекта") суммы углов треугольника от двух прямых углов, и Лобачевский показал, что даже для треугольника со сторонами, равными диаметру орбиты Земли, это отклонение не превзойдет $3{,}72 \cdot 10^{-4}$ секунды дуги.

Следовательно, вопрос об истинности или противоречивости неевклидовой геометрии не мог быть разрешен опытным путем, и для уверенности в истинности неевклидовой геометрии надо было доказать ее непротиворечивость. Гаусс не видел путей к доказательству непротиворечивости — и именно этим, по-видимому, объясняется его нежелание публиковать свои результаты.

Однако история математики показала, что воздержание Гаусса от публикаций и публичных выступлений и его чрезмерная забота о строгости были ошибочны. Публикации работ Лобачевского (хотя в них и не было строгого доказательства непротиворечивости) постепенно заинтересовали математиков мира и в 1868 году, уже после смерти и Гаусса (1855 г.), и Лобачевского (1856 г.), и Бояи (1860 г.), итальянский математик Бельтрами (1835—1900) доказал непротиворечивость неевклидовой геометрии Лобачевского (точнее, Бельтрами доказал, что неевклидова геометрия в такой же степени непротиворечива, как и евклидова). Бельтрами стал рассматривать поверхности постоянной отрицательной кривизны, — например, образованные вращением трактрисы вокруг оси абсцисс. Для геодезических кривых на этой поверхности выполняется геометрия Лобачевского. В 1871 году еще одно доказательство непротиворечивости нашел Феликс Клейн (1849—1925).

Однако еще до открытия Бельтрами непротиворечивости геометрии Лобачевского новые идеи в обосновании геометрии были выдвинуты немецким математиком Бернгардом Риманом (1826—1866). Риман родился в Ганновере, в бедной пасторской семье, учился в Геттингенском и Берлинском университетах. В 1851 году он завершает диссертацию "Основы общей теории функций комплексного переменного" и в эти же годы интенсивно работает над проблемой обоснования геометрии. Чтобы получить хоть какое-то материальное обеспечение, Риман добивается места преподавателя университета. По правилам того времени, соискатель должен был прочитать пробную лекцию перед профессорами университета. Соискатель готовил три темы — совет университета утверждал одну из них. Из трех тем, предложенных Риманом, совет Геттингенского университета (возможно, не без влияния Гаусса) утвердил третью: "О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии". И вот 10 июня 1854 года, в присутствии Гаусса, Риман прочел свою "пробную лекцию" (напечатана она была лишь двенадцать лет спустя).

Судя по краткому обзору истории вопроса, сделанному Риманом в начале лекции, он не был знаком с работами Лобачевского и Бояи. Не были известны ему и мысли Гаусса, к этому времени еще не опубликованные. Тем замечательнее глубина и самостоятельность мысли Римана. Вот начало его "пробной лекции": "Общеизвестно, что геометрия предполагает заданным как понятие пространства, так и первые основные положения, которые нужны для выполнения пространственных построений. Она дает номинальные определения понятий (Риман, очевидно, имеет в виду такие определения Евклида, как "линия есть длина без ширины". — *Ю. П.*), тогда как существенные свойства определяемых объектов входят в форме аксиом. При этом взаимоотношение между этими предпосылками остается невыясненным: не видно, является ли и в какой степени связь между ними необходимой; не видно так же, а priori (до опыта), возможна ли такая связь. Начиная от Евклида и кончая Лежандром (я называю наиболее выдающегося из новейших исследователей основ геометрии) ни математиками, ни философами упомянутые неясности не были устранены". (Из этой фразы как раз и можно сделать заключение, о котором мы уже говорили: с работами Лобачевского и Бояи Риман не был знаком.) Далее Риман продолжает: "Причина этому обстоятельству, как полагаю, заключается в том, что общая концепция многократно протяженных величин, к которым относятся и пространственные величины, оставалась вовсе не разработанной.

В связи с этим я поставил перед собой задачу: исходя из общего понятия о величине, сконструировать понятие многократно протяженной величины. Мы придем к заключению, что в многократно протяженной величине возможны различные мероопределения; необходимым следствием явится то, что предложения геометрии не выводятся из общих свойств протяженных величин; напротив, те свойства, которые выделяют пространство из других мыслимых трижды протяженных величин, могут быть почерпнуты не иначе, как из опыта.

Возникает задача установить, из каких простейших допущений вытекают метрические свойства пространства — задача, естественно, не вполне определенная, так как не исключено, что возможны несколько систем простых допущений. …Важнейшая из них… есть система, положенная в основу геометрии Евклидом. Допущения, о которых идет речь, не являются (как и всякие допущения) необходимыми; достоверность их носит эмпирический характер; они — не что иное, как гипотезы. Их правдоподобие... надлежит подвергнуть исследованию, и затем судить о том, могут ли они быть распространены за пределы наблюдения как в сторону неизмеримо большого, так и в сторону неизмеримо малого".

Одним из наиболее ярких следствий идей Римана была возможность многих неевклидовых геометрий и в частности — геометрии, в которой пятый постулат Евклида заменен допущением: "сумма углов треугольника больше двух прямых". Эту геометрию сейчас называют геометрией Римана. В свое время еще Саккери доказал противоречие предположения о том, что сумма углов треугольника больше двух прямых, с остальными постулатами Евклида. Поэтому геометрия Римана — в отличие от геометрии Лобачевского — отвергает не только пятый постулат Евклида. Первый постулат Евклида – "между двумя точками можно провести прямую и притом только одну" заменяется на новый: "существуют точки, между которыми можно провести бесчисленное множество прямых, не совпадающих между собой". Исходя из этих новых постулатов, в геометрии Римана можно доказать ряд теорем, столь же своеобразных, как и в геометрии Лобачевского (и в некотором отношении похожих на теоремы геометрии Лобачевского). Вот некоторые из теорем геометрии Римана:

1. Параллельных прямых не существует. Любые две прямые пересекаются в двух точках, расстояние между которыми конечно.
2. Не существует подобных фигур. Если у двух треугольников не равны стороны, то не могут быть равны и углы.
3. Теорема Пифагора несправедлива. Квадрат гипотенузы меньше суммы квадратов катетов.
4. Сумма углов треугольника (в радианах) равна $\pi + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$; сумма углов тем больше, чем больше площадь треугольника. Площадь треугольника может быть выражена формулой: $S = \xi^2\varepsilon$, где ξ — некоторая абсолютная единица длины.
5. Существует треугольник наибольшей площади.

Для геометрии Римана — в отличие от геометрии Лобачевского — легко найти наглядную интерпретацию. Рассмотрим сферу радиуса ξ. На сфере геодезическими линиями (кратчайшими расстояниями между двумя точками) являются дуги больших кругов. Если эти дуги назвать "прямыми линиями", то для таких "прямых" будет выполняться геометрия Римана. В необычных на первый взгляд теоремах геометрии Римана можно при такой интерпретации узнать известные формулы сферической тригонометрии. Действительно, как известно, на сфере большие круги всегда пересекаются в двух точках; подобных сферических треугольников не существует; сумма углов сферического треугольника равна $\pi + \varepsilon$, площадь его равна $\xi^2 \varepsilon$, где ξ — радиус сферы, и площадь любого сферического треугольника конечна при конечном радиусе сферы ξ.

Таким образом, теоремы геометрии Римана легко интерпретируются, и, следовательно, она столь же непротиворечива, как и геометрия Евклида.

Правда, из геометрии Римана вытекает на первый взгляд парадоксальное следствие: получается, что пространство конечно. Однако Риман еще в своей "пробной лекции" четко заявил: "При распространении пространственных представлений в направлении неизмеримо большого следует различать свойства неограниченности и бесконечности: первое есть свойство протяженности, второе — метрическое свойство... Неограниченности пространства свойственна гораздо бóльшая эмпирическая достоверность, чем какому бы то ни было другому продукту внешнего восприятия. Но отсюда никоим образом не следует бесконечность пространства: напротив, если мы припишем пространству постоянную меру кривизны, то придется допустить конечность пространства, как бы ни мала была мера кривизны, лишь бы она была положительной".

Отметим, что из идей Римана вытекает возможность существования многих неевклидовых геометрий; простейшими из них являются геометрии с постоянной кривизной пространства; если кривизна меньше нуля, то приходим к геометрии Лобачевского, если кривизна равна нулю — к геометрии Евклида, если кривизна положительна — к геометрии Римана.

Настоящий триумф идеям Римана принес XX век, когда общая теория относительности Эйнштейна (1879—1955) провозгласила, что геометрия нашего мира является неевклидовой, и кривизна пространства зависит от средней плотности масс в наблюдаемой нами части Вселенной. В настоящее время оценки для средней плотности масс еще недостаточно точны для того, чтобы с полной определенностью утверждать — геометрии Лобачевского или геометрии Римана подчиняется окружающий нас мир, но со временем, безусловно, это будет установлено и уточнено.

Мы не знаем, предугадывал ли все это Риман, но в конце его "пробной лекции" стоят следующие пророческие слова, как будто намекающие на появление в будущем теории относительности: "Решение этих вопросов (о метрике пространства) можно надеяться найти лишь в том случае, если, исходя из ныне существующей и проверенной опытом концепции, основа которой положена Ньютоном, станем постепенно ее совершенствовать, руководясь фактами, которые ею объяснены быть не могут. Такие исследования, как произведенные в настоящей работе, а именно исследования, имеющие исходным пунктом общие понятия, служат лишь для того, чтобы движению вперед и успехам в познании связи вещей не препятствовали ограниченность понятий и укоренившиеся предрассудки. Здесь мы стоим на пороге области, принадлежащей другой науке — физике, и переступать его не дает нам повода сегодняшний день". Этими словами заканчивается "пробная лекция" Римана. Прочитана она была в 1854 году, опубликована — в 1868 году.

Рассмотрим теперь — что нового внесли в понимание математики и окружающего нас мира неевклидовы геометрии. Прежде всего они разрушили идеалистические представления (восходящие еще к Платону) о том, что геометрия является умозрительной наукой, которая исходит из очевидных аксиом и безукоризненно строго приходит к более достоверным и точным знаниям о мире, чем это может дать эксперимент. Поясним сказанное примером. Наверняка еще Платон подметил, что при измерении земными, конечной точности, инструментами гипотенуз и катетов треугольника мы не получим идеально точного равенства: квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. В зависимости от точности инструмента мы будем получать либо $a^2+b^2>c^2$, либо $a^2+b^2<c^2$. Из этого Платон сделал вывод, что измерение и эксперимент вообще являются принципиально неполными, неточными, а в целом — недостоверными средствами познания мира по сравнению с логическим рассуждением и строгой дедукцией. Только дедукция, по Платону, позволяет делать точные выводы и утверждать, что если угол между сторонами в точности прямой, то выполняется точное равенство $a^2+b^2=c^2$. Неевклидовы геометрии показали, что возможны различные системы аксиом, причем из одной системы аксиом следует, что $a^2+b^2<c^2$ (геометрия Лобачевского), из другой, что $a^2+b^2=c^2$ (геометрия Евклида), из третьей, что a^2+ $+b^2>c^2$ (геометрия Римана). Ответ на вопрос о том, какое же из трех соотношений между a^2, b^2, c^2 соответствует реальности, может дать только опыт, практика. Подчеркнем, однако, что слова "опыт", "практика" надо понимать не в конкретно-эмпирическом смысле, а как обобщенную практику человечества. Не нужно понимать дело так, что для проверки, какое из трех соотношений: $a^2+b^2>c^2$, $a^2+b^2=c^2$, $a^2+b^2<c^2$ — соответствует реальному миру, надо измерять стороны конкретных треугольников. На этом пути мы заведомо ничего не достигнем. Имеющиеся оценки для величины постоянной k в геометрии Лобачевского и постоянной ξ в геометрии Римана показывают, что ξ и k настолько велики, что отклонения от равенства $a^2+b^2=c^2$ при гипотенузе, равной, например, одному километру или даже миллиарду километров, будут заведомо меньше, чем погрешности самых точных изме-

рений. Прямым, непосредственным экспериментом правильность теоремы Пифагора проверить невозможно. Однако если мы установим, наконец, среднюю плотность масс в наблюдаемой части Вселенной (а для этого требуется обобщение всех опытных фактов физики и астрономии, накопленных практикой), то мы и установим тогда, какое же все-таки из трех неравенств: $a^2+b^2>c^2$, $a^2+b^2=c^2$, $a^2+b^2<c^2$ — соответствует истине в окружающем нас реальном мире. Развитие неевклидовой геометрии сыграло, тем самым, важную роль в становлении и развитии материалистического понимания математики.

История становления неевклидовой геометрии, история научных поисков и взаимоотношений ее творцов дает обильную пищу для размышлений и выводов об этической позиции ученого, роли его характера и взаимоотношений с окружающими в общем прогрессе науки.

Мы можем убедиться, какую роль сыграл в этом отношении характер Лобачевского, его непреклонная убежденность в собственной правоте, его уверенность в том, что нужно всемерно пропагандировать истину всеми доступными тебе путями, что люди поймут эту истину и оценят ее, пусть даже и не сразу. Мы можем вспомнить, какую роковую роль в судьбе Яноша Бояи сыграл недружеский отзыв Гаусса, а из истории вариационного исчисления *(см. главу 12)* мы увидим, каким контрастом этому были отношения Эйлера и юного Лагранжа, и какую роль эти отношения сыграли в быстром развитии вариационного исчисления.

Вообще, история математики — это не только история развития математических идей, но и история людей, в чьих умах родились эти идеи, и история жизни этих людей, их характеров и взаимоотношений во многом поучительна для нас.

Коснемся коротко некоторых мифов, связанных с неевклидовой геометрией. Распространен, в частности, такой: "Все отвлеченно-математические работы рано или поздно находят признание. Вот Н. И. Лобачевского ругали за отвлеченность и не понимали современники. А потомки оценили. Поэтому и я, — рассуждают часто молодые математики, — буду заниматься теорией, которая интересует только меня и никого другого. Потомки меня оценят и используют мою теорию". Этот миф основан на недостаточном знании истории математики. Геометрия Лобачевского получила, в конце концов, мировое признание лишь потому, что вопросы, решаемые ею, лежали на центральной дороге развития математики XIX века. Но история математики знает сотни и тысячи теоретических работ, погребенных в запыленных журналах. Эти работы не лежали на магистральной дороге развития науки, поэтому они мало кого интересовали при жизни авторов и уж заведомо никого — после их смерти.

В этом отношении у работ прикладного характера более счастливая судьба. Работа, решившая животрепещущую проблему текущей эпохи, вызывает интерес у потомков. В основе этого интереса лежит простое соображение — если данная работа помогла решить одну задачу, то она может помочь решить и вторую задачу, третью и т. д. Мы хорошо помним имена Эйлера, Лагранжа, Лапласа потому, что пользуемся их методами, их уравнениями, их преобразованиями. А пользуемся мы их методами потому, что, решая конкретные практические задачи своего времени, для нас уже неинтересные, эти великие математики разработали методы, полезные для решения широкого круга задач, в том числе и тех, которые стоят перед нами сегодня.

Поэтому если молодой математик решил трудную прикладную задачу новым методом, он может надеяться, что его метод послужит в будущем для решения широкого круга задач и забыт не будет.

Недаром писал И. Бернулли еще в 1697 году, что решением "трудной, но почетной" задачи "возможно и славу приобрести, и оставить по себе вечный памятник".

Глава 5

Проблема обоснования анализа и математики в целом в XIX и XX веках

Математики XVIII века широко и смело оперировали бесконечными рядами, понятиями бесконечно малых и бесконечно больших величин. XIX век принес с собой гораздо большие требования к строгости доказательств.

Рассмотрим, почему это произошло. Почему в XVIII веке математики свободно обращались, например, с бесконечными рядами (в том числе и с расходящимися), а в XIX веке стали скрупулезно обосновывать сходимость, а расходящихся рядов тщательно избегали?

Одна из существенных причин заключается в изменении общественного положения математиков XIX века в сравнении с веком восемнадцатым. Мы уже упоминали в предыдущих главах, что XVIII век принес с собой появление математики как профессии; тогда впервые появились профессиональные математики, получающие средства к жизни за то, что они решали для правительств важные прикладные математические задачи, порождаемые потребностями общества того времени. Наиболее выдающиеся представители математики XVIII века — это члены академий наук того времени, и занимались они прежде всего решением прикладных задач.

XIX век принес с собой дальнейшее развитие профессии математика. Появились профессиональные математики, не занимающиеся прикладными задачами. Математику стали преподавать в средних школах (лицеях Франции, гимназиях Германии и России, военных училищах), а в университетах появились специальные математические кафедры, одной из задач которых и стала подготовка учителей для средних школ.

Ведущие математики XIX века, определившие основные тенденции ее развития, — это профессора университетов. Многие из них — и в том числе такие гиганты, как Вейерштрасс, Риман, Кантор, Гильберт, — не занимались систематически прикладными задачами, а сосредотачивали все свои силы на преподавании и на решении внутренних математических проблем, т. е. развивали математику как фундаментальную науку. Для математиков, не занимающихся приложениями, был не интересен такой путь проверки правильности выводов, как сопоставление с опытом и наблюдением. Поэтому они особое внимание обращали на выяснение логической структуры положений, лежащих в основе математики, и на строгость выводов и доказательств, стремясь к тому, чтобы сформулированные ими теоремы были бы верны и непреложны сами по себе, без всякой дополнительной проверки практикой.

Можно подметить, что при выяснении и уточнении логических основ анализа и математики в целом преследовались две не совпадающие между собой цели; их можно условно назвать "программой-минимум" и "программой-максимум".

Программа-минимум заключала в себе стремление обеспечить ясность и непротиворечивость преподавания математического материала, входящего в курс обучения, добиться того, чтобы студент, окончивший курс, был уверен, что используемый им аппарат будет давать верные результаты без необходимости проверки сравнением с экспериментом на каждом шагу.

Программа-максимум шла дальше, она стремилась обеспечить незыблемую истинность всей математики как науки, замкнутой в себе самой, поставить математическое знание на внутреннюю прочную и свободную от противоречий опору.

Забегая вперед, отметим, что программа-минимум была выполнена, а программа-максимум не реализована и до настоящего времени. Можно предположить, что она и никогда не будет выполнена, поскольку уже в начале XIX века Гегелем было показано, что любое достаточно богатое понятие внутренне противоречиво. Заметим, что Гегель не отрицал формальной логики. По Гегелю, она имеет право на существование, но область ее применимости ограничена. Как только мы от простейших конечных соотношений арифметики или геометрии переходим к исследованию движения, приходится столкнуться с понятиями потенциальной и актуальной бесконечности и со всеми диалектическими противоречиями, с ними связанными. Впервые с этими противоречиями столкнулись еще древние греки. "Апории" Зенона — в том числе и известная апория о том, что Ахиллес не догонит черепахи — это и есть отражение диалектически противоречивой сущности движения. Более детальная разработка математического аппарата может отодвинуть дальше это диалектическое противоречие, но не может ликвидировать его целиком. Так, разработав методы суммирования бесконечных рядов — и, в частности, простого ряда

$$1+\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}+...+\frac{1}{k^n},$$

сумма которого равна времени, в течение которого Ахиллес догонит черепаху, — мы преодолеем трудности Зенона, но столкнемся с противоречиями в теории бесконечных рядов и бесконечных множеств.

Таким образом, на основе философии Гегеля можно было бы ожидать, что программу-минимум, поставленную математиками XIX века, выполнить можно, а программа-максимум окажется невыполнимой.

Рассмотрим теперь действительный ход истории обоснования анализа и математики в целом в XIX и XX веках.

Одним из первых провозвестников нового подхода — подхода XIX века — к строгости доказательств был Бернард Больцано (Bolzano, 1781—1848). В своей работе 1817 г. он первый счел необходимым дать чисто аналитическое доказательство того, что непрерывная для $a \leq x \leq b$ функция, имеющая при $x=a$ и $x=b$ разные знаки, обязательно принимает и значение нуль. Больцано сознает, что эта теорема геометрически очевидна. "Против верности, а также против очевидности этой теоремы, — пишет Больцано, — возразить нечего. Но столь же очевидно также, что нетерпимым нарушением хорошего метода является то, что истину чистой (или общей) математики (т. е. арифметики, алгебры или анализа) желают вывести из соображений, которые принадлежат только прикладной (или специальной) ее части, а именно — геометрии... Ведь доказательства в науке вовсе не должны быть лишь удостоверениями, а, наоборот, обоснованиями, т. е. изложениями того объективного основания, которое имеет доказываемая истина". И Больцано дает первое аналитическое доказательство прохождения непрерывной функции через значение $x=0$.

Интересно сложилась личная судьба Б. Больцано. Философ и богослов по образованию, он с 1805 г. возглавлял кафедру истории религии в Пражском университете, одновременно интересуясь математикой, но в 1820 г. был навсегда отстранен от преподавания австрийским правительством за пропаганду свободомыслия. Ему было запрещено поступать на государственную службу, выступать в печати. Без средств к существованию Больцано жил в деревне у друзей, продолжая заниматься математикой. Важнейшая его работа — "Парадоксы бесконечного" — увидела свет лишь посмертно, в 1851 г.

Более непосредственную роль в становлении новых стандартов математической строгости имела деятельность Огюстена Коши (Cauchy, 1789—1857), многолетнего преподавателя Политехнической школы во Франции. О. Коши родился в 1789 году в Париже, воспитывался в строго клерикальных традициях. После окончания знаменитой Политехнической школы он работал несколько лет путейским инженером, затем в 1816 году он стал профессором той же Политехнической школы и членом Парижской Академии наук. Непримиримые клерикальные и роялистские пристрастия Коши заставили его после революции 1830 года покинуть Францию. Вернулся он лишь в 1838 году, но из-за отказа принести присягу новому режиму не мог занимать государственных должностей и довольствовался преподаванием в иезуитской коллегии. После новой революции во Франции в 1848 году революционное правительство разрешило Коши быть профессором университета без присяги, и он оставался в этой должности до своей кончины в 1857 году, опубликовав за свою жизнь более 800 математических работ.

В 1821 году О. Коши опубликовал свой "Курс анализа", во многом определивший стиль преподавания на последующие десятилетия[7]. Положив в основу анализа теорию пределов, Коши значительно урезал ту свободу манипулирования с рядами и предельными переходами, которой пользовались математики XIX века. "Прежде чем приступить к суммированию каких-либо рядов, — пишет Коши, — я должен рассмотреть, в каких случаях ряды можно суммировать, каковы условия их сходимости". Расходящиеся ряды Коши изгнал вовсе, объявив их "не имеющими суммы". Коши сознавал, что его нововведения обедняют эвристическую сторону математики, но считал достаточной компенсацией достигаемую при таком ограничении строгость. "Что касается методов, — указывает Коши, — то я стремился придать им всю строгость, требуемую в геометрии".

История показала, что эта гордая программа не была выполнена. "Курс анализа" Коши не оказался строгим. Так, была признана ошибочной теорема Коши о непрерывности суммы сходящегося ряда непрерывных функций. Уже в 1826 г. норвежский математик Н. Абель построил контрпример — ряд:

$$S = \sin a - \frac{1}{2}\sin 2a + \frac{1}{3}\sin 3a + \ldots, \qquad (1)$$

терпящий разрыв при $a = (2n+1)\pi$.

Уровень строгости, достигнутый О. Коши, был существенно углублен Карлом Вейерштрассом (1815—1897), который, в частности, ввел понятие "равномерной сходимости". Только "равномерная сходимость ряда непрерывных функций — гласила уточненная формулировка Вейерштрасса, — будет гарантировать непрерывность суммы ряда".

Вообще работы К. Вейерштрасса во многом определили стиль математики XIX века. Остановимся поэтому несколько подробнее на его биографии. Обычно для выдающихся математиков характерно раннее развитие, еще в юношеские годы они поражают своими успехами окружающих. Однако раннее развитие таланта не является непременным атрибутом математика, и характерным примером служит как раз Карл Вейерштрасс. Он родился в 1815 г., учился в 1834—38 гг. в Боннском университете (почти одновременно с молодым К. Марксом), причем посещал сперва лекции по юриспруденции и лишь потом перешел на математику, был активным членом студенческой корпорации, завсегдатаем трактира и фехтовального зала. Дуэли на шпагах были любимым развлечением немецких студентов тех лет, и молодой Вейерштрасс увлекался ими с особенным рвением. После окончания в 1838 г. университета Вейерштрасс — как и большинство студентов математических отделений университетов того времени — стал учителем математики в гимназии небольшого города и продолжал работу учителя до 1854 г., переезжая из одного провинциального города в Германии в другой. С 1844 г. он начал — и потом упорно и целеустремленно продолжал — работу над теорией аналитических функций. Постепенно его работы завоевали признание, и в 1854 г. Вейерштрасса пригласил университет г. Кенигсберга, а в 1856 г. он перешел в Берлинский университет, где читал лекции более 30 лет. Звание ординарного профессора он получил лишь в 1864 г., на 49-м году жизни. Публиковать свои работы Вейерштрасс не любил, идеи свои он развивал в лекциях, и через записи этих лекций, сделанные его учениками, идеи Вейерштрасса получали распространение в математическом мире, завоевывая медленно и постепенно безоговорочное признание. В частности, понятие равномерной сходимости рядов и интегралов было опубликовано впервые Зейделем (S̆̈eidel, 1821—1896) и Стоксом (Stokes, 1819—1903), но еще ранее излагалось Вейерштрассом на его лекциях. Именно от Вейерштрасса ведет свое начало изложение анализа "на языке δ–ε". Вот отрывок из конспекта лекций Вейерштрасса, прочитанных в 1861 г.: "Если $f(x)$ есть функция от x, и x — определенное значение, то при переходе x в $x+h$ функция переменится и будет $f(x+h)$. Если можно определить для h такую границу δ, что для всех значений h, по абсолютному значению меньших, чем δ, разность $f(x+h)-f(x)$ становится меньше, чем сколь угодно малая величина δ, то говорят, что бесконечно малым изменениям аргумента соответствуют бесконечно малые изменения функции".

Чтобы показать ненадежность интуиции, Вейерштрасс построил пример функции

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cos(b^n\pi x),$$

которая является непрерывной, но не дифференцируемой; ни в одной точке у нее не существует конечной производной.

Идеи Вейерштрасса распространялись медленно — частично потому, что он, как мы уже упоминали, не любил печатать своих работ, и идеи его распространялись только в устном изложении, через лекции и записи лекций, сделанные его учениками. Однако в последней четверти века Вейерштрасс завоевал несравненный авторитет в научном мире, и его построение курса анализа считалось образцовым. Уровень строгости учебников О. Коши был существенно превзойден; образцовой считалась "вейерштрассовская строгость".

Однако и работы К. Вейерштрасса еще не обеспечивали достижения должного уровня строгости в основаниях анализа. Коль скоро в анализе идет речь о функциях, определенных на бесконечном множестве значений аргумента, то необходимой предпосылкой обоснования анализа должно было стать исследование свойств бесконечных множеств. Это исследование было выполнено немецким математиком Георгом Кантором (Cantor, 1845—1918). От работ Г. Кантора (публиковавшихся начиная с 1872 г.) ведет свое начало теория множеств, лежащая в основе современной математики. Надо отметить, что уже во времена Галилея было подмечено, что бесконечные множества обладают особыми свойствами, не сводящимися к свойствам множеств конечных. Так, для них несправедливо положение о том, что целое больше своей части. Галилей рассматривал (в 1638 г.) вопрос: каких чисел больше — квадратов натуральных чисел или же всех целых чисел вместе — квадратов и не квадратов? С одной стороны ясно, что множество квадратов является лишь частью множества всех целых чисел, а с другой стороны — поскольку каждое натуральное число можно рассматривать как квадратный корень из некоторого квадрата, то между каждым квадратом и каждым натуральным числом можно установить взаимнооднозначное соответствие, и тогда уже нет основания утверждать, что целых чисел больше, чем квадратов натурального ряда. Галилей объяснял эти затруднения тем (как говорит он устами Сальвиати), что "рассуждая нашим ограниченным разумом о бесконечном, мы приписываем ему свойства, известные нам по вещам конечным и ограниченным. Между тем это неправильно, так как такие свойства, как большая или меньшая величина и равенство, не применимы к бесконечному, относительно которого нельзя сказать, что одна бесконечность больше или меньше другой".

Следующий шаг к познанию и изучению бесконечного был сделан Георгом Кантором, который ввел новое важное понятие — понятие "мощности" множества. Два множества — по Г. Кантору — имеют одинаковую мощность тогда, когда между их элементами можно установить взаимнооднозначное соответствие, когда каждому элементу первого множества может быть поставлен в соответствие элемент второго, и наоборот. Сразу видно, что понятие мощности является обобщением понятия равенства на бесконечные множества. Действительно, два конечных множества будут иметь одинаковую мощность лишь тогда, когда число элементов первого равно числу элементов второго. Для конечных множеств понятие "мощности" не вносит ничего нового по сравнению со старым понятием числа элементов множества. Однако для всех бесконечных множеств число элементов бесконечно, а вот мощности бесконечных множеств могут быть разными. Таким образом, используя понятие "мощности", введенное Г. Кантором в 1878 г., мы получаем возможность анализировать различные бесконечности, сравнивать их между собой.

Прежде всего Кантор доказал, что одинаковую мощность имеют:

1. Множество всех натуральных чисел.
2. Множество положительных четных чисел.
3. Множество чисел — квадратов натуральных чисел.
4. Множество всех рациональных чисел — целых и дробных.

Все эти множества Кантор назвал счетными, поскольку их потенциально возможно "пересчитать" — поставить в соответствие числам натурального ряда. Однако существуют и множества существенно большей мощности — мощности континуума. Кантор доказал, что мощность континуума имеют, например, следующие множества:

1. Множество всех действительных чисел (рациональных и иррациональных).
2. Множество всех точек континуума — отрезка единичной длины.
3. Множество всех точек квадрата со стороной единичной длины.

Доказательства несложны. Докажем, например, что множество всех точек единичного отрезка имеет мощность бóльшую, чем множество натуральных чисел. Поставим в соответствие каждой точке отрезка число — ее расстояние от начала отрезка. Это число может быть либо рациональным, т. е. конечной или периодической десятичной дробью, либо иррациональным, т. е. бесконечной непериодической десятичной дробью. Предположим теперь, что мы все эти числа перенумеровали — поставили в соответствие числам натурального ряда (по совершенно произвольному закону). Тогда получится следующая бесконечная таблица (приведено, естественно, только начало таблицы):

$$
\begin{aligned}
1 &\rightarrow 0{,}2427\ldots\\
2 &\rightarrow 0{,}3542\ldots\\
3 &\rightarrow 0{,}2537\ldots\\
4 &\rightarrow 0{,}1538\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Теперь покажем, что существует такое иррациональное число, которое заведомо не содержится в этой таблице. Это число построим следующим образом: на первое место после запятой ставим цифру, отличную от той, что стоит на первом месте в первом числе нашей таблицы, на второе — цифру, отличную от той, что стоит на втором месте во втором числе нашей таблицы, и т. д. Получившееся число не будет совпадать ни с одним из чисел нашей таблицы. Таким образом, мы доказали, что множество точек отрезка не является счетным, оно имеет мощность бóльшую, чем множество всех рациональных чисел. Отсюда, кстати, сразу вытекает существование иррациональных чисел. Иррациональных чисел даже (условно говоря) "гораздо больше", чем рациональных (точнее, мощность множества иррациональных чисел больше, чем множества рациональных чисел).

Интересно отметить, что переход от отрезка к квадрату, к кубу и к пространству любого конечного числа измерений не увеличивает мощности: множество всех точек квадрата, куба и т. д., как доказал Г. Кантор в 1877 г., имеет ту же мощность, что и множество точек единичного отрезка. Это доказательство Кантора вызвало особое удивление у его современников.

Кантор доказал также, что существуют множества сколь угодно высокой мощности и высказал гипотезу, что не существует множеств, имеющих мощность, промежуточную между мощностью континуума и мощностью счетного множества (знаменитая "гипотеза континуума" Г. Кантора).

Отношение современников к исследованиям Г. Кантора было двойственным. Были математики, горячо поддержавшие Кантора с самого начала (тут надо отметить прежде всего немецкого математика Рихарда Дедекинда (Dedekind, 1831—1916); его регулярная дружеская переписка с Кантором сыграла большую роль в оформлении теории множеств). Многие математики встретили идеи Кантора враждебно, особенно непримиримо выступал против Кантора влиятельный математик Л. Кронекер (Kronecker, 1823—1891). Резкие нападки Кронекера были одной из причин тяжелого заболевания Г. Кантора, который, начиная с 1885 г., почти не печатал новых работ.

Однако постепенно идеи Кантора завоевали математику, и к концу XIX века она уже прочно опиралась на теорию множеств как на свой основной фундамент. "Никто не может изгнать нас из рая, созданного для нас Г. Кантором", — провозгласил Д. Гильберт (Hilbert, 1862—1943). В основе обучения математике в университетах теория множеств лежит и сегодня. Одно время казалось, что теория множеств действительно позволила выполнить честолюбивый план построения математики как логически безупречной науки, имеющей критерий истины внутри себя. Знаменитый французский математик Анри Пуанкаре (Poincare, 1854—1912) писал в 1900 г. в адрес Второго всемирного математического конгресса: "Теперь (после появления теории множеств) математика полностью арифметизирована. Мы можем сказать сегодня, что в математике достигнута абсолютная строгость".

Однако как раз на грани XIX и XX веков в теории множеств были обнаружены противоречия (парадоксы), не разрешенные целиком и до сих пор; они сделали сомнительной веру в абсолютную истинность и строгость математики самой по себе, без ее сопоставления с реальным миром.

Рассмотрим, для примера, один из парадоксов теории множеств, обнаруженный Б. Расселом (Russell, 1871—1970) в 1903 г. Большинство множеств не содержат само себя в качестве элемента. Так, множество всех натуральных чисел — это не натуральное число; множество всех людей земли — это не человек. Назовем такие множества обыкновенными. Однако существуют и необыкновенные множества, содержащие самих себя в качестве элемента. Таково, например, "множество всех мыслимых множеств", оно само является множеством.

Рассмотрим теперь "множество всех обыкновенных множеств", назовем его "множеством *M*". Каким будет это множество — обыкновенным или необыкновенным? Предположим, что оно необыкновенное. Тогда оно встречается среди своих элементов, а этого не может быть, ибо, по условию, элементами множества *M* являются лишь обыкновенные множества. Таким образом, первое предположение приводит к противоречию. Остается второе предположение: множество *M* — обыкновенное. Но тогда оно не встречалось бы среди своих элементов, которые исчерпывают собой все обыкновенные множества. Следовательно, множество *M* должно быть необыкновенным, что опять приходит в противоречие с нашим условием. Таким образом, и первое, и второе предположения приводят к противоречию. Это противоречие (парадокс Б. Рассела) не является единственным; в теории множеств существуют и другие противоречия (парадокс Бурали—Форти, парадокс Ришара и т. п.). Теория множеств, лежащая в основе современной математики, внутренне противоречива.

Этому не следует удивляться, поскольку математика отражает действительность (действительность внешнего мира и действительность нашего мышления), а действительность в своих глубоких основах, как показал еще Гегель, всегда диалектически противоречива.

Наличие противоречий в основаниях математики (в теории множеств) не подрывает и не должно подрывать доверия к истинности математических теорем. И в математике критерием истины является опыт, практика. Не нужно только понимать этот критерий слишком прямолинейно и упрощенно. Единичный опыт, действительно, не может ни подтвердить, ни опровергнуть математической теоремы. Под критерием практики следует понимать человеческую практику в целом, в ее историческом развитии. А история математики показывает нам, что математические истины — как и истины других наук — развиваются, совершенствуются, уточняются (а иногда и опровергаются, т. е. оказываются не истинами) в ходе деятельности людей.

Обнаружение противоречий в основаниях математики опровергло лишь претензии идеалистически настроенных математиков на "абсолютную строгость" их науки, единственным критерием истинности которой является, якобы, отсутствие противоречий, а не опыт, не практика человечества, взятая в целом. Так, Анри Пуанкаре писал в своей работе "Наука и метод": "Математика не зависит от существования материальных вещей; в математике слово "существовать" может иметь только один смысл — оно означает устранение от противоречия". Там же Пуанкаре писал в 1900 г. (мы уже цитировали), что "сегодня в математике достигнута абсолютная строгость". Развитие математики (и теории множеств в том числе) опровергло эти претензии Пуанкаре.

Рассмотрим теперь очень коротко основные направления исследований по основаниям математики в XX веке, после обнаружения парадоксов теории множеств. Наличие противоречий в основаниях математики, естественно, вызывало беспокойство и побуждало к напряженным исследованиям, тем более что логические следствия теории множеств приводили иногда к весьма странным теоремам. Так, в 1904 году немецкий математик Эрнст Цермело (E. Zermelo, 1871—1953) высказал утверждение: в любом семействе множеств можно в каждом множестве выделить определенный элемент (например — наименьший). Для конечных множеств утверждение Цермело очевидно, для бесконечных уже совсем не очевидно, и Цермело предложил принять это утверждение в качестве аксиомы, которая получила потом название "аксиома выбора" или "аксиома Цермело". Следствия этой аксиомы оказались совершенно неожиданными. Так, опираясь на нее, польские математики С. Банах (Banach, 1892—1945) и А. Тарский (Tarski, 1901—1983) доказали теорему о том, что сферу радиуса R можно разбить на конечное число таких неперекрывающихся частей, что, перемещая их как твердые тела и прикладывая их друг к другу соответствующим образом, можно получить новую сферу радиуса $2R$, причем не теряется ни одной точки первой сферы и не вводится новых точек.

Разумеется, такая теорема, означающая, что возможно "творение из ничего", противоречила всем представлениям физики, но доказана она была совершенно строго. При объяснении этого парадокса среди математиков возникли разногласия. Многие считали, что аксиома Цермело просто не верна, и ее следует исключить из науки. Однако внимательное исследование показало, что доказательства многих важных теорем, лежащих в основе математического анализа, используют в скрытом виде эту аксиому и опираются на нее. Вопрос о правомерности и применимости аксиомы Цермело окончательно не решен.

Д. Гильберт писал в 1925 г.: "Надо согласиться, что состояние, в котором мы находимся сейчас в отношении парадоксов, на продолжительное время невыносимо. Подумайте: в математике — этом образце достоверности и истинности — образование понятий и ход умозаключений, как их всякий изучает, преподает и применяет, приводят к нелепости. Где же искать надежность и истинность, если даже само математическое мышление дает осечку?"

Отметим сразу, что обнаружение противоречий в основаниях логических рассуждений математики не оказало отрицательного влияния на доверие к практическим выводам и рекомендациям прикладной математики. В прикладной математике все выводы и рекомендации, перед тем как быть переданными для использования, все равно всесторонне проверялись — даже в те времена, когда искренне верили, что безупречно проведенное математическое доказательство обеспечивает абсолютную строгость. Проверка была необходима уже потому, что доказательства проводят люди, а история математики много раз показывала, что человеку свойственно ошибаться, и не допустить ни одной элементарной ошибки в длинной цепи логических рассуждений весьма трудно. Поэтому открытие диалектических противоречий в основаниях математики доверия к прикладным результатам не подорвало.

Отметим, что в 20-х годах XX века работы А. Тарского по математической логике показали, что грамматики естественных языков (русского, английского, польского и т. д.) не обладают должной степенью однозначности для того, чтобы обеспечить абсолютную строгость доказательства. Поясним результаты А. Тарского наглядным сравнением: пусть некоторый математический текст, написанный на русском языке, переводчик *A* переводит на английский язык, затем другой переводчик *B* переводит обратно на русский, новый переводчик *C* — переводит снова на английский и т. д. Даже если все переводчики квалифицированны и добросовестны, после достаточно длинной цепочки прямых и обратных переводов получим текст, сильно отличающийся от исходного. Цепочка прямых и обратных переводов подчеркивает и выявляет неполную однозначность выражений, свойственную любому естественному языку.

Из результатов А. Тарского следует, что доказательство, сформулированное на любом из естественных языков, уже по одному этому не может быть абсолютно строгим. Для преодоления ограничений, связанных с неоднозначностью естественного языка, были разработаны целиком формализованные языки математической логики; эти языки, однако, очень сложны. Доказательства ряда теорем на языке математической логики занимают, как известно, по нескольку сотен страниц каждое. Поэтому и до сего дня подавляющее большинство математических работ пишется на естественных языках, хотя это и не строго. Это обстоятельство просто подчеркивает еще раз, что поиски абсолютной строгости бессмысленны, и что вообще строгость рассуждений и доказательств — это, хотя и важное, но далеко не самое главное в математике.

Обнаружение парадоксов теории множеств стимулировало развитие еще одного интересного направления — так называемой конструктивной математики. Представители этого направления отрицают законность применения в математике абстракции актуальной бесконечности (на этой абстракции, собственно, и основывается современная математика). Признав незаконность актуальной бесконечности, представители конструктивной математики должны были тем самым отказаться от закона исключенного третьего вне сферы конечных множеств, отказаться от использования теорем существования и т. п. Все это резко осложняет математические построения. Возможно ли обойтись в математике без понятия актуальной бесконечности — этот вопрос пока остается открытым. Однако новый подход к основам математики со стороны представителей конструктивного направления позволил им получить ряд новых и интересных результатов. В области конструктивного направления успешно работали и работают многие российские математики — Андрей Андреевич Марков (1903—1979), Николай Александрович Шанин (род. 1919 г.) и др.

Не менее интересными были исследования в области аксиоматики, аксиом геометрии и арифметики, начало которым положили работы Н. И. Лобачевского, оживившие интерес к аксиоматике геометрии. Подробный анализ показал, что аксиомы и постулаты, введенные Евклидом в попытке дать безукоризненно строгое обоснование геометрии, не достигают поставленной Евклидом цели. Фактически Евклид при доказательствах своих теорем пользуется в неявном виде аксиомами, не включенными в начальный список и нигде точно не сформулированными. Неудовлетворительными были и определения Евклида (например, "точка есть то, что не имеет частей", "линия есть длина без ширины" и т. п.).

Поэтому в конце XIX века Пеано (Peano, 1858—1932), Паш (Pasch, 1843—1911) и особенно — Д. Гильберт произвели пересмотр определений и аксиом Евклида. Ими было предложено ввести первичные, не определяемые понятия —

"точка", "прямая", "плоскость". Свойства этих понятий выражаются через систему аксиом. Д. Гильберт предложил разделить предлагаемые им аксиомы геометрии на группы.

❒ Аксиомы соединения.

1. Две точки определяют единственную проходящую через них прямую.
2. На каждой прямой лежит не менее двух точек; существуют, по крайней мере, три точки, не лежащие на одной прямой.
3. Через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит единственная плоскость. В каждой плоскости лежит, по крайней мере, одна точка.
4. Если две точки прямой лежат в одной плоскости, то и все точки этой прямой лежат в той же плоскости.
5. Если две плоскости имеют одну общую точку, то они имеют и еще, по крайней мере, одну точку.
6. Существуют, по крайней мере, четыре точки, не лежащие в одной плоскости.

❒ Аксиомы порядка.

1. Если B лежит между A и C, то A, B и C — различные точки прямой, и B лежит также между C и A.
2. При данных двух точках A и B на прямой существует и точка C, лежащая между A и B.
3. Из трех данных точек на прямой не более чем одна лежит между двумя другими.
4. Прямая, лежащая в той же плоскости, что треугольник ABC, и пересекающая отрезок AB, пересечет обязательно отрезок BC или отрезок AC (аксиома Паша).

❒ Аксиомы конгруэнтности.

1. На любой прямой из любой ее точки можно отложить отрезок, равный данному.
2. Два отрезка, равные третьему, равны между собой.
3. Пусть A, B, C — точки одной прямой и A_1, B_1, C_1 — тоже точки одной прямой и $AB = A_1B_1$; $BC = B_1C_1$; если отрезки AB и BC, а также A_1B_1 и B_1C_1 не имеют общих точек, то $AC = A_1C_1$.
4. От любой точки прямой по данную ее сторону можно построить один и только один угол, равный данному; каждый угол равен самому себе.

5. Если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ стороны $AB = A_1B_1$ и $AC = A_1C_1$ и угол BAC равен углу $B_1A_1C_1$, то угол ABC равен углу $A_1B_1C_1$.

- ☐ Эта группа состоит из одной "аксиомы о параллельных": через данную точку в данной плоскости можно провести не более одной прямой, не пересекающей данной. Как мы уже упоминали, это эквивалентно пятому постулату Евклида.
- ☐ Аксиомы непрерывности.

1. Если AB и CD — два произвольных отрезка, то на AB существует ряд точек $A_1, A_2, ..., A_n$, таких, что $AA_1 = A_1A_2 = ... = A_{n-1}A_n = CD$, и точка B лежит между A_{n-1} и A_n (аксиома Архимеда).
2. Точки прямой нельзя дополнить новыми точками, которые можно было бы считать принадлежащими той же прямой без нарушения других аксиом.

Эта система аксиом, сформулированная впервые Д. Гильбертом в 1899 году, лежит в основе современной геометрии. Читателю полезно сопоставить ее с аксиомами и постулатами Евклида, приведенными в *главе 1*. Сопоставление показывает, какой большой путь проделала математика за 24 века своей истории — от Евклида до Гильберта. К системе аксиом в настоящее время предъявляются следующие требования.

1. Полноты — т. е. любую теорему можно доказать, не прибегая к новым аксиомам, кроме уже сформулированных.
2. Независимости — т. е. никакую аксиому нельзя вывести как теорему из остальных.
3. Непротиворечивости — т. е. из аксиом нельзя вывести противоречивые следствия.

Наиболее трудно доказать непротиворечивость системы аксиом. Мы уже рассказывали, какие трудности возникли перед Н. И. Лобачевским и Гауссом при попытках доказать непротиворечивость геометрии Лобачевского. В конце концов Бельтрами и Ф. Клейн решили этот вопрос путем сведения его к другому — они доказали, что геометрия Лобачевского непротиворечива, *если* непротиворечива евклидова геометрия. Но возник вопрос — а сама евклидова геометрия противоречива или нет?

Д. Гильберту в начале XX века удалось сделать следующий шаг и доказать, что евклидова геометрия непротиворечива в той же мере, что и арифметика; *если* непротиворечива арифметика, то непротиворечива и геометрия.

Исследования Д. Гильберта подвели прочный фундамент аксиом под геометрию. Теперь встал вопрос — а нельзя ли построить систему аксиом, на которой основывалась бы арифметика (а через посредство арифметики — и математический анализ)? Долгое время казалось, что такая система аксиом возможна. Тем неожиданнее оказался результат, полученный молодым австрийским математиком Куртом Геделем (Gödel, 1906—1978) в 1931 году.

Гедель показал, что для арифметики (как и для большинства других дисциплин — геометрия является исключением) невозможно составить полную систему аксиом, и невозможно это сделать потому, что всегда найдутся истинные теоремы, которые, тем не менее, нельзя доказать, исходя из любой системы аксиом — как бы мы эту систему ни расширяли. Гедель показал, что существует различие между истинностью и выводимостью — есть теоремы истинные, но невыводимые, недоказуемые в рамках данной системы аксиом. Постараемся представить себе наглядно результат Геделя. Пусть мы взяли за основу некоторую систему аксиом и выводим из нее всевозможные следствия. Начиная от Евклида и до 1931 года, математики были уверены, что эти следствия образуют некоторый "материк истины", и до любой точки этого материка мы можем добраться "сухопутным путем", путем дедуктивного рассуждения из принятых аксиом. Гедель показал, что структура истины сложнее и напоминает скорее материк, окруженный островами. Существует бесконечное количество утверждений истинных, но недоказуемых в рамках принятой системы аксиом, как бы мы ее ни расширяли. Эти утверждения образуют "острова истинности" за пределами дедуктивного материка.

Исследования Геделя существенно уточнили наши представления о математике. Они показали утопичность надежд на построение единого здания чисто дедуктивной, "безупречно строгой" математики — по образцу "Начал" Евклида.

Еще одним уточнением наших представлений об основаниях математики явились результаты Курта Геделя и американского математика Коэна в области "гипотезы континуума" Георга Кантора.

Мы уже упоминали ранее, что в основе математики в целом и, особенно, в основе математического анализа лежит теория множеств, и одной из важнейших теорем теории множеств является "теорема о мощности контину-ума", сформулированная еще Г. Кантором. Утверждение теоремы заключается в том, что не существует множеств, имеющих мощность, промежуточную между мощностью счетного множества и мощностью континуума. Г. Кантор упорно пытался доказать эту важнейшую теорему, но потерпел неудачу. Поэтому теорему стали называть "гипотезой континуума". Многие математики пытались доказать "гипотезу континуума", но без успеха. Было предложено принять "гипотезу континуума" в качестве аксиомы и основывать на ней построение теорем множеств. К. Гедель показал в 1939 году, что "гипотеза континуума" не противоречит остальным аксиомам теорем множеств и поэтому можно строить теорию множеств, основываясь на "аксиоме континуума".

Окончательно "проблема континуума" была решена в I960—1963 гг. американским математиком Коэном (Cohen, родился в 1934 г.). За успехи в области исследования теории множеств Коэн в 1966 году был удостоен высшего отличия математика — медали Филдса.

Коэн показал, что остальным аксиомам теории множеств не противоречит ни "гипотеза континуума", ни ее отрицание, т. е. допущение о том, что существуют множества промежуточной мощности, лежащей между мощностью счетного множества и мощностью континуума. Ситуация очень напоминает ту, которая сложилась в геометрии после исследований Лобачевского и Бельтрами: подобно тому, как существуют две логически непротиворечивых геометрии — Лобачевского и Евклида — и вопрос о том, какая из них правильнее отображает свойства действительного мира, должен решаться на основе критерия опыта, практики, точно так же существуют и две логически непротиворечивых теории множеств: в основе первой лежит "гипотеза континуума", в основе второй — ее отрицание.

Можно предполагать, что в дальнейшем выяснится, какая из двух возможных теорий множеств (теория, опирающаяся на "гипотезу континуума", окончательно переведенную в ранг аксиомы, или теория, опирающаяся на ее отрицание, на существование множеств промежуточной мощности) будет лежать в основе математики и математических доказательств.

История исследований в области теории множеств, обоснования математического анализа и математики в целом будет еще раз — и более подробно — рассмотрена в *главе 8* — уже в непосредственной связи с вопросами, поднятыми в новых "Программах" кандидатского экзамена по истории и философии науки.

Глава 6

Развитие математики в России. Петебургская и московская математические школы

6.1. Становление российской математики

Еще со времен Киевской Руси восточно-славянские племена оживленно общались с другими народами, обменивались с ними знаниями и навыками. Уровень математических знаний Древней Руси был вполне сопоставим с уровнем знаний ее соседей. Наши предки умели выполнять арифметические действия с многозначными числами, вычислять площади земельных участков, умели и многое другое.

Реформы Петра I, при котором Московское царство преобразовалось в Российскую империю, способствовали еще более тесным связям России с Западной Европой. Потребности молодого государства требовали широкого использования научных знаний, и 24 января 1724 года Петр I подписал Указ об организации Академии наук, а при ней — университета и гимназии. В 1999 году Российской Академии наук и Санкт-Петербургскому университету исполнилось 275 лет.

Первые профессора молодой академии приглашались из-за границы; так, в 1727 году был приглашен Леонард Эйлер, который работал в Петербурге с 1727 года по 1741 год, а затем еще раз с 1766 по 1783 год.

Деятельность Эйлера в Академии наук и в университете была многообразна. Он выполнял многочисленные поручения правительства — в области картографии России, артиллерии, оптики, публиковал как глубокие теоретические работы, так и учебники, воспитал ряд учеников, которые продолжали его дело — правда, уже не на таком высочайшем уровне, как он.

В первой половине XIX века наиболее известными математиками России были академики Виктор Яковлевич Буняковский (1804—1889) и Михаил Васильевич Остроградский (1801—1861), опубликовавшие ряд первоклассных работ. Однако в Западной Европе к тому времени еще не привыкли со вниманием относиться к российской науке и следить за ее достижениями. Поэтому выдающиеся результаты российских ученых с опозданием усваивались мировым научным сообществом.

Так, знаменитое и широко используемое неравенство Буняковского

$$\left(\int_a^b u(x)v(x)\,dx\right)^2 \le \int_a^b u^2(x)\,dx \cdot \int_a^b v^2(x)\,dx$$

за рубежом связывают с именем Шварца (Schwarz K., 1843—1921), хотя Шварц открыл его только в 1875 году, на 16 лет позже публикации В. Я. Буняковского.

В 1834 году в изданиях Российской Академии наук была опубликована памятная записка ("мемуар") М. В. Остроградского, а через шесть лет, в 1840 году, Парижская Академия наук объявила конкурс на премию за решение той же самой, уже решенной Остроградским, проблемы. Лишь в 1861 году мемуар М. В. Остроградского в полном переводе на английский язык был издан как приложение к книге Тотгентера по истории вариационного исчисления (цитирую по книге Гнеденко Б. В. Очерки по истории математики в России. — М., Л.: ОГИЗ, 1946).

Мировое признание российской математики пришло после того, как во второй половине XIX века заявила о себе петербургская математическая школа, сформировавшаяся, прежде всего, вокруг великого русского математика Пафнутия Львовича Чебышёва (1821—1894)[8].

6.2. Петербургская математическая школа

Чебышёв родился в 1821 году в старинной дворянской семье в Калужской губернии. Первоначальное образование он получил дома, затем с 1837 года учился в Московском университете, окончив его в 1841 году. В Москве, в 1846 году, Чебышёв защитил магистерскую диссертацию "Опыт элементарного изложения теории вероятностей", но уже в 1847 году переехал в Петербург, где был утвержден доцентом Петербургского университета и начал чтение лекций. В 1850 году он был избран экстраординарным, а в 1860 году — ординарным профессором Петербургского университета, в котором он читал лекции 35 лет — с 1847 по 1882 год. Одновременно П. Л. Чебышёв работал в

Академии наук, куда он в 1853 году был избран адъюнктом, в 1858 году — академиком, а также много и плодотворно работал в Артиллерийском комитете; таким образом — и это весьма важно отметить — П.Л. Чебышёв не был "исключительно преподавателем": с преподаванием он соединял и научную, и чисто практическую деятельность; это не могло не наложить отпечатка и на его преподавание в университете.

Первые выдающиеся работы П. Л. Чебышёва относились к наиболее отвлеченному отделу математики — теории чисел. Этой теме была посвящена и его докторская диссертация "Теория сравнений" (1849), и знаменитая статья "Об определении числа простых чисел, не превосходящих заданной величины", опубликованная в 1851 году.

Однако постепенно научные интересы Чебышёва перемещаются в область механики. В 1852 году он получает заграничную командировку. Чебышёв использовал эту возможность для личного знакомства с выдающимися зарубежными математиками — Коши, Лиувиллем, Эрмитом — и, одновременно, он с величайшим интересом знакомился с передовой в те годы французской промышленностью, центральным звеном которой была паровая машина. "Из многих предметов исследования, — писал П. Л. Чебышёв в своем отчете о заграничной командировке, — которые представились мне при рассмотрении и сличении между собой различных механизмов передачи движения — особенно в паровой машине, где и экономия в топливе, и прочность машины много зависят от способов передачи работы пара, я особенно занялся теорией механизмов, известных под названием параллелограммов". Шарнирные механизмы (в то время "параллелограммы") широко применялись тогда в паровых машинах. Задачей этих механизмов было обеспечение движения поршня, в наименьшей мере отклоняющегося от прямолинейного. В ходе исследования параллелограммов Чебышёв, по его собственным словам, "встретил вопросы анализа, о которых до сих пор знали очень мало". Это были вопросы о построении функций наилучшего приближения. Чебышёв глубоко разработал теорию подобных функций и, в частности, открыл знаменитые полиномы, в наименьшей степени уклоняющиеся от нуля, — полиномы вида:

$$T_n(x) = \cos(n \ \arccos x); \ n = 1, \ 2, \ 3, \ \ldots$$

Эти полиномы в дальнейшем были названы полиномами Чебышёва и получили многообразные применения.

Таким образом, теоретические открытия Чебышёва вырастали из вопросов практики, на которые он горячо откликался. Этот путь — от насущных практических задач к теоретическим обобщениям — он считал наиболее плодотворным. Вот что говорил об этом сам Чебышёв в речи на торжественном акте Петербургского университета в 1856 году: "Науки математические с самой глубокой древности обращали на себя особенное внимание; в настоящее время они получили еще более интереса по влиянию своему на искусства и промышленность. Сближение теории с практикой дает самые благотворные результаты, и не одна только практика от этого выигрывает; сами науки развиваются под влиянием ее: практика открывает им новые предметы для исследования или новые стороны в предметах, давно известных".

И тут же в своей актовой речи (кстати, названной им "Черчение географических карт") Чебышёв дает пример этого благотворного взаимодействия конкретных задач практики и их теоретического обобщения. Чебышёв рассматривает одну из центральных задач картографии — какая проекция является наиболее выгодной для создания карты конкретной страны — и показывает, что задача эта не сводится к обычным задачам дифференциального или вариационного исчисления, но может быть решена на основе теории функций, наименее уклоняющихся от нуля, разработанной им ранее для задач о параллелограммах паровых машин. На основе этой теории Чебышёв дает решение как в общем виде (в форме принципа: "на границе изображения масштаб постоянен"), так и конкретное решение для карты Европейской части России, которое позволило снизить погрешность изображения с $^1/_{34}$ (достигаемой при стереографической проекции) до $^1/_{50}$.

Любопытно, что доказать строго свой принцип выбора наилучшей проекции ("на границе изображения масштаб постоянен") Чебышёву в то время не удалось, хотя он проверил его на примерах, был уверен в его правильности и широко им пользовался. Полное доказательство принципа Чебышёва было дано лишь 40 лет спустя, в 1896 году, русским математиком Дмитрием Александровичем Граве (1863—1939) в его докторской диссертации "Об основных задачах математической теории построения географических карт", защищенной В Петербургском университете уже после смерти П. Л. Чебышёва.

Мы рассмотрели только немногие из научных результатов П. Л. Чебышёва; всего с 1843 по 1894 год им опубликовано 69 работ, многие из которых получили мировую известность. (Любитель сравнений может заметить, что П. Л. Чебышёв опубликовал вдесятеро меньше работ, чем О. Коши, но это лишь еще раз подчеркивает, что дело не в количестве работ, а в их значимости.) Не меньшее значение имела и деятельность П. Л. Чебышёва в качестве профессора Петербургского университета. Вот что пишет о лекциях Чебышёва его ученик А. М. Ляпунов: "Курсы его не были обширными, и при изложении их он заботился не столько о количестве сообщаемого материала, сколько о выяснении принципиальных сторон трактуемых вопросов. Отличаясь живым и увлекательным изложением, лекции его сопровождались множеством интересных замечаний относительно значения и важности тех или других вопросов или научных методов. Замечания эти высказывались иногда мимоходом по поводу какого-нибудь конкретного случая, но всегда глубоко западали в умах его слушателей. Вследствие этого лекции его имели высокое развивающее значение, и слушатели его после каждой лекции выносили нечто существенно новое в смысле большей широты взглядов и новизны точек зрения.

П. Л. Чебышёв почти не пропускал лекций. По крайней мере, за два года, в течение которых я был его слушателем, я не помню, чтобы хотя один раз его лекция не состоялась. В аудитории он появлялся всегда точно в назначенное время и тотчас же, не теряя ни секунды, приступал к продолжению выводов, начатых в предшествовавшую лекцию. Вычисления он производил чрезвычайно быстро, вследствие чего, несмотря на то, что был прекрасным калькулятором, часто делал ошибки в выкладках, и за ходом вычислений нужно было следить очень внимательно, чтобы вовремя предупредить о сделанной ошибке, о чем он всегда просил своих слушателей. Когда, наконец, получался желаемый вывод, П. Л. Чебышёв садился в кресло, ставившееся для него всегда у первой парты, и вот тут-то и начинались те разнообразные замечания, которые придавали особый интерес его лекциям и которых с нетерпением ждала вся аудитория. Весьма часто по поводу только что решенного вопроса Чебышёв высказывал свое мнение о тех или других работах, относящихся к тому же вопросу. Иногда он вспоминал при этом некоторые эпизоды из своих заграничных поездок, рассказывал о беседах по поводу того же вопроса с кем-либо из иностранных ученых. После более или менее продолжительной беседы этого рода, служившей для него отдыхом, П. Л. Чебышёв, быстрый как в речи, так и во всех своих действиях, быстро вставал, брался за мел и приступал к дальнейшим выводам. К характеристике внешней стороны его лекций должно прибавить, что он никогда не оставался в аудитории по окончании времени, назначенного для лекции, и бросал мел в тот же момент, как раздавался звонок, на каком бы месте при этом ни пришлось оборвать начатые вычисления".

Заметим, что лекции П. Л. Чебышёва по вычислению определенных интегралов, теории конечных разностей и теории вероятностей, дословно записанные А. М. Ляпуновым, были изданы АН СССР в 1936 году, и желающие могут с ними ознакомиться. Наибольшей научной заслугой П. Л. Чебышёва А. М. Ляпунов справедливо считает создание школы математиков, известной как петербургская математическая школа, к которой принадлежали А. Н. Коркин, Е. И. Золотарев, А. А. Марков, К. А. Поссе, Д. А. Граве, В. А. Стеклов, Г. Ф. Вороной и, прежде всего, сам А. М. Ляпунов, о творчестве которого мы будем говорить отдельно, в *главе 13*, посвященной теории автоматического управления и регулирования.

Отметим, что до известной степени к петербургской математической школе можно отнести и Софью Васильевну Ковалевскую (1850—1894). Хотя она училась в Германии, у К. Вейерштрасса, но, вернувшись в 1874 г. в Россию, в Петербург, она активно общалась с П. Л. Чебышёвым и его учениками. В 1889 году по предложению Чебышёва ее избрали членом-корреспондентом Академии наук. В тесном контакте и оживленном общении с петербургскими математиками она работала до своего отъезда в Швецию в 1883 году. (Биография С. В. Ковалевской подробно описана во многих книгах, как научных, так и художественных, поэтому здесь нет необходимости останавливаться на биографии Софьи Васильевны более подробно.)

Вот как определяет А. М. Ляпунов основные черты петербургской школы: "П. Л. Чебышёв и его последователи остаются постоянно на реальной почве, руководясь взглядом, что только те изыскания имеют цену, которые вызываются приложениями (научными или практическими), и только те теории действительно полезны, которые вытекают из рассмотрения частных случаев.

Детальная разработка вопросов, особенно важных с точки зрения приложений и, в то же время, представляющих особенные теоретические трудности, требующие изобретения новых методов и восхождения к принципам науки, затем обобщение полученных выводов и создание этим путем более или менее общей теории — таково направление большинства работ П. Л. Чебышёва и ученых, усвоивших его взгляды.

Насколько подобное направление может быть плодотворным в чисто научном отношении, это, вероятно, показывает вся научная деятельность П. Л. Чебышёва, который пришел к постановке и решению совершенно новых и важных вопросов анализа, исходя из задач прикладного характера, иногда притом чисто практических. Таков, впрочем, путь многих важных открытий в области математики", — заканчивает А. М. Ляпунов.

Отметим теперь, что, несмотря на традиции петербургской математической школы, в начале XX века на физико-математическом факультете Петербургского университета (до 1919 года этот факультет объединял и физиков, и математиков) наблюдался крен в сторону математической абстракции, от которого страдали прежде всего физики объединенного факультета. Особенно тяжело приходилось молодым физикам, готовившимся к сдаче магистерских экзаменов. Математики объединенного факультета не хотели признавать, что человек, готовящийся к профессии физика, может (и должен) предъявлять к своему математическому образованию совсем другие требования, чем "чистый" математик, и экзаменовали молодых физиков "по всей строгости" своей науки. Это приводило ко многим трагедиям. В воспоминаниях о Павле Сигизмундовиче Эренфесте (1880—1933) приводился характерный эпизод — в 1912 году на Всероссийском съезде естествоиспытателей и врачей в Москве П. С. Эренфест с увлечением рассказывал о выдающемся научном открытии молодого тогда физика Д. С. Рождественского (1876—1940). Работа, действительно, была блестящей, и аудитория закидала П. С. Эренфеста вопросами: "А где же сам автор работы?" "Где?" — со слезами на глазах переспрашивал П. С. Эренфест и отвечал: "Автор этого открытия, имеющего мировое значение, не имел времени приехать в Москву; он, не разгибая спины, готовится к магистерскому экзамену по математике. Чтобы сдать эти экзамены, надо прочесть вот какие книги". Эренфест подошел к доске и, волнуясь от негодования, начал выписывать длинную колонку книг, ознакомление с которыми требовалось программой экзаменов.

И это была, конечно же, участь не одного Рождественского. О сложившемся положении со стилем преподавания математики на физико-математическом факультете А. Ф. Иоффе говорил в 1910 году: "Это — трагедия петербургской физики" (цитирую по книге Френкеля В. Я. Пауль Эренфест. — М., 1977).

И не удивительно, что когда в 1919 году из физико-математического факультета Петроградского университета был выделен факультет физический, и к организации его был привлечен Д. С. Рождественский, он прежде всего провел реформу преподавания математики, приведя ее в соответствие с действительными нуждами физики. Реформа встретила яростное сопротивление профессоров-математиков. "Университет будет теперь выпускать поверхностно образованных людей, — утверждали они, — вместо выпускников, приученных к математической строгости мышления". Д. С. Рождественский, по свидетельству мемуариста, "отвечал математикам резко, даже с оттенком презрительности, как людям, которые оторвались от жизни и не понимают ее требований" ("Воспоминания о Рождественском", изд-во "Наука", 1976).

Рождественский довел реформу до конца — новый курс математики, учитывающий нужды физиков, был составлен Владимиром Ивановичем Смирновым (1887—1974) совместно с Я. Д. Тамаркиным, который впоследствии эмигрировал, так что Смирнов продолжил работу уже один. Из этой работы вырос потом столь известный "Курс высшей математики" В. И. Смирнова в пяти томах. Популярность этого курса (переведенного на многие языки мира) определилась тем, что он излагал математические вопросы с точки зрения приложений и, прежде всего, приложений в физике. Деятельность петербургской математической школы наглядно показала, насколько плодотворным для математики может быть влияние приложений.

Представителем петербургской математической школы, с особенным успехом работавшим в области прикладной математики, был Алексей Николаевич Крылов (1863—1945).

А. Н. Крылов родился в 1863 году в небогатой дворянской семье, в 1878 году поступил в Морское училище, которое закончил в 1884 году, получив воинское звание мичмана. Еще в Морском училище, во многом под влиянием А. М. Ляпунова, своего двоюродного брата по матери, А. Н. Крылов начал глубоко интересоваться математикой, изучая самостоятельно университетские курсы. После окончания Морского училища А. Н. Крылова привлекли к работе по изучению девиации магнитного компаса и методам ее уничтожения. В 1888—1890 годах А. Н. Крылов учился в Морской академии, где курс математики вел Александр Николаевич Коркин (1837—1908) — один из лучших представителей петербургской математической школы. По окончании академии А. Н. Крылов много лет преподавал в Морском училище и Морской академии, совмещая преподавание с большой практической работой. В разное время А. Н. Крылов работал заведующим судостроительным бассейном (с 1900 г.), главным инспектором кораблестроения (с 1908 г.), председателем Морского технического комитета (с 1908 г.), директором Главной физической обсерватории (с 1916 г.), начальником Морской академии (с 1919 г.), директором Физико-математического института Академии наук с 1927 года (действительным членом Академии наук А. Н. Крылов был избран еще в 1916 году).

Все эти практические работы А.Н. Крылова не могли не оказать влияния на направленность его математических трудов. А. Н. Крылов блестяще знал математику, но его работы почти исключительно были посвящены математике прикладной. А. Н. Крылов — это классик прикладной математики. Разберем поэтому более подробно основные особенности его работ.

Тематика работ А. Н. Крылова разнообразна: они посвящены теории и расчету качки корабля на морском волнении, теории показаний корабельных гирокомпасов и магнитных компасов, расчету напряжений и деформаций в элементах судовых конструкций и многим другим практическим задачам кораблестроения и мореходного дела. Какие же основные черты пронизывают все эти столь разнообразные труды А. Н. Крылова? Что позволяет считать эти труды классическими работами по прикладной математике? Отметим, прежде всего, что важнейшие работы А. Н. Крылова, будь это работы по исследованию качки судов, показаний компасов или других явлений, прежде всего включают в себя подробный выбор, анализ и обоснование принимаемой им математической модели исследуемого явления. Именно обоснование правильного выбора математической модели исследуемого объекта — а это, в свою очередь, невозможно без хорошего знания физической сущности и практических особенностей работы объекта — и составляет самую важную, решающую часть исследований А. Н. Крылова. Крылов рассматривает предлагаемую им математическую модель с двух в равной мере важных точек зрения: во-первых, математическая модель должна достаточно хорошо отражать хотя бы основные черты изучаемого явления — для того, чтобы результаты расчета по математической модели достаточно хорошо совпадали с реальностью, а, во-вторых, математическая модель должна быть разрешимой, должна допускать конкретное, доведенное до конца решение, которое можно было бы сопоставить с экспериментом.

В выборе такой подходящей математической модели и заключается главная трудность работы прикладного математика, а в преодолении этой трудности и проявляется, прежде всего, его искусство. Действительно, бесчисленное количество плохих работ по прикладной математике отличается от работ хороших присутствием одного из двух решающих недостатков: либо избранная автором математическая модель не соответствует в должной мере реальному процессу, и поэтому все исследование бесполезно, либо избранная модель чрезмерно сложна и превышает возможности автора довести решение до конца. А. Н. Крылов умел избегать обоих этих недостатков, и поэтому изучение его работ является столь поучительным для всех, работающих в области прикладной математики, — тем более, что работы эти доступны, они собраны в опубликованном Академией Наук СССР в 1948—1951 годах двенадцатитомном собрании его сочинений.

Еще одна характерная черта работ А. Н. Крылова, делающая его классиком прикладной математики, — это доведение результатов до ясных, четких и понятных практических рекомендаций. "Чистые" математики часто ограничиваются формулировкой и доказательством теорем. В противоположность этому А. Н. Крылов при изложении своих результатов вообще не пользуется словом "теорема". Вместо этого он подробно и досконально объясняет читателю — почему, на каких основаниях выбрал он математическую модель; каким образом следует проводить вычисления по этой модели для того, чтобы получить согласие между вычислением и реальной действительностью, какие практические трудности могут встретиться в вычислениях, и как лучше всего эти трудности преодолеть. Для работ прикладного характера такой способ изложения чрезвычайно важен.

В сочинениях А. Н. Крылова можно найти и его взгляды на преподавание прикладной математики, выраженные с присущей А. Н. Крылову яркостью и силой.

Во второй половине XIX века наметилось расхождение в стиле преподавания математики в университетах и в технических учебных заведениях. Вот что писал об этом А. Н. Крылов в 1916 г.: "В последние 30—40 лет большая часть первоначальных положений и определений математических понятий подвергалась обстоятельнейшей критике, приведшей, с одной стороны, к уточнению этих понятий и полной логической строгости выводов, но, с другой стороны, — это уточнение привело к растянутости многих рассуждений, к утрате, так сказать, наглядной самоочевидности выводов.

В технической школе такая постановка преподавания противоречит самому духу школы, всей дальнейшей деятельности ее питомцев, самому ее назначению — прежде всего вырабатывать сметку, глазомер, решимость, веру в чертеж и в свидетельства чувств, а не ту как бы умственную трусость, которая заставляет изыскивать доказательства таких истин, которые технику кажутся до доказательства яснее, чем после такового".

Очень интересно говорил А. Н. Крылов и относительно объема сведений по математике, который необходимо давать в технической школе. Вот отрывок из его вступительной лекции, прочитанной в 1932 году для слушателей, желающих повысить знания по математике в Военно-Морской Академии: "Я 45 лет занимаюсь разными вопросами морского дела, требующими приложения математики. За это время некоторые разделы математики приходилось прилагать чуть ли не ежедневно, другие — раз в месяц, третьи — раз в год, а были и такие, которые мне понадобились один раз в 45 лет.

Представьте себе, что я стал бы читать все эти разделы, и вот вам что-либо из этих разделов понадобилось через 37 лет; поверьте, что вы к тому времени так это забудете, что вам придется это как бы вновь выучить, прежде чем прилагать.

Хотя вы и готовитесь быть профессорами в нашей академии, но вы и теперь, и в будущем будете работать над практическим делом, которое всегда требует не столько общих рассуждений, а конкретного ответа; значит, прежде всего надо уметь производить численные вычисления быстро и верно. Численные вычисления вам понадобятся каждый день, поэтому методы их производства и должны быть усвоены в первую очередь.

В общем курсе вы изучали ряды и их общие свойства, но вы не имели практики в применении их к вычислениям с точки зрения быстрого и верного, с требуемой точностью, получения результата. Вы мне не поверите, что в точнейшей из наблюдательных наук — астрономии — нет ни одной точной формулы: всегда пользуются приближенными и получают результат с требуемой степенью точности не только быстрее, но, если можно так выразиться, "вернее", нежели по точной формуле. Вот этим и придется пополнить то, что вы знаете о рядах; в практике с этим вы будете встречаться раз в неделю.

Надо будет также показать вам, как интегрировать с требуемой степенью точности любое обыкновенное дифференциальное уравнение; это вам будет встречаться по крайней мере раз в месяц, а то и чаще. Раз в год будут вам встречаться обыкновенные дифференциальные уравнения, в которых требуется удовлетворить не только заданным начальным, но и заданным граничным условиям; мы постараемся пояснить и этот вопрос".

Конечно, перечень А. Н. Крылова отражает объем знаний по математике, требуемый прикладными задачами кораблестроения в современное А. Н. Крылову время. В другое время и для других специальностей перечень может быть и сокращен, и расширен.

Но неизменно плодотворной остается основная идея А. Н. Крылова — учить надо тому, что действительно потребуется в жизни; круг задач, с которыми будут повседневно сталкиваться выпускники учебного заведения, должен определять собой уровень и программу обучения[9].

Хотя замечания и пожелания А. Н. Крылова по преподаванию прикладной математики непосредственно адресованы высшим техническим учебным заведениям, они во многом относятся и к факультетам прикладной математики университетов. Действительно, положение этих факультетов двойственное: с одной стороны, они находятся в стенах университетов и испытывают давление традиций университетского преподавания математики; с другой стороны — их выпускники будут сталкиваться со столь же конкретными прикладными задачами, как и выпускники технических вузов. В этих условиях учет исторического опыта поможет выработать правильный стиль преподавания.

С петербургской математической школы берет начало всемирная известность и авторитет российской математики (а не только отдельных гениальных ученых, как ранее). Несколько позже не меньшую известность получила московская математическая школа.

6.3. Московская математическая школа

В отличие от Петербурга, где научная жизнь формировалась во многом Академией наук, которая размещалась в Петербурге—Ленинграде с 1724 по 1934 год, в Москве центром науки был Московский университет, основанный в 1755 году. В 1804 году в Московском университете был открыт физико-математический факультет, а в нем — две математические кафедры: кафедра чистой математики и кафедра прикладной математики. Значение университета возрастало постепенно. За 1825—1836 годы физико-математический факультет окончили 119 человек (т. е. в среднем по 11 человек в год), за 1837—1854 годы — уже 453 человека, или в среднем 25 человек в год.

Общее число студентов Московского университета по годам приведено в табл. 6.1.

Таблица 6.1. *Общее число студентов Московского университета по годам*

Год	**Число студентов**	**Год**	**Число студентов**
1765	55	1852	821
1811	215	1856	1203
1820	500	1858	1725
1825	876	1860	1643
1834	500	1863	1744
1848	1198		

Основная масса выпускников Московского университета становилась преподавателями гимназий; возможностей для научной работы в России в XIX веке было еще очень мало.

Однако еще в 1864 году начало свою работу Московское математическое общество, первым руководителем которого стал профессор Николай Дмитриевич Брашман (1796—1866). С 1867 года стал издаваться научный журнал "Математический сборник", выходящий регулярно и в наше время.

В конце XIX века в связи с развитием техники во всех странах мира, в том числе и в России, стала пользоваться все большим спросом и вниманием прикладная математика, т. е. решение разнообразных (и прежде всего технических) задач математическими средствами.

Исследования по прикладной математике начали развиваться как в Московском университете, так и в Высшем техническом училище, основанном в 1832 году (впоследствии оно стало известным как МВТУ им. Н. Э. Баумана). Общепризнанным главой исследований по прикладной математике в Москве стал Николай Егорович Жуковский (1847—1921), много лет преподававший в университете и в Высшем техническом училище. В 1905—1921 годах он был президентом Московского математического общества.

Первые работы Н. Е. Жуковского были посвящены гидродинамике, в том числе — теории гидравлического удара, который был бедствием московского водопровода. Трубы рвались, и рвались они под землей, неизвестно где. К починке можно было приступать лишь тогда, когда вода, наделав много бед, прорывалась на поверхность. Н. Е. Жуковский в 1898 году разработал теорию гидравлического удара, позволяющую рассчитать место разрыва. Теперь уже бригады рабочих с лопатами направлялись в точно указанные места и начинали с недоверием и отвращением делать, по видимости, пустую работу — копать сухую землю. Но, прокопав глубже, они обнаруживали воду и разрыв в трубе — вот тогда они проникались уважением к науке. Наука торжествовала.

К концу XIX века Н. Е. Жуковский все более сосредотачивается на проблемах аэромеханики и авиации. Начиная с 1889 года, появляются его работы по теории полета. В 1906 году опубликована работа "О присоединенных вихрях", позволившая вести расчет подъемной силы крыльев самолетов, в 1910—1911 — работы по определению наивыгоднейших профилей крыла (знаменитые "профили Жуковского"), в 1912—1918 годах им была создана вихревая теория воздушного винта.

Глубоко понимая роль эксперимента в разработке правильной и соответствующей реальности математической теории, Н. Е. Жуковский настоял на том, чтобы в Московском университете была построена одна из первых в мире аэродинамических труб. Трубу построили в 1902 году под его руководством. Также под руководством Жуковского был создан в 1918 году Центральный аэродинамический институт — знаменитый ЦАГИ, работу в котором после кончины Николая Егоровича продолжали его ученики, в числе которых и Сергей Алексеевич Чаплыгин (1869—1942), впоследствии (с 1929 г.) — академик.

Однако, несмотря на то, что в Москве, учеными московской математической школы, проводились достаточно обширные исследования по прикладной математике, характерной особенностью московской школы, отличавшей ее, например, от петербургской, было значительное внимание, уделяемое общетеоретическим проблемам математики, особенно — теории функций действительных переменных и теории множеств.

Начало этим исследованиям положил Дмитрий Федорович Егоров (1869—1931), опубликовавший в 1911 году теорему о последовательности измеримых функций, которая стала известна потом как "теорема Егорова". В 1921—1931 годах Д. Ф. Егоров был президентом Московского математического общества.

Исследования Д. Ф. Егорова были продолжены его учеником — Николаем Николаевичем Лузиным (1883—1950), который опубликовал в 1915 году в качестве магистерской диссертации интереснейшую книгу "Интеграл и тригонометрический ряд". Эта книга издавалась как отдельным изданием в 1951 г., так и в составе собрания сочинений Лузина (1953—1959) и вполне доступна. Написана книга удивительно ясно, и ее можно рекомендовать всем тем, кто интересуется трудными, но интересными проблемами математики.

В дальнейшем вокруг Н. Н. Лузина образовался дружный коллектив молодых математиков, получивший шутливое прозвище "Лузитания" и спаянный как тесными дружескими отношениями между собой, так и горячей любовью, живым бескорыстным интересом к математической науке. В коллектив входили: Д. Е. Меньшов, А. Я. Хинчин, М. Я. Суслин, П. С. Урысон, Л. А. Люстерник, М. А. Лаврентьев, Б. В. Гнеденко, П. С. Александров, А. Н. Колмогоров, Л. Г. Шнирельман. Расцвет "Лузитании" относится к 1919—1925 годам, когда трудности в народном хозяйстве России, пережившей и Первую мировую и гражданскую войны, ослабили спрос на прикладные исследования, но зато никто не мешал заниматься самыми абстрактными математическими вопросами. Конечно, чрезмерное увлечение теорией функций и теорией множеств имело и свою теневую сторону, а именно, пренебрежение к классической математике, многие разделы которой получили в "Лузитании" шутливые названия. Так, конечные разности назывались "разными конечностями", теория вероятностей — "теорией неприятностей", уравнения с частными производными назывались уравнениями "с несчастными производными" и т. п. Зато как относились к теории множеств! Б. В. Гнеденко на всю жизнь запомнилась фраза Лузина: "Я дни и ночи думаю над аксиомой Цермело (аксиома произвольного выбора в теории множеств). Если бы только кто-нибудь знал, что это за вещь!" Интересно отметить, что Н. Н. Лузин не был хорошим лектором в обычном смысле этого слова, на лекциях он часто ошибался, путался в выкладках, откладывал до следующей лекции вопросы, предназначавшиеся для данного часа, но оказавшиеся не подготовленными. Но зато лекции Н. Лузина были полны новыми и интересными идеями, способными побудить слушателя к дальнейшим самостоятельным занятиям. Даром увлекать и воспламенять сердца Лузин обладал в высшей степени. Восторженные студентки восклицали, что "слушать Лузина лучше, чем слушать Шаляпина", — так вспоминает о Н. Н. Лузине слушавший его лекции Б. В. Гнеденко.

Достижения и открытия коллектива "Лузитании" получили широкую известность за рубежом и поддержали авторитет российской науки в трудное для нее время гражданской войны 1918—1920 годов и медленного послевоенного восстановления хозяйства страны.

"Гипотеза Суслина", "теорема Суслина", "проблема Суслина", "пространство Урысона", "нуль-ряд Меньшова", "теорема Меньшова—Радемахера", "бикомпактные расширения Александрова", разработанные членами "Лузитании" в 1919—1924 годах, стали предметом исследования многих математиков на протяжении всего XX века.

Еще одной интересной и важной чертой московской математической школы было серьезное внимание, уделяемое в ней истории математики. "Само становление истории математики в нашей стране как отдельной дисциплины в значительной мере связано с именем профессора Московского университета Виктора Викторовича Бобынина (1849—1919)", — утверждал известный математик и историк науки, академик АН Украины Б. В. Гнеденко.

В. В. Бобынин окончил физико-математический факультет Московского университета в 1872 году, несколько лет работал преподавателем гимназии, в 1882 году (со второй попытки) защитил в Московском университете диссертацию на тему "Математика у древних египтян". Отметим, что первая диссертация Бобынина в 1878 году была отклонена, но через 4 года он сделал новую попытку, на этот раз успешную.

К осени 1882 года Бобынину было поручено составить и читать факультативный курс истории математики — первый подобный курс в России. Но и во всем мире тогда еще такие курсы были редкостью — к 1882 году их читали только М. Кантор (M. Cantor, 1829—1920 — не путайте с Г. Кантором!) в Гейдельберге и А. Фаваро — в Падуе.

В дальнейшем В. В. Бобынин много лет читал два курса — первый по истории математики от древности до эпохи Возрождения (33 лекции) и второй (26 лекций) — по истории математики Нового времени до конца XVIII века.

В первом курсе В. В. Бобынина 7 лекций были посвящены математике Древнего Египта и Древнего Вавилона (этот период Бобынин назвал "донаучным" периодом развития математики), 13 лекций посвящались математике Древней Греции и Древнего Рима (вплоть до упадка античной математики в IV—V веках новой эры), 3 лекции курса были посвящены математике древней и средневековой Индии, 3 лекции — истории арабоязычной математики. Последние 6 лекций курса были посвящены развитию математики в Европе в Средние века, особое внимание в них уделялось процессу усвоения европейцами арабской и античной математики и первым самостоятельным успехам европейской математической мысли (Леонардо Пизанский и др.).

Во втором курсе В. В. Бобынина первые две лекции посвящались развитию математики в Италии XV—XVI веков (Тарталья, Кардано и др.), две лекции — творчеству Ф. Виета. В пятой лекции рассматривались исследования по алгебре в Германии, Англии и Голландии XVI века, в шестой — рассмотрена история открытия логарифмов, в седьмой — аналитическая геометрия Декарта, восьмая была посвящена успехам теории чисел и началам теории вероятностей в XVI веке.

Возникновению и развитию дифференциального и интегрального исчисления (работам Ньютона, Лейбница и их предшественников, исследованиям Эйлера и Лагранжа, созданию вариационного исчисления) было отведено 14 лекций.

Последние 4 лекции относились к геометрии XVII—XVIII веков и заканчивались анализом деятельности Монжа, Карно и Понселе.

В. В. Бобынин также читал в Московском университете курс по теории математики в России. По просьбе М. Кантора им была написана глава о геометрии XVIII века для четвертого тома канторовских "Лекций по истории математики". Общая библиография работ В. Бобынина насчитывает более 550 наименований. Большая статья Бобынина о математике и ее развитии перепечатана в широкодоступном издании "Математический энциклопедический словарь". — М., 1995, с. 788—797. Лекции в Московском университете он читал до 1918 года, когда Наркомпрос поручил ему написание однотомной "Истории русской математики" и трехтомной "Всеобщей истории математики", работу над которыми он завершить не успел и скончался в 1919 году.

После кончины В. В. Бобынина чтение курсов по истории математики в Московском университете продолжали О. Ю. Шмидт (1891—1956), алгебраист и — одновременно — полярный исследователь, М. Я. Выгодский — автор известной монографии "Арифметика и алгебра в Древнем мире". — М.: ГИТТЛ, 1941, с. 252. Их работы продолжили С. А. Яновская (1896—1966), читавшая курс с 1930 года, и ее ученик — К. А. Рыбников, автор известного большого учебника "История математики". — Изд-во МГУ, 1994, с. 496.

С 1933 года в Московском университете работал научно-исследовательский семинар по истории математики, в котором участвовали А. П. Юшкевич, С. С. Демидов и многие другие видные ученые.

Значительно скромней, неоправданно скромней, была представлена история математики и ее преподавание в Санкт-Петербургском (Ленинградском) университете. Лишь в 1986—1995 годах курс истории математики читался в нем на факультете прикладной математики — процессов управления. В 1988—1992 годах его читал проф. А. Т. Талдыкин, в 1992—1995 годах — проф. Ю. П. Петров. В 1995 году, в "эпоху разброда и шатания", несмотря на большой успех среди студентов, этот курс был ликвидирован и пока еще не восстановлен.

Петербургская и московская математические школы стали основой последующего бурного развития математики в России и Советском Союзе. Математика стала развиваться не только в университетах разных городов, но и в научно-исследовательских институтах — Математическом институте Академии наук (МИАН), его ленинградском отделении — (ЛОМИ, ныне — ПОМИ) и многих других.

Математика Советского Союза получила заслуженное признание за рубежом. Ряд научных журналов, издаваемых на русском языке, стал издаваться за рубежом в переводе на языки стран издания.

Отметим, что орган Московского математического общества — журнал "Математический сборник" — с самого начала выходил на русском языке. И когда в конце XIX века некоторые математики стали выступать за то, чтобы печатать его статьи на одном из иностранных языков с целью сделать более доступными за рубежом исследования российских ученых, то профессор Николай Васильевич Бугаев (1837—1903) резко возразил: "Кто не уважает своего родного языка, тот самого себя не уважает и не заслуживает уважения других. Когда на русском языке будут печататься серьезные работы, то иностранцы сами начнут заниматься нашим языком. Если же они этого не сделают, то в потере будут они, так как мы (читающие их работы) будем знать больше их".

Время уважения к русскому языку как языку науки, время, о котором мечтал Н. В. Бугаев, в XX веке пришло и продолжалось долго — до, примерно, 1990 года, когда ошибки руководства России в 1990—2000 годах принесли много вреда российской науке и поставили ее на край гибели.

Некоторое представление об авторитете российской математической науки в разные годы можно получить из анализа Международных математических конгрессов, проводящихся каждые четыре года. Подробный анализ провел академик В. И. Арнольд ("Вестник РАН", том 69, № 2, февраль 1999 г.). Вот некоторые его результаты: в 1897 году на первом конгрессе из 208 участников 12 человек было из России. В 1990 году на конгрессе в Киото из 15 математиков, удостоенных чести сделать пленарный доклад, четверо были представителями российской математической школы. На конгрессе 1994 года их было 3 из 16, на конгрессе 1998 года — ни одного.

В 1990 году из 139 докладчиков на секциях конгресса было 19 представителей российской математической школы (13,8%), в 1994 году их было 14 из 156 (т. е. 9%), в 1998 году — 26 из 168 (13,5%), но из этих 26 только двое работали постоянно в России и еще шесть указали Россию как одно из мест своей работы.

Последнее десятилетие XX века — это трудное время и для российской математики, и для российской науки в целом. Будем надеяться, что в XXI веке работы российских ученых восстановят пошатнувшийся авторитет русской науки.

Глава 7

История некоторых примечательных теорем

В этой главе мы рассмотрим частный вопрос — историю доказательства трех примечательных теорем. Будут рассмотрены теорема Л. Эйлера о числе граней, вершин и ребер многогранника, теорема о числе красок, достаточных для раскрашивания карты ("теорема о четырех красках") и совсем недавно доказанная Великая теорема Ферма.

Эти теоремы выбраны потому, что на их примере делается особенно наглядным и ясным существо математического доказательства, да и история их доказательств любопытна сама по себе.

7.1. Теорема Л. Эйлера о многогранниках

Каждый многогранник имеет определенное число граней $Г$, вершин B и ребер P. Соотношение между ними подметил впервые Эйлер в 1750 г.; оно выражено формулой:

$$Г + B - P = 2. \tag{1}$$

Зная методы работы Эйлера (а именно он из всех математиков писал о своих методах наиболее откровенно), нетрудно восстановить тот путь, которым Л. Эйлер пришел к формуле (1). Он начал с подсчета числа вершин, граней и ребер у конкретных многогранников (т. е. начинал с "конкретного эксперимента"; между прочим, это и есть тот пункт, с которого начинается большинство математических открытий). Экспериментируя с конкретными многогранниками, Л. Эйлер мог составить, например, следующую таблицу (табл. 7.1).

Таблица 7.1. *Число граней, вершин и ребер у конкретных многогранников*

Многогранники	***Г***	***В***	***Р***
Трехгранная пирамида	4	4	6
Четырехгранная пирамида	5	5	8
Трехгранная призма	5	6	9
Куб	6	8	12
Октаэдр	8	6	12
Икосаэдр	20	12	30
Додекаэдр	12	20	30

Внимательно рассматривая подобные таблицы, он и подметил соотношение (1). Это — обычный путь естествоиспытателя: от конкретного эксперимента — к обобщению. Однако для математики этого мало — формула (1) должна быть установлена не только для приведенных в таблице семи видов многогранников, но и для всех видов, а это означает, что формулу (1) надо доказать. Л. Эйлер дал доказательство формулы (1), но мы рассмотрим не доказательство Эйлера, а более совершенное доказательство формулы (1), данное Коши в 1811 г. Рассматривая его, мы особенно наглядно убедимся, что доказательство в математике является мысленным экспериментом — т. е. экспериментом, в котором мы отвлекаемся от ограничений, наложенных непродолжительностью человеческой жизни, позволяющей пересчитать лишь очень ограниченное количество предметов. Реально мы не в состоянии сосчитать число ребер многогранника с миллиардом граней, но в "мысленном эксперименте" — в математическом доказательстве — мы это сделать можем.

Итак, рассмотрим доказательство, данное Коши в 1811 г. Предположим, — предлагает Коши, — что многогранник будет полым, а поверхность его может растягиваться (например, если она сделана из резины). Если вырезать одну из граней, то остальную поверхность можно растянуть на плоской доске. При этом грани и ребра будут деформироваться, но числа $Г$, $Б$, $Р$ не изменятся; поэтому, если для исходного многогранника была справедлива формула (1), то для растянутой на доске "карты" из граней и ребер (рис. 7.1) имеем: $Г + В - Р = 1$ (ибо одну грань мы удалили).

Теперь проведем мысленно триангуляцию нашей "карты" — т. е. в тех гранях, которые являются не треугольниками, а n-угольниками, в которых $n > 3$, мы проведем диагонали и разобьем их на треугольники (рис. 7.2).

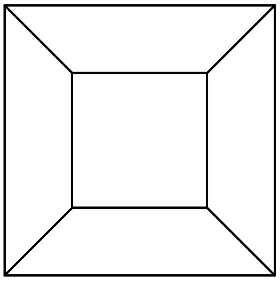


Рис. 7.1. Карта для куба

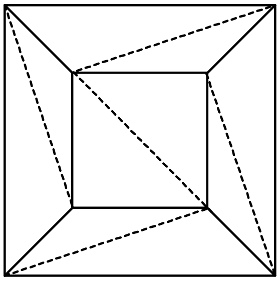


Рис. 7.2. Триангуляция карты куба

Проведя каждую диагональ, мы увеличиваем и $Г$, и $Р$ на единицу, поэтому сумма $Г+В-Р$ не изменится. Теперь начнем вынимать из триангулированной карты треугольники один за другим. Вынимая треугольник, мы или вынимаем ребро, причем исчезают одна грань и одно ребро, или же вынимаем два ребра и вершину, и тогда исчезают одна грань, два ребра и одна вершина. Таким образом, если было $Г+В-Р=1$ до выемки треугольника, то и после выемки будет $Г+В-Р=1$. Но вынимая треугольники один за другим, мы дойдем в конце концов (отвлекаясь от длительности этого процесса) до последнего треугольника. Но и для него $Г+Б-Р=1$. Следовательно, и для исходной "карты" $Г+В-Р=1$, а для исходного многогранника $Г+В-Р=2$, и теорема Эйлера, — утверждает Коши, — доказана. Доказательство Коши (мы изложили лишь основные его этапы) было принято математиками без возражений; считалось, что оно "закрыло" проблему. Вот что писал, например, французский математик Жонкьер в "Трудах французской академии наук" в 1890 г.: "После доказательства Коши стало абсолютно несомненным, что изящное соотношение $Г+В-Р=2$ применимо к многогранникам любого вида, как и установил Л. Эйлер в 1752 г. В 1811 г. вся нерешительность должна была исчезнуть". Немецкий математик Я. Штейнер (Steiner, 1796—1863) в 1826 г. дал другое доказательство теоремы Эйлера, отличное от доказательства Коши, но и он не сомневался, что теорема Эйлера верна.

Однако в общем случае теорема Эйлера не верна. Она не верна, например, для многогранника с полостью. Представьте себе куб из стекла, внутри которого расположен куб из железа (рис. 7.3). Для каждого из кубов $Г+В-Р=2$, значит, для куба с кубической полостью имеем $Г+В-Р=4$. Это исключение из теоремы Эйлера заметил женевский математик Люилье (Lhuilier, 1750—1840), опубликовавший свой результат в 1812—13 гг. Люилье заметил это исключение при рассмотрении минералогической коллекции кристаллов своего друга, профессора Пикте. В коллекции были представлены, в частности, кубические кристаллы сернистого свинца (непрозрачные), заключенные внутри прозрачных кристаллов полевого шпата. Рассматривая подобные кристаллы, Люилье заметил первое исключение из теоремы Эйлера, а затем подметил, что теорема Эйлера не верна также для многогранников типа "картинной рамы", топологически эквивалентных тору ("бублику"), — для них $Г + В - Р = 0$ и для многогранников с кольцевыми гранями. Так, для куба, на верхнюю грань которого "припаян" другой куб (рис. 7.4), $Г + Б - Р = 3$.

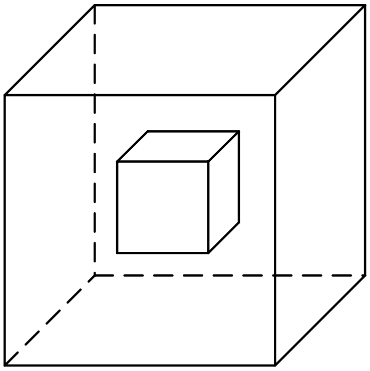


Рис. 7.3. Многогранник с полостью

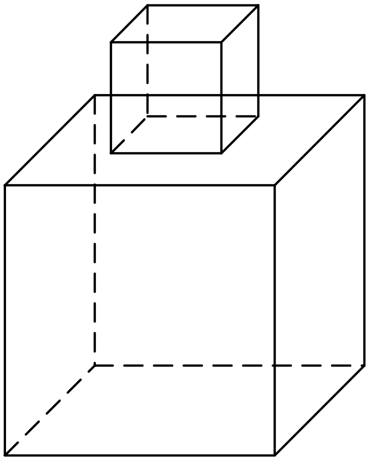


Рис. 7.4. Куб, на верхнюю грань которого "припаян" другой куб

Заметим, что сам Люилье думал, что он нашел все исключения из теоремы Л. Эйлера. Однако в 1832 г. немецкий математик Гессель открыл новые исключения — это "многогранники-близнецы", спаянные вдоль общего ребра (рис. 7.5) или имеющие общую вершину (рис. 7.6).

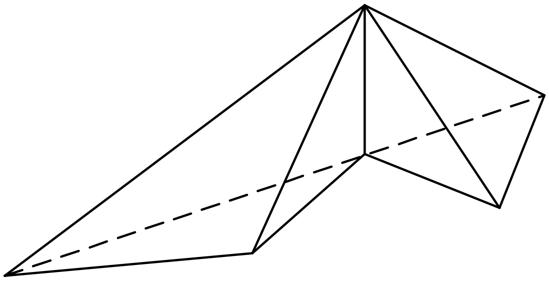


Рис. 7.5. Многогранники, спаянные вдоль общего ребра

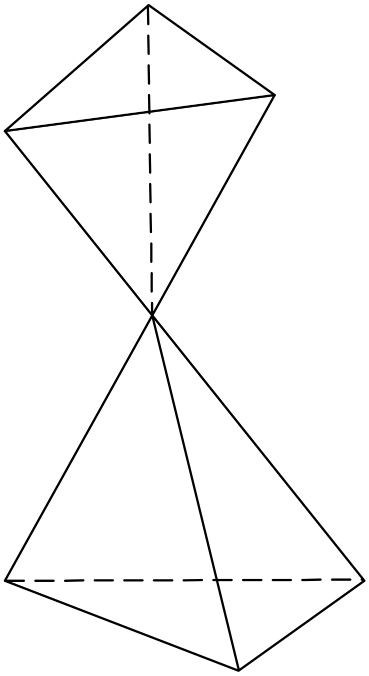


Рис. 7.6. Многогранники, имеющие общую вершину

Эти примеры очень поучительны. Они показывают, что математическое доказательство (мысленный эксперимент) позволяет преодолеть некоторые ограничения, наложенные на реальный эксперимент (например, невозможность непосредственно пересчитать вершины и ребра у многогранника с 10^9 граней), но не в состоянии гарантировать абсолютной достоверности, поскольку мы не можем быть уверены, что наша мысль охватила все стороны рассматриваемого объекта.

В естественных науках мы уже привыкли к тому, что любой реальный эксперимент реализует лишь приближение к абсолютной истине, и процесс познания свойств любых достаточно сложных объектов бесконечен (или, во всяком случае, весьма длителен). История математики показывает нам, что мысленный эксперимент — математическое доказательство — не является исключением. Многогранники оказались достаточно сложным объектом для того, чтобы даже такие титаны математической мысли, как Эйлер и Коши, могли полностью охватить в своем уме все возможные соотношения между числом граней, вершин и ребер. Эти соотношения зависят от топологических характеристик многогранника, но выяснилось это много позже.

Для понимания специфики математических теорем изучение истории математики необычайно важно. В обычном догматическом изложении математические теоремы выступают как "истины в последней инстанции", и лишь изучение истории наглядно показывает, что истинная природа математических утверждений (теорем) не отличается чем-то особым от утверждений в других областях науки. Как и в других областях науки, в математике познание истины происходит постепенно, в спорах и дискуссиях, в уточнении ранее считавшихся незыблемыми положений, и в каждый момент времени не так много утверждений (гораздо меньше, чем нам кажется) мы можем считать абсолютными истинами

На примере теоремы Эйлера о многогранниках все это выступает особенно наглядно. Соотношение (1) справедливо лишь для многогранников, топологически эквивалентных сфере. Для всех других многогранников выполняются более сложные соотношения, но все это было понято далеко не сразу. Теореме Л. Эйлера посвящена замечательная книга: Лакатос И. Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы. — М.: Изд-во "Наука", 1967, откуда взяты приведенные здесь цитаты и которую мы рекомендуем вниманию читателя.

7.2. Теорема о четырех красках

Любопытную судьбу имела и другая теорема топологии — "о четырех красках", сформулированная Мёбиусом (Möbius, 1790—1868) в 1840 г. Формулировка этой теоремы также очень проста — утверждается, что на сфере достаточно четырех красок для правильной раскраски любой возможной географической карты (т. е. такой раскраски, при которой любые две страны с общей границей не закрашены в один цвет). Мёбиус высказал эту теорему без доказательства, доказательство было опубликовано Кемпе в 1879 г. Оно было признано достаточным выдающимися математиками того времени, и теорема Мёбиуса считалась строго доказанной более десяти лет, пока в 1890 г. Хивудом не была обнаружена ошибочность доказательств Кемпе. С тех пор, несмотря на многочисленные и упорные попытки многих математиков, доказательство не удавалось построить вплоть до 70-х годов XX века, когда к поиску доказательства были подключены быстродействующие цифровые вычислительные машины. Найденное с их помощью доказательство (на этот раз, вроде бы, окончательное) было опубликовано в 1976 г.

На этот раз "мысленный эксперимент" — математическое доказательство — получился столь сложен, что оказалась полезной и необходимой помощь вычислительных машин. Теорема о "четырех красках" стала первой, но, безусловно, не последней важной теоремой, доказанной уже не только человеком, но и машиной, а точнее — человеком, прибегнувшим к помощи вычислительной техники при доказательстве[10].

Более чем десятилетняя история существования опубликованного и хорошо известного, но, тем не менее, ошибочного доказательства Кемпе подчеркивает трудность различения правильного и ошибочного доказательств.

7.3. Теорема Ферма

Наиболее знаменитой теоремой в истории математики была, безусловно, так называемая "Великая теорема Ферма". Мы коротко уже говорили о ней в *главе 3*, но теперь расскажем подробнее.

Все началось с того, что в 1621 году была напечатана чудом сохранившаяся рукопись "Арифметики" древнегреческого математика Диофанта (о нем говорилось в *главе 1*). Эта книга была приобретена П. Ферма (Fermat, 1601—1665), который внимательно читал ее и сделал на полях 48 замечаний. Самое знаменитое из них звучало так — не существует равенства:

$$x^n + y^n = z^n, \tag{2}$$

где x, y, z — целые числа, а n — целое число, большее двойки. Ферма добавил: "Я нашел этому поистине чудесное доказательство, но поля слишком узки, чтобы вместить его".

Записи Ферма на полях книги Диофанта были опубликованы уже после его кончины и вызвали большой интерес среди математиков. Так, Леонард Эйлер доказал утверждение Ферма для $n = 3$ и $n = 4$, воспользовавшись "методом спуска", который впервые предлагал еще Ферма для доказательства отсутствия решений ряда уравнений. Идея "метода спуска" не сложна — предположим, что равенство (2) для $n = 3$ выполняется, т. е. существует тройка чисел x_1, y_1, z_1, для которых справедливо равенство:

$$x_1^3 + y_1^3 = z_1^3. \tag{3}$$

Далее следует попытаться доказать, что из равенства (3) вытекает существование равенства:

$$x_2^3 + y_2^3 = z_2^3, \tag{4}$$

где x_2, y_2, и z_2 меньше, чем x_1, y_1, z_1. Повторяя то же рассуждение, можно перейти от x_2, y_2, z_2 к еще меньшим числам x_3, y_3, z_3 и т. д. без конца. Но отсюда уже следует невозможность выполнения равенства (3), поскольку число целых чисел, меньших данного, всегда конечно.

При использовании "метода спуска" Эйлер использовал разложение разности $z^n - y^n$ на линейные множители:

$$z^n - y^n = (z - y)(z - \varepsilon y)(z - \varepsilon^2 y)...(z - \varepsilon^{n-1} y)\,, \tag{5}$$

где ε является корнем степени n из единицы. Как известно, число таких корней равно n, один из корней — единица, вещественное число, остальные корни — комплексные, по модулю равные единице и расположенные на комплексной плоскости в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность единичного радиуса.

Эйлер оперировал с множителями, входящими в разложение (5), как с обычными целыми числами, и на этом пути доказал теорему Ферма для $n = 3$.

В дальнейшем исследования Л. Эйлера были продолжены, и в 1847 году французский математик Ламе (Lame, 1795—1870) опубликовал полное, как казалось ему, доказательство великой теоремы для любых n. Возражения против доказательства выставил Лиувилль (Liouville, 1809—1882), указавший, что для чисел вида (5) не существует единственности разложения на простые множители — так, например:

$$4 = 2 \cdot 2 = (1 + \sqrt{-3})(1 - \sqrt{-3}).$$

На достоверность доказательства Эйлером теоремы Ферма для частного случая $n = 3$ неединственность разложения на простые множители не повлияла, но общее доказательство Ламе для любого n оказалось уже несправедливым.

Примерно в эти же годы и даже несколько раньше на это обстоятельство обратил внимание немецкий математик Эрнест Куммер (Kummer, 1810—1893), который работал над доказательством теоремы Ферма с 1837 года. Куммер сумел восстановить единственность разложения на множители путем введения нового математического понятия — идеальных множителей. С помощью нового понятия Куммер в ряде статей, опубликованных в 1847—1850 годах, доказал теорему Ферма для всех $n \leq 100$, а точнее для всех n, которые не входят в числители $\frac{n-3}{2}$ первых чисел Бернулли.

"Идеальные множители" Куммера сыграли большую роль в дальнейшем развитии алгебры, и таким образом работа над доказательством теоремы Ферма существенно помогла развитию математики.

Однако дальнейшая история теоремы Ферма пошла по другому пути. Попытки доказательства теоремы для $n > 100$ продолжались многими математиками. Один из них, Вольфскель из Дармштадта, скончавшийся в 1906 году, оставил завещание, в котором 100 тысяч марок назначались как премия тому, кто представит полное доказательство теоремы Ферма. Теорема сразу стала знаменитой (и, если можно так сказать, — "напрасно знаменитой"). Посыпался целый поток "доказательств", в которых при внимательном анализе неизбежно обнаруживались ошибки. Но поток этот не иссякал.

В 1923 году в Германии разразилась крупнейшая инфляция, а затем — денежная реформа. В новых деньгах, введенных после реформы, 100 тысяч старых марок равнялись менее одной сотой новой марки — т. е. премия Вольфскеля потеряла денежную ценность. Тем не менее "маховик" был уже разогнан, и теорема Ферма продолжала занимать умы многих людей, часто не знакомых с литературой и историей вопроса и старающихся справиться с задачей посредством какой-либо необычайной идеи. Продолжающийся поток доказательств очень затруднял работу математических институтов, сотрудникам которых приходилось тратить много времени на работу по выявлению ошибок в доказательствах у людей, которых они называли "ферматистами". Сотрудники институтов всеми силами старались уклониться от этой работы. Я сам однажды в 1959 году был свидетелем того, как в ленинградское отделение Математического института Академии наук СССР вошел пожилой человек в потертом костюме с горящими глазами и толстой пачкой мелкоисписанных листов под мышкой. "Ферматист пришел! Еще один ферматист пришел!" — пронеслось по коридорам института, и его сотрудники стали быстро покидать свои кабинеты и тихонько уходить через запасной выход. Тем, кто не успел уйти, пришлось слушать объяснения "ферматиста", а потом долго, неделями искать ошибку в длинном многостраничном доказательстве. Ошибку они тогда нашли...

Если подсчитать, сколько времени и энергии отняли и у самих "ферматистов", и у сотрудников математических институтов поиски доказательств теоремы и поиски ошибок в доказательствах, то получится огромная, потрясающая воображение цифра. На смену одним "ферматистам" приходили другие, а доказательство теоремы все не давалось в руки.

Новый поворот в деле доказательства теоремы Ферма произошел в 1955 году, когда молодой японский математик Ю. Танияма (1927—1958) сформулировал своеобразную гипотезу о свойствах так называемых эллиптических кривых — т. е. кривых вида:

$$y^2 = x^3 + ax + b, \qquad (6)$$

где a и b — целые числа.

Гипотеза Таниямы сперва не привлекла особого внимания, и 20 лет о ней мало вспоминали. Затем обнаружилось, что из этой гипотезы вытекают многие любопытные следствия. Самое важное следствие, — что из гипотезы Таниямы, по-видимому, вытекает теорема Ферма, — обнаружил немецкий математик Герхард Фрей. Полностью доказать это следствие Г. Фрей не мог, но он опубликовал его в виде гипотезы, а в 1985 году американский математик Кеннет Рибет гипотезу Фрея доказал. Теперь оставалось сделать последний и самый трудный шаг — доказать гипотезу Таниямы.

В 1993 году американский математик Эндрю Уайлс (Wiles, род. в 1953 г.) из Принстона нашел доказательство гипотезы Таниямы и доложил его на конференции по теории чисел в Кембридже. Это был самый важный и решающий шаг в доказательстве — по сути дела в коллективном доказательстве — Великой теоремы. Доказательство Уайлса, занимающее, кстати, 150 страниц текста, стали внимательно изучать — и обнаружили в нем ошибку. Однако Уайлс совместно с Р. Тейлором исправили ошибку, и летом 1995 года исправленное доказательство было опубликовано. Его еще раз придирчиво проверили, но на этот раз никто не нашел ошибки, и доказательство было признано достоверным. В 1998 году на Всемирном математическом конгрессе в Берлине Уайлс доложил свое доказательство. Все две тысячи делегатов конгресса пришли на его доклад, внимательно слушали и проводили докладчика дружными аплодисментами. В 350-летней истории теоремы Ферма была поставлена победная точка[11].

7.4. Заключение

Знакомясь с историей математики, мы видим, как в разное время менялось отношение к роли доказательства в математике, к мере его строгости. Мы убедились, к примеру, что Л. Эйлер широко использовал наводящие соображения, неполные доказательства. Исследуя возможность разложения функции $\sin x$ в бесконечное произведение для вычисления сумм рядов вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \tag{7}$$

и т. п., он использовал даже такие соображения, как совпадение первых шести знаков суммы, найденной им прямым вычислением, с теоретическим значением:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\,. \tag{8}$$

Эйлер прекрасно понимал, что проверка на совпадение первых шести цифр не является строгим доказательством, и поэтому выполнил не одну, а пять различных проверок (мы рассказали о них в *главе 3*). После того как все пять проверок подтвердили (с разных сторон) справедливость формулы (8), Эйлер опубликовал свой результат.

Отметим, что Эйлер понимал важность строгих доказательств, но считал, что утверждение, выдержавшее пять различных проверок, во всяком случае заслуживает опубликования.

В XIX и XX веках требования к строгости доказательств возросли, и многие математики стали рассматривать доказательства как важнейшую, основную и центральную часть всей математики. С таким чрезмерным преувеличением роли доказательства, со стремлением к абсолютной строгости доказательств далеко не все математики были согласны. Известный английский математик Харди (Hardy, 1877—1947), много работ выполнивший с не менее известным Дж. Литлвудом (Littlewood, 1885—1977), писал в 1928 году: "Строго говоря, такой вещи, как математическое доказательство, не существует; все, что мы можем сделать в конце анализа, это только показать; … доказательства представляют то, что Литлвуд и я называем *газом*, риторическими завитушками, предназначенными для воздействия на психологию, картинками на доске во время лекции, выдумками для стимулирования воображения учеников".

Действительно, даже очень старательно и скрупулезно проведенное доказательство совсем не гарантирует безусловной истинности доказываемой теоремы. Даже если все рассуждения были безупречными, это еще не является гарантией того, что мы охватили в своих логических построениях все существенные стороны рассматриваемого математического объекта. Так, в доказательстве Коши формулы Эйлера для многогранников сами по себе математические рассуждения Коши были безупречными, и для многогранников, топологически эквивалентных сфере, они давали верный результат. Однако в

1811 году ни Коши, ни его современники, читавшие и обсуждавшие его доказательство, еще не видели своим умственным взором, что существуют другие многогранники, для которых теорема Эйлера уже не верна. Впервые это увидел Люилье, причем увидел не в переносном смысле, не в своем воображении, а увидел, как мы это отмечали ранее, реально, своими глазами, в минералогической коллекции своего друга Пикте, где черный кристалл сернистого свинца просвечивал внутри прозрачного кристалла полевого шпата.

Аналогично и в доказательстве Коши выдвинутой им теоремы: "Сумма сходящегося ряда непрерывных функций непрерывна", сами по себе математические построения были безупречны и для равномерно сходящихся рядов верны. Просто такое понятие, как бесконечный ряд, — это понятие очень сложное, и Коши в 1821 году еще не видел, что возможно существование рядов сходящихся, но неравномерно сходящихся, для которых его теорема не верна. Это увидел впервые в 1826 году Нильс Абель (увидел на этот раз не глазами, а воображением, умственным взором), а увидев, указал на исключения из теоремы Коши. Но полное понятие о равномерной сходимости рядов было выработано и окончательно прояснено уже много позже.

Поэтому не следует думать, что сколь угодно "строгое" доказательство непременно гарантирует абсолютную верность той или иной теоремы. "Абсолютно строгих" доказательств нет, но из этого совсем не следует, что доказательства не имеют смысла, и ими можно пренебречь. Доказательство дисциплинирует мысль, а хорошо выполненное доказательство чаще всего обеспечивает верность теоремы, хотя исключения возможны и в истории математики неоднократно встречались.

Стремление к недостижимой "абсолютной строгости" вряд ли плодотворно. Необходимо стремиться к разумной строгости. Недаром А. Н. Крылов в своем предисловии к изданию в 1936 году университетских лекций П. Л. Чебышёва писал, характеризуя издаваемый курс лекций, что П. Л. Чебышёв "не задавался целью сделать свой курс безукоризненно строгим, а довольствовался тою разумною строгостью, которая, избавляя от ошибок, сообщает непреложность выводам"[12].

Глава 8

О новом экзамене кандидатского минимума по истории и философии науки

До 2005 года все аспиранты и соискатели ученой степени кандидата наук сдавали экзамены кандидатского минимума по специальности, по иностранному языку и по философии. Приказом Министерства образования и науки России № 696 от 17.02.2004 был утвержден новый перечень кандидатских экзаменов:

1. История и философия науки.
2. Иностранный язык.
3. Специальная дисциплина в соответствии с темой диссертации.

Таким образом, прежний экзамен — "Философия" приказом № 696 заменен на "Историю и философию науки". Этот приказ вводится в действие с 1 июля 2005 года. Начиная с этой даты, все аспиранты и соискатели должны сдавать новый экзамен.

Программа экзамена, утвержденная приказом Минобразования РФ № 697, делится на следующие части:

1. Общие проблемы философии науки — эту часть должны будут сдавать все аспиранты и соискатели, независимо от своей специальности.
2. Современные философские проблемы областей научного знания.
3. История отраслей наук.

Вторая и третья части программы различны в зависимости от специальностей.

В приложении к книге приведены программа кандидатских экзаменов по общим проблемам философии науки, обязательная для аспирантов и соискателей всех специальностей, и программа по философским проблемам математики, обязательная для аспирантов и соискателей ученой степени кандидата наук для всех специальностей, относящихся к блоку математических наук (включая информатику).

В этой главе и последующих даны рекомендации по ответам на кандидатском экзамене с опорой на материал, изложенный в предыдущих главах.

8.1. Доказательства и опровержения в науке (К. Поппер). Роль воображения и интуиции

Ознакомившись с новыми программами экзаменов кандидатского минимума, мы убеждаемся, что вопросам философии науки и, в частности, философии математики уделяется в них большое внимание. Далее будет показано, что материал по истории математики, приведенный в *главах 1—7*, помогает найти ответ на достаточно сложные вопросы программы.

Отметим прежде всего, что наука — в отличие, например, от религии — опирается не на авторитет, а на эксперимент или на доказательство. Кроме того, выводы и предсказания науки должны быть проверяемы. Заметим, что так было не всегда. Авторитет математики, который она приобрела своими доказательствами, заставлял различных религиозных деятелей вплоть до XVIII века искать "доказательства существования Бога", которых, кстати, придумано было довольно много.

Против этого выступил Иммануил Кант (1724—1804), показавший несостоятельность известных к его времени "доказательств" существования Бога. Кант считал, что подобные доказательства невозможны в принципе, и что религия и наука вообще независимы друг от друга. Не нужно искать научных доказательств существования Бога и не нужно научными аргументами пытаться доказывать его несуществование. Кто хочет верить, пусть верит. Искреннюю веру надо уважать, но наука здесь ни при чем. В отличие от науки, предписания религии не доказываются и не опровергаются.

Обязательная проверяемость научных выводов и предсказаний позволяет отличить науку от лженауки, например, от астрологии, которая только маскируется под науку, но по сути дела наукой не является. Астрология делает предсказания, прогнозы, но не проверяет их. Вы можете прочесть в газетах прогнозы астрологов типа: "родившихся под знаком Овна на следующей неделе ожидает успех в делах" или — "у родившихся под знаком Рака на этой неделе возможны неприятности, старайтесь воздерживаться от принятия решений". Но тщетно вы будете искать публикации подтверждения этих прогнозов, хотя бы в такой форме: "на прошедшей неделе мы проследили за 100 предпринимателями, родившимися под знаком Овна. У 80 из них были успехи в делах. А вот из проверенных 100 предпринимателей, родившихся под знаком Рака, у 75 на прошедшей неделе были неприятности". Вы нигде не найдете подобных проверок астрологами своих прогнозов и предсказаний.

Причина проста — когда подобные проверки проводили независимые исследователи, то результатом почти всегда оказывался конфуз: прогнозы не сбывались. Тогда астрологи отказались от проверок и от самого принципа проверяемости. Свои прогнозы астрологи публикуют, а сбываются "прогнозы" или нет — это их не интересует. Так что отказавшись от важнейшего принципа науки — принципа проверяемости — астрология сама себя сделала лженаукой.

Принципы обоснованности и доказуемости положений науки, принципы проверяемости ее выводов и предсказаний получили подробное развитие в работах упоминаемого в "Программах" философа К. Поппера, который называл их принципами "верификации" и "фальсификации".

Математические утверждения, относящиеся к единичным объектам, могут быть проверены непосредственно. Можно проверить, например, равенство

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}, \tag{1}$$

построив график функции $y = x^2$ и вычислив ограниченную им площадь с помощью планиметра.

Сложнее проверить утверждения общего характера — например, известное утверждение О. Коши: "Сумма сходящегося ряда непрерывных функций непрерывна". Это утверждение относится к бесконечному множеству функций и непосредственно проверено быть не может. Удостовериться в его истинности можно лишь путем доказательства. Именно так и поступал О. Коши. Основываясь на очевидных исходных предпосылках, он путем строгих логических рассуждений — более строгих, чем у его предшественников, — пришел в 1821 году к своему утверждению о сходящихся рядах, которое он считал истинным. С тем, что утверждение О. Коши истинно, были согласны — после знакомства с его доказательством — его современники, его коллеги-математики. И все же — как мы теперь знаем — О. Коши был не прав, и его неправоту обнаружил Н. Абель в 1826 году. Абель не стал искать ошибку в доказательстве Коши, а создал ***контрпример*** — построил ряд (о нем уже говорилось в *главе 5*):

$$S = \sin\alpha - \frac{1}{2}\sin 2a + \frac{1}{3}\sin 3a - ...,$$

который состоял из непрерывных функций, сходился, но имел разрывную сумму.

Пример Абеля сразу доказал ошибочность утверждения великого О. Коши, а правильная уточненная теорема (сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций непрерывна) была установлена — как об этом было рассказано в *главе 5* — только спустя 27 лет Зейделем и Стоксом.

Пример Абеля показал, какую важную роль играют в математике контрпримеры: венгерский математик Дьердь Пойа (G. Polia, 1887—1985) — в старых переводах на русский язык его фамилия может встретиться как "Полиа" — вообще писал, что "математика состоит из двух вещей — из теорем и контрпримеров". Таким образом, Пойа считал, что контрпримеры не менее важны, чем теоремы.

Важная роль контрпримеров связана с тем, что в математике "верифицировать", т. е. обосновывать истинность утверждений общего характера, достаточно трудно. Приходится полагаться на доказательство, но ведь доказательства проводят люди, а люди могут ошибаться. Относительно непрерывности суммы сходящегося ряда непрерывных функций ошибался даже великий математик О. Коши.

Зато "фальсифицировать" какое-либо утверждение общего характера, доказать его ошибочность, очень просто: достаточно найти хотя бы один-единственный противоречащий утверждению пример. Такой пример называется "контрпримером", и он сразу опровергает обсуждаемое утверждение. По терминологии К. Поппера происходит "фальсификация" ошибочного утверждения.

Отметим, что в 1826 году, после публикации примера Абеля теорема, ранее опубликованная О. Коши, сразу была признана ошибочной — несмотря на то, что Коши был авторитетнейшим математиком того времени, а Абель — молодым ученым. Такова сила контрпримера. Если есть хотя бы один контрпример, то теорема отвергается.

В реальном математическом исследовании поиск контрпримеров часто предшествует доказательству. Возникшая в ходе исследования гипотеза прежде всего проверяется на отсутствие контрпримеров. Только если сам исследователь не обнаружил ни одного контрпримера, и если его коллеги, с которыми он обсуждал свою гипотезу, тоже не нашли контрпримеров — только тогда имеет смысл приступить к доказательству, к превращению гипотезы в теорему.

8.2. Индукция и дедукция в математике

Соотношение индукции и дедукции в математике, а также смежные вопросы (место интуиции и воображения в математике, мысленный эксперимент и доказательства с помощью компьютера) занимают — как легко убедиться — большое место в новых программах кандидатских экзаменов. Знакомство с историей математики позволяет легко ответить на эти вопросы.

Математика часто считается дедуктивной наукой, но это распространенное представление не является точным. Оно возникает из-за того, что математика преподается чаще всего действительно как дедуктивная наука, но реальный путь ее развития был совсем другим. Новые математические соотношения открывались на основе наблюдения, индукции, последующего обобщения и абстрагирования. Характерным примером является рассмотренная в *главе 7* теорема Эйлера о многогранниках. Эйлер начал с наблюдения — с наблюдения над соотношением числа граней, вершин и ребер в различных многогранниках. Проверив многие многогранники, он обнаружил, что для них выполняется соотношение:

$$Г + В - Р = 2, \tag{2}$$

где: $Г$ — число граней; $В$ — число вершин; $Р$ — число ребер.

Далее шел процесс обобщения и абстрагирования. Эйлер предположил, что соотношение (2) справедливо для всех многогранников, в том числе и для многогранников с таким большим числом граней, вершин и ребер, что бесполезно пытаться их реально пересчитать.

Но утверждение о справедливости соотношения (2) для всех многогранников обязательно требовало доказательства. Доказательство, данное О. Коши в 1811 г. и приведенное в *главе 7*, особенно наглядно подчеркивает, что доказательство — это *мысленный* эксперимент, т. е. эксперимент, в котором есть возможность отвлечься от некоторых ограничений человеческих возможностей (не позволяющих, например, реально пересчитать число ребер многогранника с миллиардом граней). В то же время даже мысленный эксперимент не позволяет преодолеть ограниченность человеческой фантазии и интуиции, которые не всегда позволяют охватить и заметить все стороны, все тонкости рассматриваемой математической модели (не говоря уже о всех тонкостях реального объекта или процесса, математическую модель которого мы рассматриваем; математическая модель — это всегда некоторое упрощение, но даже в этой упрощенной картине очень не просто до конца разобраться и легко допустить ошибку)[13]. Теперь мы знаем — и об этом рассказано в *главе 7*, что доказательство, данное О. Коши, не было полным, оно не охватывало возможности существования многогранников, не подчиняющихся формуле (2).

Понимание приведенного в *главе 7* доказательства О. Коши требует хорошего пространственного воображения и фантазии. Понятно, что автор доказательства — О. Коши — в высшей степени обладал и тем, и другим, но все же всех тонкостей понятия "многогранник" даже он не охватил, и поэтому уточнение формулы (2), как было рассказано в *главе 7*, продолжалось много лет.

Иногда утверждают, что подобные неточности и ошибки в доказательствах, необходимость серьезного уточнения опубликованных теорем отошли в прошлое в XIX веке, а современная математика, вооруженная хорошо разработанными стандартами строгости, подобных ошибок — во всяком случае ошибок серьезных, принципиальных — уже не допускает. К сожалению, это не верно.

Так, например, принципиальную роль в теории и практическом использовании дифференциальных уравнений играет теорема о непрерывной зависимости решений систем дифференциальных уравнений от параметров. Поскольку коэффициенты и параметры математической модели реального объекта или процесса определяются из опыта, из измерения и почти всегда имеют ограниченную точность, то при отсутствии непрерывной зависимости решение не достоверно, не надежно, и обычно не имеет практического смысла, поскольку при сколь угодно малом, неизбежном на практике отклонении реальных параметров исследуемого объекта или процесса от принятых при расчете, действительное поведение объекта может коренным образом отличаться от результата расчета.

Поэтому теорема о непрерывной зависимости решений от параметров, действительно, лежит в основе всех практических приложений теории дифференциальных уравнений и приводится, разумеется, с доказательством, во всех серьезных учебниках. Например, в следующих:

- ☐ Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. — М.: ГИТТЛ, 1953 (см. стр. 298—307);
- ☐ Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Высшая школа, 1967 (см. стр. 259—292);

- ☐ Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1965 (см. стр. 49);
- ☐ Матвеев Н. М. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — СПб.: Специальная литература, 1996 (см. стр. 313—315).

Теорема эта приведена также и во многих других учебниках и руководствах.

Тем не менее эта важнейшая теорема оказалась неверной. Опровергающие ее контрпримеры — т. е. примеры систем дифференциальных уравнений, удовлетворяющих условиям Липшица, и, в то же время, не имеющих непрерывной зависимости решений от коэффициентов и параметров — были опубликованы в 2000 году в книге Петрова Ю. П. и Петрова Л. Ю. "Неожиданное в математике и его связь с авариями и катастрофами последних лет", выдержавшей с тех пор уже 4 издания. Там же были рассмотрены причины отсутствия непрерывной зависимости у целого ряда "особых" систем и критерии их выделения.

Обнаружение систем дифференциальных уравнений, удовлетворяющих условиям Липшица и все же не имеющих непрерывной зависимости решений от параметров, требует, разумеется, существенного уточнения всех методов численного решения систем. Один из молодых математиков назвал это обнаружение "одним из важнейших открытий конца XX века, возможно, даже самым важным!" Более подробно об истории обнаружения "особых" систем, решения которых не имеют непрерывной зависимости от параметров, будет рассказано в последующих главах.

Рассмотренные примеры показывают, что доказательства в математике не абсолютны. Разумеется, доказательства играют в математике важнейшую роль — еще Аристотель учил, что доказательства не только устанавливают справедливость тех или иных фактов, но и проясняют сущность этих фактов и раскрывают логические связи между ними. Поэтому надо прилагать все усилия к тому, чтобы доказательство обеспечило правильность и непреложность выводов и рекомендаций исследователя. В то же время нужно помнить, что ошибки возможны, и надо обращать особое внимание на поиск контрпримеров.

8.3. Доказательства с помощью компьютера

Стремительное совершенствование вычислительной техники приводит к тому, что она начинает использоваться и при доказательстве теорем. В *главе 7* уже было рассказано об использовании компьютера при доказательстве — еще в 1976 году — знаменитой "теоремы о четырех красках". Правомерно ли систематическое проведение доказательств, осуществляемых с помощью компьютера? (Вопрос о подобных доказательствах поднимается в программах экзаменов кандидатского минимума.) С точки зрения математической традиции подобные доказательства неправомерны. Ведь смысл опубликованного математического доказательства, согласно традиционным представлениям, прочно утвердившимся в XX веке, как раз и заключается в том, чтобы каждый математик мог прочесть доказательство, оценить его обоснованность, если нужно — проверить доказательство, высказать свои сомнения и возражения, если они у него есть. Только после того как опубликованное доказательство прошло подобное испытание среди математического сообщества, оно считается окончательно признанным. Напомним, что именно так шло к признанию доказательство Уайлсом великой теоремы Ферма, рассмотренное в *главе 7*. Первоначально, в 1993 году, в его доказательстве при обсуждении была даже обнаружена ошибка, и только после того, как Уайльс эту ошибку исправил и в 1995 году представил на всеобщее обсуждение усовершенствованное доказательство, оно было признано — признано потому, что в усовершенствованном доказательстве уже никто не нашел ошибки.

А как искать ошибку в доказательстве, проведенном компьютером? Как можно понять такое доказательство, оценить его смысл и те связи, которые оно выявляет между различными сторонами исследуемой математической модели? Разобраться в деталях чужой сложной программы практически нереально. Компьютеру придется просто доверять. Поэтому доказательство с помощью компьютера больше похоже не на обычное классическое доказательство, а на то "честное слово дворянина", которое в XVII веке дал маркиз де Лопиталь своему ученику (об этом "слове дворянина" рассказано в ***примечании 10*** *к главе 7*).

Однако вычислительная техника очень быстро развивается, облик математики меняется, постепенно отходит от ее классического облика (недаром в программах кандидатских экзаменов упоминаются уже не только неклассические, но и "постнеклассические типы научной рациональности"). Не исключено, что в дальнейшем придется полагаться на "честное слово" хорошей и "заслуживающей доверия" вычислительной машины.

8.4. "Априорное" знание и аксиоматический подход

Великий философ Иммануил Кант утверждал, что представления о структуре пространства, соответствующие эвклидовой геометрии, являются "априорными" (т. е. "доопытными"), врожденными представлениями, теми начальными условиями, на основе которых формируется и складывается человеческий опыт. "Априористские" идеи в философии, о которых говорится в программах кандидатских экзаменов, вступили в противоречие с результатами исследований Н. И. Лобачевского, о которых было рассказано в *главе 4*. Эти исследования показали, что "априорных знаний" (во всяком случае, знаний о свойствах пространства) фактически нет, что все зависит от выбранной системы аксиом и постулатов.

Если мы примем "пятый постулат" Эвклида (например, в форме "на плоскости через точку, лежащую вне прямой, проходит только одна прямая"), то придем к выводу, что пространство описывается эвклидовой геометрией, из которой следует, в частности, что существуют подобные фигуры, а сумма углов в любом треугольнике равна двум прямым.

Если же мы примем постулат Лобачевского, а именно, что "на плоскости через точку, лежащую вне прямой, проходит много параллельных прямых, не пересекающихся с данной прямой", то мы придем к другой геометрии — геометрии Лобачевского — и к совсем другим выводам о свойствах пространства. Мы должны будем признать, что вообще не существует подобных фигур и даже подобных треугольников, и сумма углов треугольника зависит от длин его сторон. А вопрос о том, какая из геометрий является истинной (или, если точнее, — какая из геометрий лучше описывает свойства окружающего нас мира), может быть решен — хотя бы в принципе — на основе опыта. Опыт и астрономические измерения, проведенные Лобачевским, показали, что в пределах точности тогдашних геодезических и астрономических измерений геометрии Эвклида и Лобачевского равноправны.

Исследования Н. И. Лобачевского постепенно изменили сущность аксиоматического подхода к построению научной теории. Раньше считалось, что в качестве аксиом, лежащих в основании теории, надо выбирать ясные, очевидные, не подлежащие сомнению истины — такие как аксиомы Евклида: "целое больше части", "равные одному и тому же равны между собой", "пятый постулат" Евклида об единственной параллельной, о котором уже говорилось, и др. Постепенно в ходе исторического развития науки выявлялось, что абсолютных, во всех случаях истинных положений очень мало, что даже такая, казалось бы, совершенно неоспоримая истина, что "целое больше части" в применении к бесконечным множествам уже несправедлива.

Поэтому аксиоматический подход к построению научной теории стали проводить по другому: сначала строится система аксиом, которым должны удовлетворять исследуемые объекты или операции над ними, затем из аксиом выводятся следствия и на основе этих следствий исследуются свойства объектов, удовлетворяющих введенным аксиомам. При этом аксиомы необязательно должны быть очевидными.

Так, например, хорошо известен набор аксиом арифметики или набор законов действий над числами:

1. Если a и b — числа, то сумма $a+b$ и произведение ab тоже числа.
2. Ассоциативный закон: $(a+b)+c=a+(b+c)$ и $a(bc)=(ab)c=abc.$
3. Переместительный, или коммутативный закон: $a+b=b+a$; $ab=ba.$ И ряд других законов (аксиом).

Если отказаться от переместительного закона для умножения и допустить, что может быть $ab \neq ba,$ то получится другая система аксиом, которой числа не удовлетворяют, но удовлетворяют, например, матрицы. Действительно, если A и B — матрицы, то, как известно, возможны случаи, когда $AB \neq BA.$

Хотя аксиома $ab=ba$ кажется естественной и очевидной, существуют важные объекты (матрицы, преобразования пространства, кватернионы и т. п.), которые подчиняются другой системе аксиом; аксиома $ab=ba$ для них не справедлива.

Система аксиом должна, разумеется, быть непротиворечивой, а сами аксиомы — независимыми друг от друга. Построить систему аксиом, удовлетворяющую требованиям непротиворечивости, полноты и независимости нелегко. В *главе 5* была приведена удовлетворяющая всем этим требованиям сложная современная система аксиом геометрии, разработанная Д. Гильбертом. Она приведена для того, чтобы читатель мог оценить, какой большой путь прошла наука от простых аксиом и постулатов Евклида к системе аксиом Гильберта.

В XX веке были сделаны попытки применить аксиоматический метод не только к математике, но и к другим наукам. В области физики удалось достигнуть заметных успехов, в области гуманитарных наук возможности и успехи применения аксиоматического метода пока проблематичны.

Заметим, что еще в XVII веке Б. Спиноза (1632—1677) сделал попытку изложить этику на математическом языке, на языке теорем, выводимых из определений и аксиом (об этом говорилось в *главе 2*). Тогда эта попытка не оказалась удачной. Будущее покажет, окажутся ли удачными новые попытки.

Но даже независимо от возможных успехов или неуспехов применения аксиоматического метода к гуманитарным наукам, не вызывает сомнений, что методы естественных наук формировались под сильным влиянием математики, математической доказательности, математических аксиом и теорем. Полемизируя с известным афоризмом Гаусса: "математика — это царица наук", математик И. М. Яглом считает, что математика является скорее не царицей, а служанкой естественных и гуманитарных наук, доставляя им аппарат для точного описания фактов и явлений. "Но математика, — говорит И. М. Яглом, — это та служанка, без которой госпожа не будет госпожой, без которой и науку за науку признать невозможно, ибо «уровень научности» той или иной дисциплины можно измерить объемом применяемых в ней математических рассуждений, глубиной и доказательностью характерных для этой дисциплины дедуктивных выводов".

8.5. Концепция научных революций Т. Куна

Концепция "научных революций", о которой говорится в программах кандидатских экзаменов, была выдвинута в работах известного историка науки Т. Куна, который считал, что развитие науки происходит неравномерно. Время от времени в науке происходят "революции", сопровождающиеся "сменой парадигм" (термин, введенный Т. Куном). Слово "парадигма" в переводе с греческого означает просто способ склонения или спряжения, так что термины, использованные Т. Куном, означают только, что в ходе развития науки происходят изменения в отношении к ее методам и объектам исследования.

"Смену парадигм" и характер "научных революций" удобно проследить на примерах из истории математики, приведенных в предыдущих главах. Первую "парадигму" ввели в Древней Греции пифагорейцы — Пифагор и его ученики. Основным объектом их исследования были числа и свойства чисел, поскольку они считали, что все законы мира можно выразить с помощью чисел и "весь мир в целом является гармонией и числом". Именно пифагорейцы открыли роль простых чисел в разложении целого числа на множители, установили простейшие числовые закономерности типа: "сумма n первых нечетных чисел дает n-е квадратное число", т. е., что $1+3+5+...(2n-1)=n^2$.

Большое внимание уделяли пифагорейцы поиску совершенных и дружественных чисел (совершенное число равно сумме своих делителей, например, 6 = 1 + 2 + 3, а дружественные числа — это те, каждое из которых равно сумме делителей другого; пример — числа 220 и 284).

"Смена парадигм" в науке Древней Греции произошла после открытия "несоизмеримости стороны квадрата его диагонали". О значении этого открытия было рассказано в *главе 1*. Ведущая роль чисел и числовых закономерностей в греческой науке была сразу поставлена под сомнение, поскольку открылось, что решение даже простейшего уравнения $x^2=2$ (не говоря о более сложных) не может быть никаким известным грекам числом — ни целым, ни дробным. Поэтому основное направление исследований в науке Древней Греции переместилось от изучения чисел к изучению фигур, к геометрии. Именно в области геометрии в Древней Греции были достигнуты наибольшие успехи.

Еще одной важной особенностью математики Древней Греции являлось очень осторожное отношение к понятию бесконечности, о котором тоже уже говорилось в *главе 1*. Родилась эта осторожность после того, как в V веке до нашей эры Зенон из Элеи продемонстрировал грекам свои знаменитые "апории" (парадоксы) — о "стреле", об "Ахиллесе и черепахе". Эти парадоксы особенно наглядно показали всю сложность понятия "бесконечности" и необходимость очень осторожного обращения с ним.

В противоположность этому математики Западной Европы в XVII—XVIII веках очень широко пользовались понятием "бесконечно малой величины". Само дифференциальное и интегральное исчисление, основы которого были заложены в Европе в XVII веке, называли тогда "исчислением бесконечно малых". Надо отметить, что в понимании сущности "бесконечно малых" величин в те годы не было полной ясности. Даже Лейбниц понимал иногда "бесконечно малые" как некие очень малые, но конечные величины и писал, что они "малы так, как песчинка мала по сравнению с земным шаром". Аналогичными представлениями пользовались И. Кеплер (1571—1630) и Б. Кавальери (1598—1647), успешно применявшие их для вычисления площадей и объемов различных фигур и тел. Так, например, Кеплер при вычислении объема шара рассматривал шар как совокупность большого числа очень малых пирамидок с вершинами в центре шара, поэтому объем шара, согласно известной формуле для пирамид, будет равен произведению одной трети радиуса шара r на сумму всех оснований пирамидок. Но сумма оснований равна поверхности шара, т. е. $4\pi r^2$. С учетом этой формулы Кеплер сразу получил для объема шара правильное соотношение:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3. \tag{3}$$

Надо сразу отметить: Кеплер признавал, что его рассуждения, так легко и просто приводившие к формуле (3), имеют лишь эвристическое значение, а любителей строгих доказательств он отсылал к сложным рассуждениям Архимеда, использующим "метод исчерпывания".

В XVII и XVIII веках ясности в понимании "бесконечно малых величин" не было, сосуществовали различные точки зрения даже у одного и того же автора. Так, у Лейбница, наряду с уже упомянутым сравнением дифференциала с "песчинкой относительно земного шара", дифференциал dx понимается (в других работах) более четко — как величина, которая меньше любой конечной величины (а, значит, и песчинки), но все же не равна нулю (т. е. дифференциал является актуальной бесконечно малой величиной). Аналогично этому дифференциалы высших порядков d^2x, d^3x определяются как бесконечно малые величины второго, третьего и т. д. порядков малости, каждая из которых бесконечно мала по сравнению с предыдущей.

Разумеется, все эти представления не отличались исчерпывающей ясностью и точностью и даже несли на себе некоторый налет мистики. Не удивительно, что представления современных ему математиков начала XVIII века подвергал острой критике, например, упоминаемый в "Программах" философ Джордж Беркли (1685—1753), который в 1734 году опубликовал свою работу с длинным названием: "Аналист или рассуждение, адресованное неверующему математику, в котором исследуется, является ли предмет, принципы и заключения современного анализа более отчетливо познаваемыми и с очевидностью выводимыми, чем религиозные таинства и догматы веры". В этой работе Беркли утверждал, что теоремы математического анализа не более достоверны, чем религиозные рассуждения. И что в дифференциальном исчислении правильные результаты получаются только потому, что "одни ошибки компенсируют другие".

Только постепенно (и, возможно, не без влияния критики со стороны Д. Беркли), в работах Даламбера (1717—1783) и особенно — О. Коши (1789—1857) выработалось представление о "бесконечно малой величине" просто как о переменной, имеющей пределом нуль, а о дифференциале dy — как о главном, линейном члене приращения функции $y(x)$, равном произведению производной функции $\dot{y}$ на приращение независимой переменной Δx, т. е.

$$dy = \dot{y}\Delta x. \tag{4}$$

Поскольку приращение независимой переменной Δx произвольно, то дифференциал совсем не обязан быть бесконечно малой и даже просто малой величиной. Но если $\Delta x \to 0$, то и $dy \to 0$ (если только производная $\dot{y}$ существует и конечна).

Новые представления лишили "исчисление бесконечно малых", т. е. дифференциальное и интегральное исчисление — какого-либо налета таинственности и мистицизма. В этих условиях использование терминов "бесконечно малая величина", "бесконечно малое приращение независимой переменной" совершенно напрасно связывают ясные и точные понятия математического анализа со сложным и противоречивым понятием бесконечности. Поэтому современные математики вместо термина "бесконечно малая величина" широко используют равносильный ему термин "сколь угодно малая величина", который сразу облегчает понимание.

Интересно отметить, что в истории математики наряду со "сменой парадигм" происходит иногда возврат к прежним парадигмам, но, разумеется, уже на новой основе. Так, после работ О. Коши еще в XIX веке из математики были постепенно изгнаны "актуальные бесконечно малые величины", и математический анализ стал основываться на понятиях предела и предельного перехода. Однако в середине XX века в работах американского математика А. Робинсона (Robinson, 1918—1974) и его последователей получил развитие так называемый "нестандартный анализ", в основе которого лежит представление об актуальных бесконечно малых величинах различных порядков. Разумеется, в "нестандартном анализе" актуальные бесконечно малые вводятся уже на основании точных определений, без всякой двусмысленности и мистики. Считается, что каждое число k в "нестандартном анализе" может быть представлено в виде последовательности:

$$k = k_0 + k_1\alpha + k_2\beta + ..., \tag{5}$$

где k_0; k_1; k_2 — обычные числа, а λ; β; γ... — бесконечно малые величины различных порядков. Они не равны нулю, но не подчиняются аксиоме Архимеда; для них неравенство $n\alpha < k_0$ выполняется для любых n и k_0 — как бы велико ни было n и как бы мало ни было число $k_0 \neq 0$. Таким образом, сумма любого числа бесконечно малых не может стать больше любого обычного конечного числа. То же самое справедливо и для бесконечно малых высшего порядка: для любых n будет $n\beta < \lambda$ — т. е. сумма любого числа бесконечно малых второго порядка малости не может быть больше бесконечно малой первого порядка.

Последователи Робинсона утверждают, что "нестандартный анализ" облегчает преподавание дифференциального и интегрального исчисления, но далеко не все математики с этим согласны.

Зато не возбуждает сомнений благотворность "смены парадигм" в отношении расходящихся рядов. Известно, что расходящиеся ряды широко использовались в XVIII веке и, в частности, Л. Эйлером, который на основе расходящихся рядов вида:

$$\mathrm{I}_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \tag{6}$$

$$\mathrm{I}_2 = 1 - 2 + 3 - 4 + \ldots \tag{7}$$

смог получить решение многих важных задач.

Разумеется, Л. Эйлер прекрасно понимал, что к отысканию сумм рядов (6) и (7) нельзя подходить обычным образом, вычисляя предел частичных сумм (т. е. сумм конечного числа членов ряда). У рядов (6) и (7) частичные суммы ни к какому пределу не стремятся: так, например, сумма первых четырех членов ряда (6) равна нулю, а сумма пяти членов равна единице, шести — снова нулю и т. д. Не стремятся к определенному пределу и частичные суммы ряда (7). При оперировании с подобными рядами Л. Эйлер исходил из другой идеи: существует хорошо известное разложение дроби $\frac{1}{1+x}$ в ряд:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \tag{8}$$

Ряд (8) сходится, конечно, только для $|x| < 1$. Однако если подставить в равенство (8) значение $x = 1$, то получим:

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \tag{9}$$

Справа получается ряд (6), и поэтому его суммой следует считать число $\frac{1}{2}$. Таким образом, за сумму расходящегося ряда Эйлер принимал значение той функции, из разложения которой был получен ряд. Для ряда (7) такой функцией будет

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots \tag{10}$$

При $x=1$ равенство (10) принимает вид

$$\frac{1}{4}=1-2+3-4+\dots \tag{11}$$

и суммой ряда (7) можно считать число $\frac{1}{4}$. Однако при таком определении суммы ряда трудно получить однозначные результаты. Исходя, например, из разложения в ряд дроби

$$-\frac{1}{1+x}=x-1+x^3-x^2+\dots \tag{12}$$

можно, подставив $x=1$, получить для суммы того же ряда (6) совсем другое значение:

$$-\frac{1}{2}=1-1+1-1+\dots \tag{13}$$

Для того чтобы избежать подобных двусмысленных результатов, О. Коши предложил в 1821 году в своем "Курсе анализа" не использовать расходящиеся ряды, считать их "не имеющими суммы" и пользоваться только сходящимися рядами. Предложение О. Коши было принято, одобрено и стало "математической парадигмой".

Однако в 1880 году итальянский математик Эрнесто Чезаро (Cesaro, 1859—1906) предложил изменить "парадигму" и снова использовать расходящиеся ряды, но уже на основе четкого и не допускающего двусмысленности определения их суммы. Чезаро предложил следующее определение: если задан сходящийся или расходящийся ряд

$$A=a_0+a_1+a_2+\dots, \tag{14}$$

то нужно построить последовательные средние арифметические его частичных сумм:

$$\lambda_1=a_0;\lambda_2=\frac{a_{0+A_1}}{2};\ \dots\ \lambda_n=\frac{a_0+A_1+\dots+A_{n-1}}{n}, \tag{15}$$

где: A_1 — это сумма первых двух членов ряда (14); A_2 — сумма первых трех членов и т. д. Если эта последовательность λ_1; λ_2; ... λ_n при $n\to\infty$ имеет своим пределом число A, то это число называют "обобщенной (в смысле Чезаро) суммой" данного ряда. Из этого определения следует, что если исходный ряд (14) сходится, и последовательность его частичных сумм имеет пределом число A, то и "обобщенная сумма" тоже будет равна A. Однако определение Чезаро позволяет суммировать также и многие расходящиеся ряды.

Так, например, для ряда (6) имеем:

$$\lambda_{2k-1} = \frac{k}{2k-1}; \qquad \lambda_{2k} = \frac{1}{2}, \tag{16}$$

откуда следует, что ряд (6) имеет "обобщенную сумму", равную 0,5 — ту же самую, которую считал истинной суммой Л. Эйлер. На этот раз сумма ряда определена вполне однозначно, и двусмысленностей не возникает.

Методы суммирования расходящихся рядов, разработанные Э. Чезаро и другими математиками XX века, позволили установить ряд важных соотношений в теории числовых рядов и рядов Фурье — об этом подробно рассказано в главе 20 третьего тома книги: Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1949.

Таким образом, "смена парадигм" оказалась, в данном случае, весьма плодотворной для дальнейшего развития математики.

8.6. Философия математики

Под "философией математики" чаще всего понимают обсуждение ее оснований — тех основных положений, которые обеспечивают верность ее выводов. Знание истории математики помогает разобраться в этих очень непростых вопросах. Сложность их заключается в том, что подавляющее большинство выводов, рекомендаций и предсказаний математики не может быть проверено непосредственно на опыте. Вернемся к теореме Л. Эйлера о многогранниках, рассмотренной в *главе 7*. Вывод Эйлера о соотношении числа граней многогранника Γ, его вершин B и ребер P не может быть проверен на опыте прямым пересчетом для многогранника, например, с миллиардом граней. Верность теоремы Эйлера устанавливается доказательством (т. е. собственно — мысленным экспериментом) на основе последовательного "вынимания" треугольников из триангулированной карты, показанной на рис. 7.5. В этом доказательстве мы отвлекаемся от ограничений реального эксперимента, который позволяет "вынуть" из карты только ограниченное и не очень большое число треугольников. Мы полагаем, что можем "вынуть" любое количество треугольников — и только тогда доказываем верность теоремы Эйлера (верность равенства $\Gamma + B - P = 2$) для всех многогранников, для любого числа их граней, вершин и ребер.

Таким образом, в этом доказательстве — как в очень многих других — мы пользуемся абстракцией потенциальной осуществимости, или, как ее часто называют — абстракцией потенциальной бесконечности. Этой абстракцией пользовались еще математики Древней Греции, когда доказывали (по "методу исчерпывания" Евдокса), что с увеличением числа шагов исчерпывания разница между вычисляемым объемом шара и величиной $\frac{4\pi}{3}r^3$ делается сколь угодно малой.

Абстракция потенциальной осуществимости является непосредственным обобщением реального человеческого опыта, и ее использование в математических доказательствах сомнений не вызывает (как не вызывало сомнений и в Древней Греции).

Гораздо сложнее обстоит дело с другой абстракцией, тоже широко применяемой в математике, — абстракцией актуальной бесконечности.

Опираясь на абстракцию потенциальной бесконечности, мы можем считать, что к любому сколь угодно большому натуральному числу может быть прибавлена еще одна единица, что ряд натуральных целых чисел можно продолжать неограниченно — но это не означает, что весь натуральный ряд можно мыслить как завершенный, как единое целое. Более того, поскольку натуральный ряд бесконечен, то он никогда не может быть завершен.

Однако можно перейти к еще более высокой степени абстракции и идеализации и мыслить натуральный ряд — и другие бесконечно продолжаемые процессы — как уже завершенные, как актуально существующие в нашем сознании бесконечные множества. Изучая подобные множества, мы начинаем проникать в мир бесконечного — но в этом мире царствуют совсем другие законы, отличные от тех, которым подчиняется мир конечного, и ориентироваться в мире бесконечностей очень нелегко.

Как уже рассказывалось в *главе 1*, в мире бесконечностей утрачивает силу одна из важнейших аксиом — "целое больше своей части". Если α — число элементов некоторого бесконечного множества — например, натурального ряда, — то $\alpha + 1 = \alpha$, что в мире конечных чисел невозможно. Поэтому математики Древней Греции отказались от использования понятия актуальной бесконечности — и это не удивительно, поскольку противоречий с наглядными интуитивными представлениями в мире бесконечного очень много.

Вот один из примеров, рассмотренных Дж. Литтлвудом (Littlewood, 1885—1977) в его книге (Литтлвуд Дж. Математическая смесь. Издание пятое. — М.: Наука, 1990, с. 9). Придадим примеру Литтлвуда наглядную форму: за одну минуту до полуночи в большую корзину кладутся два яблока с номерами 1 и 2 и вынимается одно с номером 1. За полминуты до полуночи в корзину кладутся еще два яблока с номерами 3 и 4 и вынимается одно с номером 2. За $^1/_3$ минуты до полуночи кладутся снова два яблока и вынимается одно с номером 3. И так далее: за $\frac{1}{n}$ долю минуты до полуночи кладутся два яблока и вынимается одно, с номером n. Задается вопрос: сколько яблок будет в корзине ровно в полночь, т. е. после завершения бесконечного процесса вкладывания и вынимания яблок? Мы в этом случае отвлекаемся, абстрагируемся от того, что бесконечный процесс не может быть завершен — т. е. используем абстракцию актуальной бесконечности. Ответ Литтлвуда: корзина будет пуста, в ней не будет ни одного яблока. Какое бы яблоко мы ни назвали — например, яблоко с номером 106 — оно будет вынуто из корзины в момент, когда до полуночи останется $^1/_{106}$ минуты. Множество яблок, оставшихся в корзине в полночь, имеет структуру:

$$P_1 + P_2 - P_1 + P_3 + P_4 - P_2 + \dots$$

и "аналитик сразу скажет, что это множество — пустое", утверждает Литтлвуд.

Уже сам по себе этот пример парадоксален: количество яблок в корзине растет, постоянно растет — а потом все они исчезают. Теперь продолжим пример Литтлвуда. Пусть останутся та же корзина и яблоки, останется тот же самый процесс вкладывания и вынимания, но теперь при вынимании яблок из корзины мы всего лишь не обращаем внимания на их номера. Ответ будет другим: корзина любых размеров в полночь переполнится. Прежнее доказательство отсутствия яблок в корзине в полночь, основанное на их номерах, теряет силу. Теперь можно учитывать только то, что в каждую $\frac{1}{n}$ долю оставшейся до полуночи минуты число яблок возрастает на единицу, и в полночь их число будет суммой бесконечного ряда:

$$\mathrm{I} = 1 + 1 + 1 + \dots \qquad (17)$$

Но этот ряд расходится, его сумма заведомо больше любого наперед заданного числа (если задано большое число k, то достаточно просуммировать $k+1$ членов ряда (17) для того, чтобы даже его частичная сумма стала больше, чем k).

Отметим, что в теории бесконечных рядов противоречия с наглядными, интуитивными представлениями встречаются очень часто. Так, для любого конечного множества складываемых чисел, как известно, "от перестановки слагаемых сумма не меняется". В то же время сумма бесконечного ряда может измениться от перестановки его членов.

Вот простой пример. Ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots \tag{18}$$

сходится. Можно вычислить и его сумму, равную натуральному логарифму числа 2. Если переместить его члены так, чтобы после одного положительного члена следовали два отрицательных:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots, \tag{19}$$

то сумма ряда уменьшится вдвое (доказательство приведено в книге: Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. — М.: ОГИЗ, 1948, с. 367—368).

Там же приведены примеры, когда произведение двух рядов, имеющих конечные суммы, оказывается расходящимся рядом, имеющим бесконечную сумму, и т. п.

Эти примеры показывают, что в области бесконечного следует полагаться не на интуицию, а только на доказательства, построенные на аксиомах. Однако и при аксиоматическом построении теории множеств в ней обнаружился целый ряд противоречий, о которых уже рассказывалось в *главе 5*.

Дополнительные сложности возникли после того, как в 1960—1963 годах американский математик Коэн (о нем тоже уже рассказывалось в *главе 5*) доказал, что возможно существование двух непротиворечивых систем аксиом теории множеств, одна из которых считает истинной известную "гипотезу континуума", а другая предполагает существование множеств промежуточной мощности, лежащей между мощностью континуума и мощностью счетных множеств. Из результатов Коэна следует, что на основе двух разных систем аксиом теории множеств можно непротиворечиво построить две системы математического анализа и математики в целом. Назовем их условно — система *А* и система *Б*. Не исключено, что какая-либо теорема, доказанная на основе аксиом, используемых в системе *А*, будет неверной на основе аксиом, используемых в системе *Б*.

С учетом всех этих трудностей и противоречий получило развитие интуиционистское направление (или — "интуиционизм") в философии и математике. Основателем интуиционизма считается голландский математик Брауэр (Brouwer L., 1881—1966). В дальнейшем к интуиционистскому направлению примкнули многие выдающиеся математики — Г. Вейль (Weyl H., 1885—1955), А. Тарский (Tarski A., 1902—1983), А. Гейтинг (Heyting A.) и многие другие.

Интуиционисты считали, что математика должна быть построена на основе конечных конструктивных средств и на основе системы натуральных чисел, причем сами числа натурального ряда считаются известными из интуиции. Таким образом, математика основывается на безусловно присущем сознанию интуитивном ощущении сменяемости и последовательности событий, благодаря которому возникает ясное представление о последовательности натуральных чисел. Прочие математические объекты строятся на основе натуральных чисел уже чисто конструктивно — т. е. за конечное число шагов путем привлечения конечного числа операций.

В некоторых своих частях интуиционизм является почти революционным. Для интуициониста доказательство существования объекта требует возможности его конструктивного построения за конечное число шагов; если же из факта несуществования объекта следует противоречие, то с интуиционистской точки зрения это не считается достаточным доказательством. Таким образом, интуиционисты отвергают закон "исключенного третьего" для бесконечных множеств, оставляя его только для конечных множеств, где все можно проверить непосредственно. Между тем на "законе исключенного третьего" основаны доказательства очень многих утверждений современной математики. Интуиционистами эти утверждения поставлены под сомнение. Их истинность (или, может быть, ложность) нужно доказывать отдельно и доказывать "конечными средствами", что, конечно, очень непросто сделать.

Для интуиционистов не существует понятие множества как некой готовой совокупности элементов. Множество считается заданным лишь тогда, когда указан закон, который позволяет последовательно, шаг за шагом, построить все элементы множества. Тем самым из математики исключаются такие противоречивые множества, как "множество всех множеств" и все связанные с подобными множествами противоречия в теории множеств, о которых уже рассказывалось в *главе 5*.

Таким образом, интуиционисты вводят в математику ряд ограничений, направленных на обеспечение большей четкости и убедительности ее построений, на устранение ряда возникших ранее противоречий.

Решающим для судьбы интуиционизма является вопрос о возможности построения полноценной математики с учетом вводимых интуиционистами серьезных ограничений. Если бы оказалось, что вся математика может быть перестроена на интуиционистской основе, и это не приводит к большим осложнениям, то проблему основ математики можно было бы считать решенной. Интуиционисты многое сделали в этом направлении, но все же большинство математиков считает, что налагаемые ими ограничения очень жестки, слишком многое из того, что дорого и привычно математику, приносится в жертву, а доказательства интуиционистов слишком громоздки. Поэтому большинство математиков предпочитает пользоваться традиционными методами теории множеств. Ну, а насчет противоречий — большинство математиков считает, что все противоречия получат когда-нибудь потом полное объяснение[14].

Близок к интуиционизму и "конструктивизм", или конструктивное направление в математике, которое развивали многие ученые в Советском Союзе и России. О них уже рассказывалось в *главе 5*. Конструктивизм также отрицает всеобщность "закона исключенного третьего", исключает абстракцию актуальной бесконечности. Расхождениями между интуиционизмом и конструктивизмом наиболее известный из конструктивистов СССР, член-корреспондент АН СССР А. А. Марков считает то, что "конструктивисты, в отличие от интуиционистов, не считают свои построения чисто умственным занятием. Кроме того, интуиционисты рассуждают о неких "свободно становящихся последовательностях" и рассматривают континуум как "среду свободного становления", тем самым привлекая к рассмотрению неконструктивные объекты". Таким образом, мы убеждаемся, что "расхождения" между интуиционистами и конструктивистами не очень велики, да и сам А. А. Марков считает, что конструктивизм можно рассматривать как ответвление основанного Л. Брауэром интуиционизма.

Отношения между интуиционистами, конструктивистами и математиками традиционной ориентации далеко не всегда были безоблачными.

Вот один из примеров. В Амстердаме в 1954 году проходит Международный математический конгресс. Председатель одной из секций объявляет: "Сейчас мы заслушаем доклад об интуиционистском доказательстве теоремы Рисса—Фишера". Один из почтенных участников конгресса (Фавар) сразу возмущенно закричал с места: "Теорема Рисса—Фишера давно доказана, нечего нам каких-то интуиционистов слушать. Мне придется уйти отсюда". "Давайте уйдем все вместе", — обратился он к окружающим. Правда, далеко не все последовали его примеру.

Вот другой пример. В. А. Успенский защитил докторскую диссертацию по математической логике. Три официальных оппонента, причем такие видные ученые, как А. Н. Колмогоров, А. И. Мальцев, П. С. Новиков, — признали диссертацию хорошей. С ними согласился и Ученый совет. Однако по правилам Высшей аттестационной комиссии (ВАК) докторская диссертация после отзывов официальных оппонентов и защиты на Ученом совете посылается к еще одному рецензенту, которого сами диссертанты называют между собой "черным оппонентом"; часто именно его отзыв решает судьбу диссертации. На этот раз "черным оппонентом" оказался известный конструктивист и интуиционист Н. А. Шанин, который в своем отзыве написал, что диссертация ошибочна, поскольку диссертант пользовался традиционной логикой, а единственно правильной и не содержащей противоречий является логика интуиционистская. Поэтому диссертацию, по мнению Н. А. Шанина, следует отклонить. В тот раз, после долгого обсуждения ВАК все же утвердил диссертацию — утвердил просто большинством голосов, но не единогласно (цитирую по книге: Никольский С. М. Воспоминания. — М.: МИАН, 2003, с. 159)[15].

Еще одним направлением в философии математики является так называемый "формализм", наиболее известным представителем которого был Давид Гильберт (Hilbert, 1862—1943). Формалисты считают, что математика имеет дело с формальными логическими системами, системами аксиом и выводимых из них теорем. При этом аксиомы не обязаны быть "очевидными истинами", они могут вводиться формально. Из аксиом выводятся следствия, возникает теория, для которой потом может найтись соответствие (интерпретация) в реальном мире. На основе этих положений Д. Гильберт в 1899 году в своей работе "Основания геометрии" построил для геометрии систему аксиом, значительно более полную и совершенную, чем предложенная в свое время Эвклидом.

Систему аксиом Д. Гильберта мы привели в *главе 5*. Однако Гильберт не ограничился геометрией. Многие годы (1920—1939) сам Гильберт и его сотрудники пытались построить всю математику на прочной основе аксиом и таких правил вывода следствий из аксиом, которые не приводили бы к противоречиям и позволили бы построить всю математику на надежной и непротиворечивой основе. Как уже было рассказано в *главе 5*, эта величественная программа оказалась невыполнимой, поскольку в 1931 году К. Гедель доказал, что во многих областях математики существуют истинные положения, которые нельзя доказать в наперед заданной системе аксиом *(см. главу 5)*.

Заметим, что из знаменитой теоремы Геделя часто делали не совсем верные выводы, считая ее ограничивающей возможности человеческого познания: "Познание ограничено, если существуют истины, которые нельзя доказать". На самом деле из теоремы Геделя это не следует. Наоборот, если мы заинтересовались каким-либо конкретным утверждением, то оно всегда может быть доказано (или опровергнуто) на основе специально выбранной системы аксиом. Другое дело, что на основе один раз выбранной системы аксиом невозможно доказать сразу *все* теоремы достаточно богатой области математики.

Да, структура истинных утверждений состоит из "матерÉtat" и "островов истинности", о которых было рассказано в *главе 5*. Но всегда можно, — выбрав другую систему аксиом, — построить "мост" на любой "остров истинности" и достичь его. Для познания нет границ.

Так считал и Д. Гильберт, для творчества которого были характерны "уверенность в неограниченной силе человеческого разума, убеждение в единстве математической науки и единстве математики и естествознания". Недаром одна из его последних статей кончается лозунгом "Мы должны знать — и мы будем знать!"

8.7. Прикладная математика

Для ответа на вопросы программы кандидатских экзаменов по прикладной математике, ее логике и особенностям приложений лучше всего воспользоваться очень хорошо написанными книгами Блехмана И. И., Мышкиса А. Д. и Пановко Я. Г. "Прикладная математика; предмет, логика, особенности подходов", изданной в Киеве в 1976 году, и "Механика и прикладная математика. Логика и особенности приложений математики", вышедшей в 1983 году в московском издательстве "Наука".

Это особенно полезно сделать потому, что до сих пор — как об этом рассказывается в указанных книгах — распространены мнения о том, что прикладной математики нет: есть единая наука — математика , и есть ее приложения. В книгах Блехмана, Мышкиса и Пановко подробно доказывается неверность подобных мнений. Их неверность доказывают и исторические факты, рассмотренные в предыдущих главах этой книги. История науки подтверждает, что основным двигателем математики были именно приложения, что необходимость решения практических задач приводила к изобретению новых методов решения, а из методов развивались потом новые разделы математики. Как писал Ф. Клейн: "Чисто логические концепции должны составить, так сказать, твердый скелет организма математики, сообщающий ей устойчивость. Но сама жизнь математики, ее продуктивность относятся преимущественно к ее приложениям… Изгнать приложения из математики — это то же, что искать живое существо с одной только костной основой, без мускулов, нервов и сосудов". И все же попытки принизить прикладную математику неоднократно делались. Как писал Г. Биркгоф: "Многие чистые математики, будучи всего лишь прикладными логиками, настойчиво умаляют значение прикладной математики и с радостью уморили бы ее до смерти".

Для того чтобы успешно и доказательно противостоять этим ошибочным мнениям, будет очень полезно подробнее ознакомиться с упомянутыми книгами И. И. Блехмана, А. Д. Мышкиса, Я. Г. Пановко — тем более, что написаны они, как мы уже отмечали, очень просто и доступно.

Глава 9

Вычислительная техника. Алгоритмы и приборы

Понятие "вычислительная техника" мы будем понимать в широком смысле и включать в него вычислительные алгоритмы, приборы и устройства, облегчающие счет, а также вычислительные машины, которые в последние десятилетия получили столь бурное и стремительное развитие.

Вычислительным машинам будет посвящена *глава 10*. Здесь же мы рассмотрим развитие вычислительных алгоритмов, развитие приборов и устройств, облегчающих счет.

9.1. Первые алгоритмы и счетные устройства

Самым первым и простейшим счетным прибором, который сама природа предоставила в распоряжение человека, были пальцы его рук. Первичный счет — это "счет на пальцах". Когда пальцев начинало не хватать, переходили к камушкам. В Древнем Риме "камушек", "галька", "голыш" назывался "calculi", откуда произошло позднейшее латинское слово "calculatore" (вычислять) и русское слово "калькуляция".

Можно догадываться, что именно от счета "на пальцах" произошел постепенный переход к позиционным системам счисления, и самой первой системой была, очевидно, пятеричная: вместо числа семь говорили: "рука и еще два пальца"; вместо числа шестнадцать — "три руки и еще палец". Такой счет стал привычным и постепенно "число рук" стало пониматься как число единиц старшего разряда.

Еще в Древнем Египте вместо пятеричной системы счисления по "пятеркам" и "пятеркам пятерок" стали использовать более удобную десятичную систему, а в Китае еще очень долго пользовались счетом "по пятеркам".

Счет "по разрядам" сразу облегчил обращение с большими числами, позволил вести учет налогов и сборов в крупных государствах Древнего мира.

Очень давно, еще в Древнем Египте стал использоваться специальный счетный прибор, известный под именем "абак". Абак — это просто дощечка, покрытая слоем песка или пыли, на которой острой палочкой проводились линии, разделявшие дощечку на несколько колонок, и в каждую колонку укладывались камешки, соответствующие числу единиц каждого разряда. Если, например, в дальнейшем счете участвовало число 16, то клали шесть камешков в крайнюю правую колонку и один — в следующую. Для нахождения, например, суммы 16 + 18, складывали сперва числа младшего разряда: поскольку 8 + 6 = 14, то в крайней правой колонке клали четыре камешка, а один добавляли в следующую колонку. Далее складывали старшие разряды: 1 + 1 = 2 и с учетом ранее положенного получалось три камешка, а с ними — и вся правильная сумма: 16 + 18 = 34. Фактически здесь использовался алгоритм поразрядного сложения. Мы видим, что на абаке легко выполнялось сложение (а также и вычитание) любых многозначных чисел. Поэтому абак получил широчайшее распространение, применялся и в Древнем Египте, и в Древнем Вавилоне, и в Древней Греции.

Сложнее обстояло дело с умножением. Для выполнения умножения еще в Древнем Египте использовался простой алгоритм "последовательного удвоения".

Пусть, например, нужно умножить 213 на 37. Египетский вычислитель составлял соответствующую таблицу (рис. 9.1).

/	1	213
	2	426
/	4	852
	8	1704
	16	3408
/	32	6816

Рис. 9.1. Таблица умножения 213 на 37

В этой таблице в левый столбец сперва ставится число единица, в правый — множимое (в данном примере — 213). Далее каждое последующее число в обоих столбцах получается удвоением предыдущего. Таблица продолжалась до тех пор, пока в левом столбце не появится число, удвоение которого уже превысит множитель (в нашем примере — 37). Это большее число у нас равно 32, и его отмечали наклонной черточкой. Далее такой же черточкой в левом столбце отмечали числа, сумма которых (вместе с последним числом 32) равнялась бы множителю. В нашем примере этими числами будут 1 и 4, поскольку 1 + 4 + 32 = 37. Для того чтобы получить произведение, достаточно сложить числа правого столбца, стоящие против тех, что отмечены в левом столбце косой чертой. Получаем (рис. 9.2):

	213
+	852
+	6816
	7881

Рис. 9.2. Суммирование отмеченных чисел и получение результата

Реально вычислитель не выписывал отдельно вторую таблицу, а просто складывал на абаке числа правого столбца, стоящие против тех, что в левом столбце отмечены косой чертой, и получал правильный результат.

Подбор чисел, отмеченных косой чертой, легко осуществляется: достаточно идти в левом столбце снизу вверх, пропуская те числа, прибавление которых к сумме предыдущих дает число, превышающее множитель.

Аналогично операция удвоения (вместе с операцией сложения) лежит в основе изобретенного еще в Древнем Египте алгоритма деления целых чисел. Если, например, требовалось разделить 7881 на 213, то составлялась таблица (рис. 9.3), во всем аналогичная таблице на рис. 9.1, но составляемая, начиная с правого столбца. Первое число правого столбца — число 213 — начинали последовательно удваивать.

Составление таблицы продолжалось до тех пор, пока следующее удвоение не даст в правом столбце числа большего, чем делимое. Далее производилось сложение нижнего числа правого столбца с числами, стоящими выше него. При сложении 6816 + 3408 = 10 224 получалось число бóльшее, чем делимое. Поэтому число 16 в левом столбце пропускалось, косой чертой не отмечалось. При сложении 6816 + 1704 = 8520 снова получалось число большее, чем делимое, поэтому число 8 в левом столбце снова пропускалось, косой чертой не отмечалось. Но при сложении 6816 + 852 = 7668 получалось число, меньшее делимого, поэтому в левом столбце число 4 отмечалось косой чертой. Далее складывались числа 7668 + 213 = 7881, получилось число, равное делимому, поэтому число 1 в левом столбце тоже отмечалось косой чертой. Теперь для получения правильного значения частного достаточно просуммировать числа, отмеченные в левом столбце косой чертой с добавлением последнего числа этого столбца: 32 + 4 + 1 = 37.

/	1	213
	2	426
/	4	852
	8	1704
	16	3408
	32	6816

Рис. 9.3. Таблица деления 7881 на 213

В данном случае деление выполнялось нацело. Если бы было задано поделить на 213 число 7885, то, получив после последнего сложения 7668 + 213 = 7881 число, менее делимого на четыре единицы, вычислитель снова отметил бы в левом столбце единицу косой чертой и получил бы частное 32 + 4 + 1 = 37 и остаток 7885 – 7881 = 4.

Мы убеждаемся, что вычислительные алгоритмы, разработанные еще в Древнем Египте, позволяли успешно выполнять сложение, вычитание, умножение и деление достаточно больших чисел.

Неудобство абака заключалось в том, что нужно было руками перекладывать камешки. В средневековом Китае догадались заменить камешки бусинками, нанизанными на прутики. Любое число бусинок можно было перебрасывать справа налево или слева направо одним движением руки, что сокращало время, затрачиваемое на вычисления. Так родились "китайские счеты", которые в Китае назывались "суаньпан".

9.2. Русские счеты

В XVI—XVII веках русские умельцы значительно усовершенствовали китайский суаньпан, создав замечательные "русские счеты", которые получили широчайшее распространение в России и использовались еще в XX веке. Английский капитан Перри, посетивший Россию при Петре Первом, писал: "Для счета они (русские) пользуются изобретенным ими особым прибором с нанизанными на проволочные прутья шариками или бусами, которые они устраивают в ящичке или небольшой раме. Передвигая туда и сюда шарики, они справляются с делением и умножением разных сумм".

Действительно, на "русских счетах", помимо сложения и вычитания, очень удобно и быстро производится умножение и деление на два, умножение на 4, на 10 и 5, на 8 и 9 и многие другие действия. Так, для деления на два достаточно уполовинить число косточек в каждом разряде, начиная со старшего. Если в каком-либо разряде число косточек n оказывалось нечетным, то уполовинивали число $n-1$, но зато в следующем разряде уполовинивали число $10+m$. Для умножения на 10 просто считали все разряды на единицу старше, а для умножения на 5 умножали на 10 и делили на два. Такие же простые правила использовали для умножения на 9, на 8, на 6 и т. п.

О том, как умело пользовались счетами, можно прочесть в рассказе молодого А. Чехова "Репетитор", явно списанном "с натуры". В этом рассказе с сыном купца Удодова Петей, учеником второго класса гимназии, занимается репетитор — гимназист седьмого класса Егор Зиберов, которого купец почтительно называет Егором Алексеевичем и присутствует на его уроке с сыном.

Вот отрывок из этого рассказа: "…репетитор берет задачник и диктует: «купец купил 138 аршин черного и синего сукна за 540 рублей. Спрашивается — сколько аршин купил он того и другого, если синее стоило 5 рублей за аршин, а черное — 3 рубля?»

Петя повторяет задачу и тотчас же, ни слова не говоря, начинает делить 540 на 138.

— Для чего же это вы делите? — говорит репетитор. — Постойте! Впрочем, так… продолжайте. Остаток получается? Здесь не может быть остатка. Дайте-ка я разделю!

Зиберов делит, получает три с остатком и быстро стирает.

«Странно — думает он, ероша волосы и краснея — как же она решается? Гм!.. Это задача на неопределенные уравнения, а вовсе не арифметическая».

Репетитор глядит на ответ и видит — 75 и 63.

«Гм!.. Странно… Сложить 5 и 3, а потом делить 540 на 8? Так, что ли? Нет, не то».

— Решайте же! — говорит он Пете.

— Ну, чего думаешь? Задача-то ведь пустяковая! — говорит Удодов Пете. — Экий ты дурак, братец! Решите уж вы ему, Егор Алексеевич.

Егор Алексеевич берет в руки грифель и начинает решать. Он заикается, краснеет, бледнеет.

— Эта задача, собственно говоря, алгебраическая, — говорит он. — Ее с иксом и игреком решить можно. Впрочем, можно и так решить. Я, вот, разделил … понимаете? Или, вот что. Решите мне эту задачу сами к завтрему… Подумайте…

Петя ехидно улыбается. Удодов тоже улыбается. Оба они понимают замешательство учителя. Ученик седьмого класса еще пуще конфузится, встает и начинает ходить из угла в угол.

— И без алгебры решить можно, — говорит Удодов, протягивая руку к счетам и вздыхая. — Вот, извольте видеть.

Он щелкает на счетах, и у него получается 75 и 63, что и нужно было.

— Вот-с … по-нашему, по неученому…

Учителю становится нестерпимо жутко".

Мы привели отрывок из рассказа А. Чехова. Нетрудно восстановить — что считал на счетах купец Удодов, и почему он так быстро получил ответ.

Удодов считал так: если бы купец купил все 138 аршин только синего сукна, то он истратил бы 138 : 5 = 590 рублей — это на 690 – 540 = 150 рублей больше, чем он заплатил на деле. Умножить 138 на 5 и вычислить разность (690 – 540) на счетах — это секундное дело. Разность в 150 рублей образовалась от того, что каждый аршин синего сукна стоит на два рубля дороже, чем аршин черного. Следовательно, достаточно поделить 150 на два — что на счетах занимает 4—5 секунд — и сразу получается, что синего сукна куплено 75 аршин, а значит, черного куплено: 138 – 75 = 63 аршина. Все вычисления на счетах займут меньше половины минуты. Можете проверить. Можете также сравнить с временем решения той же задачи на карманном калькуляторе.

Этот пример показывает, что скромная вычислительная техника XIX века в умелых руках работала хорошо и успешно удовлетворяла потребностям людей того времени.

9.3. Таблицы квадратов и извлечение корней

Еще одним средством, помогающим в вычислениях, стали таблицы. Многочисленные таблицы были составлены еще в Древнем Вавилоне. Составлялись и использовались таблицы, помогающие умножению, таблицы обратных величин, помогающие делению, таблицы квадратов. Многие таблицы были найдены при раскопках Вавилона. Не имея возможности рассмотреть все таблицы, остановимся на таблицах квадратов и на их применении для вычисления квадратных корней.

Таблицы квадратов имели вид, представленный на рис. 9.4.

2	4
3	9
4	16
…….	……..
27	729
28	784
……..	……..
n	n^2

Рис. 9.4. Таблица квадратов

Вавилоняне составляли подобные таблицы для довольно больших значений n и пользовались ими как для возведения в квадрат, так и для извлечения корней. Если число, из которого нужно было извлечь корень, являлось полным квадратом и входило в правый столбец таблицы (рис. 9.4), то левый столбец таблицы позволял сразу найти величину корня. Однако ряд полных квадратов достаточно редок, большинство чисел, с которыми имели дело вавилоняне, не являлись полными квадратами. В этом случае вавилонские писцы по такой таблице находили сначала квадрат a^2, наиболее близкий к заданному числу A, и рассматривали число a как первое приближение к искомому корню, а второе приближение a вычисляли по формуле

$a_1 = \frac{1}{2}(a + \frac{A}{a})$, которая эквивалентна более привычной нам приближенной формуле $\sqrt{a^2 \pm b} \approx a \pm \frac{b}{2a}$. Впрочем, все это просто только в сегодняшних алгебраических обозначениях. В Древнем Вавилоне и в Древней Греции вычислительные алгоритмы пояснялись только на числовых примерах и особой ясностью пояснения не отличались. Вот отрывок из перевода подлинного текста Герона, греческого математика I века н. э., поясняющего вавилонский способ вычисления квадратного корня из числа 720 (цитирую по книге: Выгодский М. Я. Арифметика и алгебра в Древнем мире. — М.; Л.: ОГИЗ, 1941, с. 252): "Так как 720 не имеет рационального корня, то мы возьмем корень с очень малой погрешностью следующим образом. Так как ближайший к 720 квадрат есть 729, и он имеет корнем 27, то разделим 720 на 27. Получается $26 + {}^2/_3$. Приложи 27. Получается $53 + {}^2/_3$. Половину этого (очевидно, это сокращение слов "возьми половину этого". — *Ю. П.*). Получается $26 + {}^1/_2 + {}^1/_3$. Если помножить на самое себя, получается $720 + {}^1/_{36}$, так что погрешность есть тридцать шестая часть единицы". Таков текст Герона. Причем Герон, живший в первом веке уже нашей эры, писал гораздо подробнее, чем древние вавилоняне. Подлинные математические тексты Древнего Вавилона (их переводы можно найти в уже упоминавшейся книге М. Я. Выготского) еще лаконичнее и еще трудней для понимания. Однако в Вавилоне их понимали и ими успешно пользовались. Это говорит о том, что древние вавилоняне были отнюдь не менее умны и сообразительны, чем мы и наши сегодняшние современники. Мы знаем и умеем больше древних вавилонян, египтян и греков только потому, что мы стоим на могучих плечах наших великих предшественников — математиков предыдущих веков. Поэтому мы должны с огромным уважением относиться к своим предшественникам и находить время для знакомства с их трудами и, всем тем, что они сделали для Истории.

9.4. Таблицы логарифмов и логарифмическая линейка

Отметим, что математики Древней Греции, сделавшие замечательные открытия в области геометрии и теории чисел, не уделяли большого внимания вычислительной технике. Они, в основном, пользовались абаком и алгоритмами, известными еще в Древнем Вавилоне. Решающий шаг в облегчении вычислений был сделан много позже — уже в XVII веке, после изобретения логарифмов Непером и Бюрги и издания в 1614 году книги Непера "Описание удивительной таблицы логарифмов", содержащей логарифмы синусов и косинусов с семью десятичными знаками и с интервалом в одну минуту дуги.

В последующие годы большие и многозначные таблицы логарифмов неоднократно издавались и переиздавались. Постепенно в них исправлялись ошибки и опечатки, неизбежные при первоначальном вычислении.

Вслед за изобретением логарифмов, позволивших свести умножение чисел к сложению их логарифмов, а деление — к вычитанию, была изобретена и логарифмическая линейка. Точная дата ее изобретения не известна. С уверенностью можно лишь сказать, что это произошло между 1620 и 1630 годами. Авторство логарифмической линейки оспаривали между собой Уильям Отред и Ричард Деламейн. Они оба были преподавателями математики в учебных заведениях Англии. Логарифмическая линейна, по-видимому, была изобретена ими независимо друг от друга и практически одновременно. Впоследствии ученики Отреда и Деламейна разожгли между ними споры о приоритете, напрасно отравившие жизнь обоих изобретателей.

В последующие годы были предложены и использовались самые различные конструкции логарифмических линеек — в виде концентрических окружностей со шкалами, вращающимися друг относительно друга, в виде цилиндра, даже в виде спиральной линейки, что позволяло увеличить длину шкалы и увеличить точность. Наиболее близкая к современной прямоугольной линейке конструкция была предложена, как уже отмечалось в *главе 2*, Робертом Биссакером в 1654 г. Его линейка состояла из трех самшитовых планок длиной около 60 см. Две внешние удерживались вместе медной оправой, а третья (движок) свободно скользила между ними. Каждой логарифмической шкале на неподвижных планках соответствовала такая же на движке. Шкалы имелись на обоих сторонах линейки.

На этом совершенствование логарифмических линеек не закончилось. В 1683 г. Томас Эверард, механик и налоговый чиновник, поместил на линейке шкалы для возведения в квадрат и куб и извлечения квадратного и кубического корней. Он же впервые нанес на шкалы "особые точки", отметив ими числа, часто встречающиеся в вычислениях: 3,14 (число π); 0,886 (сторона квадрата, равновеликого кругу единичного радиуса) и ряд других. Любопытно отметить, что такой неотъемлемый элемент современной линейки, как "бегунок", появился лишь 100 лет спустя, уже в XVIII веке.

Логарифмическая линейка не может обеспечить вычислений с очень большой точностью, но на хорошо изготовленной линейке вполне можно получить точность до третьей значащей цифры (три верных десятичных знака), а это обычно вполне достаточно для технических расчетов, поскольку все исходные данные получаются в технике на основе опыта и измерения и имеют ограниченную точность. Измерительные приборы, используемые в технике, не дают обычно больше двух-трех верных значащих цифр, поэтому и в конечном результате четвертый, пятый и последующие десятичные знаки ненадежны, выписывать их не следует, и точности, даваемой логарифмической линейкой, как правило, вполне достаточно.

Иногда против этого тезиса возражают, напоминая, что современные вычислительные машины производят вычисления со значительно бóльшим числом десятичных знаков, но здесь дело в другом: быстродействующие вычислительные машины реализуют вычисления с огромным числом промежуточных операций, в том числе умножений, при каждом умножении многозначных чисел возникает малая погрешность округления, близкая к половине единицы последнего разряда; при огромном числе вычислительных операций ошибка от округлений быстро возрастает, поэтому для обеспечения достоверности всего трех значащих цифр в окончательном результате используют 7—9 десятичных цифр в промежуточных вычислениях. Необходимо твердо помнить, что если машина напечатала окончательный результат с девятью десятичными цифрами, то это совсем не означает, что все напечатанные машиной цифры верны и надежны.

На важность логарифмической линейки для инженерных расчетов обращал особое внимание великий изобретатель и конструктор паровых машин Джемс Уатт (Watt, 1736—1819). В вышедшей в 1827 г. книге Дж. Фарадея "Трактат о паровой машине" указывалось: "Мистер Уатт использовал логарифмические шкалы, нанесенные на линейку для вычислений, относящихся к паровым машинам. Подобные инструменты давно использовались сборщиками налогов, плотниками, но они были весьма грубо и неточно выполнены и требовали улучшений для того, чтобы их могли использовать инженеры. М-р Уатт и м-р Соутерн (математик, работавший с Уаттом) расположили ряд шкал по линейке весьма разумным образом и пригласили опытнейших специалистов для градуировки опытного образца, с которого затем были сняты копии. Впоследствии эти линейки были переданы мастерам и старшим рабочим, благодаря которым преимущества вычислений с помощью логарифмических линеек стали известны инженерам других фабрик".

Логарифмические линейки широко использовались для инженерных расчетов и в XIX, и в XX веке; они очень хорошо помогали инженерам и только появившиеся много позже карманные калькуляторы составили им конкуренцию.

Если логарифмическая линейка помогала в инженерных расчетах, то многозначные таблицы логарифмов помогали в точных расчетах, используемых, например, в астрономии. Триумфом астрономических расчетов стало предсказание положения и последующее обнаружение на основе расчета, "на кончике пера", новой планеты Нептун — восьмой планеты Солнечной системы. Седьмую планету — Уран — открыл Гершель в 1781 году. Открыть Нептун было гораздо трудней. Нептун дальше от Солнца, чем Уран, светит много слабее. Увидеть его можно только в сильный телескоп, но сильные телескопы имеют очень малое поле зрения, и реально увидеть Нептун можно лишь в том случае, если с достаточной точностью (порядка 1°) заранее вычислено его положение на небе, а для этого орбиту Нептуна требовалось рассчитать. При сравнении заранее вычисленного положения на небе планеты Уран с данными наблюдений обнаружились небольшие расхождения, и это позволило высказать предположение, что такие расхождения объясняются притяжением восьмой планеты, находящейся от Солнца дальше, чем Уран. Анализируя расхождения между вычисленным и реальным движением Урана, можно, в принципе, вычислить орбиту восьмой планеты, но это была труднейшая задача, требующая огромного объема вычислений, тем более, что масса восьмой планеты, от которой зависит ее влияние на движение Урана, также являлась величиной, совершенно неизвестной.

Первым с этой гигантской работой (причем выполненной вручную, с помощью только таблиц логарифмов) справился английский математик и астроном Джон Адамс (Adams, 1819—1892). 21 октября 1845 года он пришел к Эри — директору Королевской обсерватории Англии, в распоряжении которого находились телескопы. Не застав Эри, он оставил записку, в которой сообщал о своих вычислениях и указал небесные координаты восьмой планеты. Оставалось простое — навести телескоп на предсказанное Адамсом место и увидеть планету. Вместо этого Эри 5 ноября 1945 г. ответил Адамсу запиской с дополнительными вопросами, на которые, по его мнению, Адамс должен был ответить. Время шло, наблюдения в Королевской обсерватории Англии откладывались, а за это время французский астроном и математик Урбен Леверье (1811—1877) также вычислил орбиту и небесные координаты восьмой планеты и благоразумно послал свое предсказание не в родную Парижскую обсерваторию, а в Берлинскую. Он, возможно, чувствовал, что "нет пророка в своем отечестве" и лучше обратиться к чужим. В Берлинской обсерватории получили письмо У. Леверье 23 сентября 1846 г., в тот же день (точнее, в тот же вечер, как только стемнело), навели телескоп в предсказанное место — и открыли восьмую планету, которую назвали Нептуном.

Вся слава и почет от этого действительно замечательного открытия достались Франции и, разумеется, лично Леверье. Англия и английская наука — по вине Эри — лишились заслуженной ими славы. Вообще-то такие случаи не редкость, и в России они происходили не раз, да и сейчас происходят, а виновные до последнего времени остаются безнаказанными. Но в Англии Эри, все же, крепко досталось — ему пришлось предстать 13 ноября 1846 года перед общим собранием Королевского общества, которое в Англии играет роль академии наук. Королевское общество осудило бездействие Эри и его пренебрежение к предсказанию Адамса.

Но "дело Эри", которому все же пришлось давать ответ за свое бездействие, хотя и только перед "своим" Королевским обществом, отношения к предсказанию наук в Англии, по-видимому, коренным образом не изменило. В 1870 году из-за пренебрежения "лордов Адмиралтейства" к предсказаниям науки произошло большое кораблекрушение, погибли сотни людей. Мы подробно расскажем об этом в *главе 13*, а пока лишь упомянем, что на этот раз был суд, в приговоре суда выражалось осуждение "невежественному упрямству" тогдашних "лордов Адмиралтейства". Выдержки из приговора суда решено было выгравировать большими буквами на бронзовой доске и поместить доску на стену главного и самого большого храма Лондона (собора святого Павла), поместить "в назидание потомкам" — т. е. мне и Вам, уважаемые читатели. После этого приговора отношение к науке и ее предсказаниям стало в Англии более уважительным. В России подобных приговоров — донесенных до всех — не было, хотя оснований для них было более, чем достаточно. Поэтому пренебрежительное отношение к науке, к ее предостережениям продолжается в России до сих пор.

После вычисления орбиты Нептуна Адамс много и плодотворно работал в математике. В 1855 году он разработал многошаговый алгоритм (или, как чаще называют, метод) численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений — "метод Адамса", дающий лучшую точность, чем ранее применяемые методы Эйлера и Рунге—Кутты. Вообще, алгоритмам и методам повезло — в курсах математики они часто называются по именам авторов, которые их разработали.

Поэтому учащийся, знакомящийся, например, с методом Ньютона (называемым еще "методом касательных") численного решения уравнения $k(z)=0$, методом Лобачевского вычисления корней полинома $z^n + a_1 z^{n-1} + ...a_n$, методом А. Н. Крылова (1863—1945) для вычисления собственных значений матриц и другими методами, носящими имена их авторов, может сразу представить — в какое примерно время был разработан тот или иной метод или алгоритм и кого надо вспомнить и поблагодарить при использовании метода.

Точно так же и различные бесконечные ряды, используемые при вычислениях, сохранили имена своих первооткрывателей, например, хорошо известный ряд Тейлора (Taylor, 1685—1731), ряд Лейбница:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - ... + (-1)^{k-1}\frac{1}{2k-1}, \qquad (1)$$

ряд Ламберта (Lambert, 1728—1777): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$, ряды Дирихле (Dirichlet, 1805—1859): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ и многие другие.

Использование разложений в ряды с последующим суммированием конечного числа членов ряда и оценкой погрешности, возникающей от замены бесконечного ряда суммой конечного числа членов, было излюбленным методом работы математиков и вычислителей XVIII и XIX веков.

Для сокращения объема вычислений старались выбрать наиболее быстро сходящийся ряд. Вот характерный пример — для вычисления числа π с помощью ряда Лейбница (1) с точностью до пятого знака нужно просуммировать пятьдесят тысяч членов ряда (1), что, разумеется, очень громоздко. Однако можно воспользоваться более быстро сходящимся рядом, который выводится из следующих соображений: берется формула сложения для арктангенса:

$$\mathrm{arctg}x + \mathrm{arctg}y = \mathrm{arctg}\frac{x+y}{1-xy} \tag{2}$$

и в качестве x и y выбираются правильные дроби, удовлетворяющие соотношению

$$\frac{x+y}{1-xy} = 1.$$

Используя известный степенной ряд для арктангенса, получим:

$$\mathrm{arctg}x + \mathrm{arctg}y = \mathrm{arctg}1 = \frac{\pi}{4} = (x - \frac{x^3}{3} + \ldots) + (y - \frac{y^3}{3} + \ldots). \tag{3}$$

Теперь, положив $x = 1/2$, $y = 1/3$, придем для вычисления $\frac{\pi}{4}$ к быстро сходящемуся ряду:

$$\frac{\pi}{4} = (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\frac{1}{2^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{2^5} - \ldots) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{3^5} - \ldots) \tag{4}$$

и для вычисления $\frac{\pi}{4}$ с хорошей точностью достаточно суммировать вполне умеренное число членов ряда (4).

9.5. Проблема надежности вычислений

Помимо обеспечения хорошей точности и малой погрешности вычислений при точно заданных исходных данных всегда существовала важная проблема надежности результата вычислений при ограниченной точности коэффициентов математической модели. Мы уже упоминали, что в инженерных расчетах исходные данные известны чаще всего с точностью "до третьего знака", до третьей значащей цифры. Означает ли это, что после вычисления мы можем быть уверены в достоверности хотя бы второй или даже первой значащей цифры? Простой пример показывает, что в общем случае никакой гарантии дать нельзя.

Предположим, что мы решаем задачу, в которой физический смысл имеет только решение в виде действительного (а не комплексного) числа, и мы пришли к простому квадратному уравнению:

$$x^2 - 2x + a = 0. \tag{5}$$

Пусть $a = 1$, но значение a известно лишь с точностью до n-ой значащей цифры — т. е., на самом деле, $a = 1 + \varepsilon$, где $|\varepsilon| < 10^{-(n+1)}$, но точное значение ε и даже его знак — не известны. В этом случае, используя известную формулу решения квадратного уравнения (5)

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - a}, \tag{6}$$

получим, что при $a = 1$ будет $x_1 = x_2 = 1$, но уже при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ действительные решения исчезают, появляются комплексные корни, имеющие совсем другой физический смысл.

Если в реальной задаче, математической моделью которой служит уравнение (5), номинальное значение параметра a равно единице, то при любой сколь угодно малой погрешности в задании a не надежен даже первый знак в решении. Будет иметь уравнение (5) вещественные корни или нет, будет иметь решение рассматриваемая задача или нет — целиком зависит от неизвестной нам погрешности измерения величины a.

Легко видеть, что результат вычисления решения в математической модели реального объекта или процесса будет надежен только тогда, когда решение зависит от коэффициентов и параметров математической модели непрерывно. Если непрерывной зависимости нет, то сколь угодно малые, неизбежные на практике, погрешности в знании коэффициентов модели могут привести к существенным отличиям расчетного поведения объекта от реального. В этих случаях результаты расчета не надежны.

Поскольку проверить непрерывность зависимости решения от многочисленных коэффициентов и параметров в каждой конкретной математической модели часто затруднительно, то математики давно стали исследовать целые классы математических моделей.

Так, было установлено, что для полинома любой степени положение его корней на комплексной плоскости зависит от его коэффициентов непрерывно. Это означает, что если решениями рассматриваемой нами физической или технической задачи могут быть как вещественные, так и комплексные числа, то с неприятностями, подобными тем, что встретились при решении уравнения (5), встретиться не придется. Комплексные корни полиномов можно вычислять спокойно. Если же решениями могут быть только действительные числа, то возможны неприятности и ошибки, сущность которых мы пояснили на примере уравнения (5).

Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме (т. е. систем, состоящих из n уравнений первого порядка) была доказана важная теорема о непрерывной зависимости решений от параметров. Фактически именно на этой теореме основывались все практические приложения теории дифференциальных уравнений, поскольку эта теорема, казалось бы, гарантировала, что для многочисленных объектов, описываемых системами дифференциальных уравнений при достаточно малых погрешностях в знании точных величин коэффициентов и параметров, погрешности решений будут малыми и приемлемыми для практики.

Хотя эта теорема была доказана лишь для систем в нормальной форме (и еще для одного дифференциального уравнения n-го порядка), ее (теорему) считали справедливой для всех систем, поскольку почти любую систему простыми эквивалентными (их называют еще равносильными) преобразованиями можно привести к нормальной форме. Эквивалентные (равносильные) преобразования — это те, которые не изменяют решений преобразуемой системы (например, умножение всех членов уравнения на число, не равное нулю, перенос члена из левой части уравнения в правую с изменением знака и т. п.).

Молчаливо допускалось, что если преобразования, приведшие исходную систему к нормальной форме, были эквивалентными и не изменили решений системы, то они не могли изменить и такое свойство решений, как их непрерывная зависимость от параметров. На всеобщей уверенности в справедливости теоремы о непрерывной зависимости для всех систем дифференциальных уравнений основывалась вся практика вычислений и инженерных расчетов с использованием дифференциальных уравнений — а дифференциальные уравнения используются, как известно, очень широко, повсеместно.

Тем большее удивление вызвала обнаружившаяся в самом конце XX века ошибочность теоремы. Были продемонстрированы примеры систем дифференциальных уравнений, не имеющих непрерывной зависимости своих решений от коэффициентов и параметров. А связано все это с еще одним неожиданным и важным результатом — в Санкт-Петербургском государственном университете было обнаружено, что эквивалентные (равносильные) преобразования, которыми спокойно пользовались все математики и вычислители, начиная с XVII века, могут, не изменяя самих решений как таковых, изменять (хотя и не всегда) многие важные свойства решений — в том числе и их непрерывную зависимость от параметров.

Оказалось, что всеобщая уверенность в том, что "эквивалентные преобразования ничего не меняют", была основана только на том, что эквивалентные преобразования, изменяющие некоторые свойства решений, встречаются редко. Точно так же довольно редко встречаются и "особые" системы дифференциальных уравнений, не обладающие свойством непрерывной зависимости решений от параметров. Однако каждая неожиданная встреча с подобной "особой" системой приводит к ошибкам в вычислениях, а эти ошибки могут стать (и не раз становились) причиной аварий и даже катастроф, долгое время не получавших объяснения.

Весь круг связанных с этими явлениями вопросов будет более подробно рассмотрен в *главе 14*, а пока еще раз отметим, что столь привычные эквивалентные преобразования, которыми все вычислители, начиная с XVII века, так беззаботно и широко пользовались, на самом деле далеко не всегда безобидны. Надо относиться к ним внимательнее, надо уметь выделять "особые" эквивалентные преобразования, которые самих решений не изменяют, но важные свойства решений могут изменить.

Возвращаясь к вычислительным приборам и устройствам, отметим, что до эпохи повсеместного распространения быстродействующих вычислительных машин для численного интегрирования функций, заданных своими графиками, широко использовались приборы, называемые планиметрами (в переводе с латыни — измерителями площадей). Для вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ достаточно было обвести штифтом планиметра фигуру, состоящую из графика функции $f(x)$ от $x=a$ до $x=b$, вертикальных ординат при $x=a$ и $x=b$ и отрезка оси абсцисс от $x=a$ до $x=b$. Первый планиметр был предложен и изготовлен Лейбницем. Хорошо работающий планиметр построил в 1814 г. инженер Герман, в дальнейшем его конструкция неоднократно совершенствовалась. В XX веке планиметры различных конструкций выпускались серийно и обеспечивали вычисление определенных интегралов с точностью до одной тысячной.

В конце XX века широчайшее распространение быстродействующих вычислительных машин и, в особенности, электронных калькуляторов и персональных компьютеров, сильно сократило область применения всех других вычислительных приборов и устройств. Ранее они применялись повсеместно, а сейчас стали, в основном, объектами истории науки и техники.

Глава 10

Вычислительная техника. Вычислительные машины

10.1. Механические вычислительные машины

Первую вычислительную машину в 1642 г. изобрел и изготовил выдающийся французский математик, физик и философ Блез Паскаль (1623—1662). Паскалю было тогда 19 лет и он очень хотел помочь своему отцу, интенданту Руана, которому приходилось просиживать ночи напролет над подсчетами налоговых сборов.

Машина Паскаля, над которой он работал, не жалея ни времени, ни сил, представляла собой легкий латунный ящичек размером 350×125×75 мм и являлась машиной суммирующей, предназначенной для автоматического выполнения операций сложения и вычитания (умножение и деление не предусматривались). На верхней крышке машины помещалось восемь круглых отверстий с зубчатыми колесами и круговыми шкалами. Шкала крайнего правого отверстия была разделена на 12 равных частей, шкала соседнего — на 20 частей, остальные шесть шкал имели десятичное деление. Такая градуировка была связана с назначением машины (помощь в расчете налогов) и соответствовала делению ливра — основной денежной единицы того времени — на более мелкие: 1 су = $^1/_{20}$ ливра и 1 денье = $^1/_{12}$ су.

Для ввода чисел и денежных сумм, которые предстояло суммировать, нужно было вставить ведущий штифт в отверстие той или иной шкалы против соответствующей цифры и повернуть зубчатое колесо по часовой стрелке до упора. Вращение каждого колеса передавалось цифровому барабану, на котором и читались цифры. Далее вводилось следующее число (или денежная сумма), и суммирование шло автоматически. Самым важным изобретением Паскаля было устройство автоматического переноса десятков, что позволяло вычислителю не тратить внимания на запоминание переноса из младшего разряда в старший — в этом состояло самое существенное отличие машины Паскаля от всех предшествующих счетных инструментов (не говоря уже о том, что вместо предметного представления чисел как в абаке или на счетах — числом камушков или косточек — в машине Паскаля числа впервые представлялись углами поворота колеса).

Паскаль уделял своей машине большое внимание. Он получил в 1649 году королевскую привилегию, которая подтверждала его приоритет в изобретении и закрепляла за ним право производить и продавать машины. Точное число изготовленных машин не установлено. До наших дней дошло 8 машин Паскаля, поэтому устройство ее хорошо известно. Современники Паскаля восхищались его машиной, но широкого, массового распространения она не получила, поскольку была слишком сложной в изготовлении для мастеров-механиков XVII века. Однако она оказала большое влияние на последующих изобретателей.

Следующий огромный шаг вперед был сделан великим Лейбницем, который начал с усовершенствования машины Паскаля, но затем сумел создать устройство, которое выполняло не только сложение и вычитание, но все четыре действия арифметики. Как писал Лейбниц Т. Бернету: "Мне посчастливилось построить такую арифметическую машину, которая совершенно отлична от машины Паскаля, поскольку дает возможность мгновенно выполнять умножение и деление над огромными числами…".

В основе машины Лейбница лежал изобретенный им особый ступенчатый валик (знаменитый "валик Лейбница") — т. е. цилиндр, на боковой поверхности которого расположено 9 ступенек разной длины. Валик Лейбница позволял ввести множимое одной установкой и широко применялся в конструкциях счетных машин вплоть до XX века.

Любопытно отметить, что дотошные историки вычислительной техники обнаружили, что еще раньше Паскаля счетную машину изобрел и, по-видимому, даже изготовил в 1623 году профессор университета в городе Тюбингене (Германия) Вильгельм Шиккард (1592—1636). Шиккард начал работать в университете в Тюбингене в 1617 году в качестве профессора кафедры восточных языков, потом увлекся математикой и в 1631 году занял кафедру математики и астрономии. По сохранившимся материалам и эскизам в XX веке построили действующую модель машины Шиккарда, и она оказалась вполне работоспособной и не уступающей машине Паскаля. Однако подлинная машина Шиккарда сгорела во время пожара, затем умер от холеры и сам изобретатель. Машина Шиккарда осталась неизвестной последующим изобретателям и — в отличие от машины Паскаля — не оказала влияния на последующее развитие вычислительной техники.

Причина, конечно, заключалась в том, что Шиккард был рядовым и мало кому известным профессором провинциального университета Германии, которая как раз тогда была жестоко разорена и отброшена назад Тридцатилетней войной 1618—1648 годов. А Паскаль еще в юном возрасте, в 16 лет, получил известность как математик, написавший "Опыт о конических сечениях", затем стал известен и как физик, исследовавший, в частности, законы передачи давления в жидкости. На основе этих исследований были построены потом гидравлические прессы. В честь Паскаля единица давления носит сейчас его имя. Позже Паскаль стал известен и как философ. Понятно, что машина, изобретенная таким человеком, и, тем более, во Франции, которая тогда была наиболее передовой страной Европы, быстро стала известна всем и определила все дальнейшее развитие вычислительных машин.

В дальнейшем очень многие ученые и изобретатели продолжали совершенствовать вычислительные машины Паскаля и Лейбница, предлагали новые конструкции и технические решения (оригинальная машина была предложена, например, Пафнутием Львовичем Чебышёвым), но вплоть до второй половины XIX века широкого, массового применения они не получили. Главная причина заключалась в отсутствии и в XVII, и в XVIII веках технологической базы, которая позволяла бы изготовлять точные и взаимозаменяемые зубчатые колеса, способные быстро передавать вращение одних осей на другие оси. Для очень медленного вращения осей, используемого в механических часах, достаточно надежно работали тогдашние примитивные шестерни с треугольными, прямоугольными и трапециевидными зубьями. Для вычислительных машин, где скорости вращения осей много больше, были необходимы зубья с непрерывным контактом, который можно обеспечить, если каждый зуб нарезан по кривой, называемой "эвольвентой", т. е. разверткой круга. При такой нарезке зубьев обеспечивается плавное эвольвентное зацепление, которое до настоящего времени используется в зубчатых передачах. Однако теория эвольвентного зацепления была разработана лишь в 1754 г. Леонардом Эйлером, а первые зубонарезные станки, которые нарезали шестерни с эвольвентным зацеплением, появились лишь в начале XIX века. Только тогда пришло время для массового выпуска механических вычислительных машин (арифмометров).

Все это важно подчеркнуть потому, что, рассказывая об истории науки и техники, автор, ввиду ограниченности объема книги, волей неволей в состоянии упомянуть лишь очень ограниченный круг лиц, и у читателя может создаться впечатление, что вычислительную технику создали только лишь упомянутые в книге великие ученые — Паскаль, Лейбниц, Эйлер и Чебышёв. На самом деле это совсем не так. Техника еще в большей степени, чем наука, является делом коллективным. Работы великих ученых и изобретателей размечают, как правило, "узловые точки" в эволюции науки и техники, намечают пути ее дальнейшего развития. Но это развитие неизбежно заглохнет, если дело "великих" не будет подхвачено сотнями и тысячами исследователей, инженеров, технологов, квалифицированных рабочих. Их имена не всегда остаются на страницах самых подробных работ по истории науки и техники, но без их труда развитие вычислительной техники не было бы столь победоносным и она не развивалась бы столь стремительно — особенно в последние десятилетия.

Для вычислительной техники особую роль играли успехи технологии в смежных с нею областях. Мы еще не раз будем говорить об этом в последующих разделах, а пока отметим, что именно успехи в технологии точного машиностроения, в изготовлении точно обработанных и взаимозаменяемых деталей стали основой массового производства арифмометров во второй половине XIX века.

10.2. Арифмометры и вычислительные машины с электроприводом

Из многочисленных конструкций арифмометров, предложенных изобретателями разных стран, наиболее простым и удачным оказался арифмометр, разработанный механиком из Санкт-Петербурга Вильгодтом Теофилом Однером (1845—1905), мастером Экспедиции заготовления государственных бумаг, производственные корпуса которой и сегодня стоят в Санкт-Петербурге на набережной Фонтанки. Основным элементом его арифмометра было своеобразное зубчатое колесо с переменным числом зубьев, получившее впоследствии название "колесо Однера". Оно позволяло легко производить ввод исходных чисел в арифмометр простым поворотом рычагов на его лицевой стороне, поскольку эти рычаги изменяли число зубьев "колес Однера".

Начав работать над своим изобретением в 1874 году, Однер через четыре года получил патент, а в 1890 году основал "Механический и медно-литейный завод для производства арифмометров". Уже в первый год своего существования завод выпустил 500 арифмометров новой конструкции, продолжая наращивать их выпуск. В 1913 году в России работало уже 22 тысячи арифмометров Однера. В Советском Союзе модификация арифмометра под названием "Феликс" выпускалась сотнями тысяч вплоть до второй половины XX века и имела широчайшее распространение.

Общий вид арифмометра "Феликс" показан на рис. 10.1. Арифмометр имеет девятиразрядный механизм ввода чисел, один тринадцатиразрядный счетчик результатов 1, один восьмиразрядный счетчик оборотов 4. Счетчики смонтированы на одной общей каретке 6, которая может перемещаться по отношению к механизму ввода в пределах восьми разрядов. Перемещение производится ручкой 3, установка указывается стрелкой 7. Числа на арифмометре устанавливаются смещением рычагов 10 до соответствующих цифр на переднем полукруглом щитке арифмометра 9. Установленное число переносится в счетчик результатов 1 поворотом ручки привода 12. Направление вращения указано стрелкой 11 и соответствует суммированию. Если же ручку вращать в обратном направлении, то происходит вычитание. Количество поворотов ручки подсчитывается и указывается на счетчике оборотов 4. Ручку при повороте оттягивают вправо, чтобы ее вращению не мешал установочный стержень 13. Установленные рычагами числа гасятся все сразу (если это нужно) с помощью гасительного рычага 8. Гашение счетчика результатов осуществляется поворотом барашка 14, а счетчика оборотов — барашком 5. Десятичные знаки числа, установленного на рычагах или получившегося на счетчиках, отделяются от целой части подвижными запятыми 2.

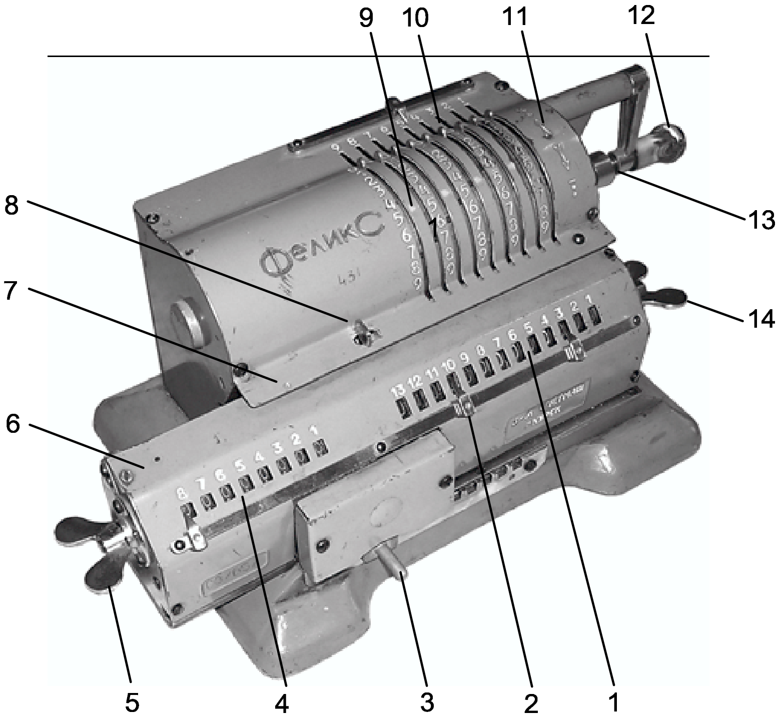


Рис. 10.1. Арифмометр "Феликс"

При умножении на однозначное число (множитель) набирают множимое поворотом рычагов каждого разряда и затем вращают ручку — число поворотов равно множителю. Произведение читается в счетчике результатов. При умножении на многозначный множитель множимое умножают последовательно на каждый разряд множителя, каждый раз передвигая на один разряд каретку со счетчиками. Передвижение каретки используется и при делении (ручка при делении вращается в обратную сторону). Как только остаток оказывается меньше делителя, каретку переводят в следующий разряд, чем и увеличивают остаток в 10 раз.

Арифмометр "Феликс" надежно работает при чистоте вращения ручки до 250 оборотов в минуту, что позволяет достаточно быстро производить умножение и деление многозначных чисел.

Начиная с XX века получили распространение вычислительные машины, приводимые во вращение не рукой, а электродвигателем, причем электродвигатель обеспечивает и автоматическое передвижение каретки при выполнении умножения и деления. Набор чисел в таких машинах выполняется нажатием клавиш. Число оборотов вала в машинах с электроприводом достигает 1300 оборотов в минуту, что позволяет существенно увеличить скорость выполнения вычислений по сравнению с арифмометрами с ручным приводом. В качестве электропривода подобных машин используются небольшие встроенные в машину электродвигатели переменного тока на напряжение сети 220 вольт, мощностью 25—65 ватт.

Общий вид одной из лучших вычислительных машин с электроприводом (машина "Мерседес", модель М-38) показан на рис. 10.2. На рисунке видна шестнадцатиразрядная клавиатура набора вводимых чисел, клавиша сложения (обозначена на рисунке знаком +), клавиша вычитания (знак –), клавишы умножения и деления (знаки × и :) и клавиша гашения результатов. Габариты машины: длина — 370 мм, ширина — 300 мм, высота 175 мм, вес машины — 21,5 кг.

Внутреннее устройство машины "Мерседес" весьма сложно. Она состоит из большого числа очень точно обработанных и хорошо подогнанных друг к другу деталей, изготовление ее требует весьма высокой культуры производства, и машина стоит дорого. В Советский Союз машина "Мерседес" импортировалась из Германии; немного более простые, но менее удобные машины производились и в СССР.

Помимо машин, выполняющих вычисления с фиксацией их результатов в виде цифр на барабанах, наличие электродвигателя позволяло изготовлять и счетно-записывающие машины, в которых результаты вычислений печатались на бумажной ленте. На рис. 10.3 показан общий вид простой счетно-записывающей машины СД-11ОМ. Машина выполняет только сложение и вычитание десятиразрядных чисел с печатанием по желанию промежуточных и окончательных итогов. Габариты машины: длина — 320 мм, ширина — 190 мм.

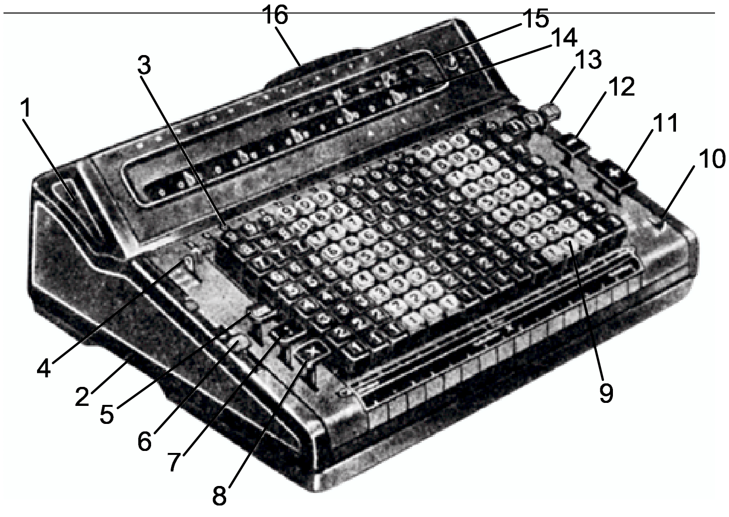


Рис. 10.2. Вычислительная машина с электроприводом "Мерседес", модель М-38: 1 — корпус машины; 2 — подвижная каретка; 3 — показатель набранного числа; 4 — переключающий рычаг для больших множителей; 5 — клавиша переключения счетчика оборотов; 6 — рычаг получения произведений и частных в виде дополнений; 7 — клавиша деления; 8 — клавиша умножения; 9 — цифровая клавиатура; 10 — рычаг многократного вычитания или сложения; 11 — клавиша сложения; 12 — клавиша вычитания; 13 — клавиша гашения счетчиков и клавиатуры; 14 — счетчик результатов; 15 — счетчик оборотов; 16 — электромотор

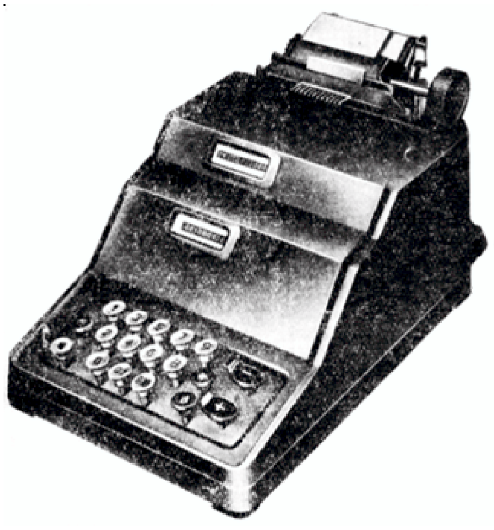


Рис. 10.3. Счетно-записывающая машина СД-11ОМ

10.3. Программируемые машины. Чарльз Бэббидж и дочь Байрона — леди Августа Ада Лавлейс

Первым, кто высказал идею об универсальной вычислительной машине, способной работать по различным заложенным в нее программам, и первым, кто попытался реально построить такую машину, был английский исследователь Чарльз Бэббидж (1791—1871). Он родился в состоятельной семье банкира, окончил знаменитый университет в Кембридже, где был "душой общества". В 1816 году его избрали в члены Королевского общества, которое для Англии является эквивалентом Академии наук.

В 1820 году Бэббидж начал работу над вычислительной машиной, которая автоматически вычисляла бы математические таблицы. Различные таблицы — логарифмов, сложных процентов, астрономические и навигационные — широчайшим образом использовались тогда в Англии. Вычислялись и переписывались эти таблицы вручную и поэтому содержали немало ошибок и описок.

Вычислительная машина Бэббиджа предназначалось для вычисления таблиц по известному методу разностей. Существо метода удобно пояснить на вычислении таблицы значений функции $N = n^4$, где $n = 1, 2\ldots$

Пусть вычислено семь значений функции $N = n^4$ и они помещены в таблицу (табл. 10.1).

Таблица 10.1. *Значения функции* $N = n^4$

n	***N***	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4
1	1	15	50	60	24
2	16	65	110	84	24
3	81	175	194	108	24
4	256	369	302	132	24
5	625	571	434	156	
6	1296	1105	590		
7	2401	1695			
8	4096				

В третьей колонке таблицы помещены первые разности Δ_1 — т. е. разности между последовательными числами второй колонки. В четвертой колонке помещены вторые разности Δ_2 — т. е. разности последовательных чисел третьей колонки, в пятой колонке помещены третьи разности Δ_3, в шестой — четвертые разности Δ_4. Мы видим, что четвертые разности для всей таблицы постоянны, равны числу 24. Так и должно быть, поскольку для любого многочлена четвертой степени четвертые разности постоянны (а для многочленов степени m постоянны разности порядка m). Но если так, то можно легко продолжить таблицу путем простых сложений. То есть, если мы хотим получить девятый член второй колонки табл. 10.1, то достаточно выполнить сложения, показанные в табл. 10.2.

Таблица 10.2. *Получение девятого члена второй колонки табл. 10.1*

Первое слагаемое	**Второе слагаемое**	**Сумма**
156	24	180
590	180	770
1695	770	2465
4096	2465	6561

Но $6561 = 9^4$, и мы получили правильный девятый член второй колонки таблицы.

Таким образом, для того, чтобы составить таблицу значений любого многочлена степени m, достаточно вычислить начало таблицы и начало колонок разностей. А дальше все вычисления можно вести по единой программе, подставляя в нее все новые и новые получающиеся в таблице числа. Для каждой степени многочлена нужна своя программа вычислений. Для многочленов четвертой степени программа вычислений делается ясной из рассмотрения табл. 10.1 и 10.2.

Строго постоянными разностями для всей области определения обладают только многочлены. При составлении таблиц других функций их приближенно заменяют многочленами, различными на различных участках. Переходя от одного участка к другому, необходимо изменить программу вычислений, или же иметь общую большую программу, которая распадалась бы на подпрограммы. В свою очередь, та или иная подпрограмма выбиралась бы в зависимости от степени многочлена, приближающего табулируемую функцию.

Все эти идеи постепенно созревали у Бэббиджа в ходе его работ над изготовлением реальной машины, которая автоматически вычисляла бы нужные таблицы.

Для изготовления машины Бэббидж использовал принцип Паскаля — т. е. зубчатые колеса на осях со сложным механизмом переноса десятков. Уже в 1822 году Бэббидж самостоятельно конструирует и изготавливает действующую модель своей машины, которая может составлять таблицы с точностью до восьмого знака для функций с постоянными вторыми разностями; машина содержала 96 зубчатых колес на 24 осях.

В 1823 году Бэббидж обращается в Министерство финансов Англии и получает 1500 фунтов стерлингов для постройки машины, которая будет составлять таблицы с точностью уже двадцатого знака для функций с постоянными шестыми разностями. 1500 фунтов — это очень большая сумма для того времени. Ее величина говорит о том, что Министерство финансов Англии хорошо понимало, какие преимущества принесет осуществление предложений Бэббиджа. Работа над машиной началась в 1823 году и продолжалась с перерывами до 1842 года. Перерывы происходили из-за того, что первоначально выделенной суммы не хватало, и Бэббиджу приходилось просить о выделении новых денег. Постройка вычислительной машины на механических элементах — сотнях и тысячах связанных между собой шестеренок и счетных колес — оказалась значительно более трудным и дорогим делом, чем это представлялось ранее. К 1842 году было израсходовано 17 000 фунтов правительственной субсидии и 6000 фунтов личных денег самого Бэббиджа. Машина в целом так и не заработала, хотя отдельные ее устройства и узлы работали и не раз демонстрировались на выставках.

В ходе создания машины для вычисления таблиц Бэббидж разработал и опубликовал проект универсальной вычислительной машины, способной вычислить решения любых математических задач, для которых известен алгоритм их решения.

Бэббидж указал, что универсальная машина должна состоять из:

1. Арифметического устройства, выполняющего арифметические действия над вводимыми в него числами.
2. Устройства "памяти" для хранения промежуточных результатов.
3. Устройства управления, в котором хранится программа управления действиями машины.
4. Устройства ввода исходных данных и вывода результатов расчета.

Мы убеждаемся, что современные вычислительные машины состоят из узлов, предсказанных впервые Бэббиджем. Так что предсказано все было правильно, направление работы было выбрано верно, но реализовать машину из не очень точных механических деталей в первой половине XIX века было слишком трудным делом.

Верной помощницей Бэббиджа во всех его делах стала дочь поэта Джорджа Гордона Байрона (1788—1824) Августа Ада. Байрон женился в 1815 году на Аннабелле Милбэнк и 10 декабря 1815 года у них родилась дочь, которую назвали Августой Адой. Родители ее матери настояли на разводе Аннабеллы и Джорджа. В январе 1816 года они разъехались навсегда, и Августа Ада так и не увидела никогда своего великого отца.

Математикой Августа Ада увлекалась с детских лет. В 1835 году она вышла замуж и стала графиней Лавлейс. Ее муж с одобрением относился к научным занятиям жены и помогал ей.

Научные занятия — главным из которых было сотрудничество с Бэббиджем — не мешали супругам Лавлейс вести светский образ жизни, регулярно устраивая вечера и приемы, на которых бывал "весь Лондон". Один из посетителей этих вечеров оставил такой портрет хозяйки дома: "Она была ни на кого не похожа и обладала талантом не поэтическим, но математическим и метафизическим... Наряду с совершенно мужской способностью к пониманию, проявлявшейся в умении решительно и быстро схватывать суть дела в целом, леди Лавлейс обладала всеми прелестями утонченного женского характера. Ее манеры, ее вкусы, ее образование — особенно музыкальное, в котором она достигла совершенства, — были женственными в наиболее прекрасном смысле этого слова, и поверхностный наблюдатель никогда не угадал бы, сколько внутренней силы и знания скрыто под ее женской грацией. В той же степени, в какой она не терпела легкомыслия и банальности, она получала удовольствие от истинно интеллектуального общества и поэтому энергично искала знакомства со всеми, кто был известен в науке, искусстве и литературе" (цитирую по книге: Гутер Р. С., Полунов Ю. Л. От абака до компьютера. — М.: Знание, 1981, 208 с. В этой книге читатель может найти много дополнительных подробностей. — *Ю. П.*).

В тесном сотрудничестве с Бэббиджем леди Лавлейс разрабатывала программы для решения различных математических задач на вычислительных машинах, и именно ею в 1843 году была составлена первая успешно работавшая программа для вычисления известных в математике "чисел Бернулли" (Бэббидж тоже составлял программу для вычисления этих чисел, но его программа "не пошла". У более аккуратной леди Лавлейс программа заработала). Таким образом, Аду Лавлейс можно считать "первой программисткой", а начальной датой "искусства программирования" — 1843 год. Некоторые из терминов, введенных леди Лавлейс, — такие как "рабочие ячейки", "цикл" — используются в программировании до сих пор.

Представляют интерес и ее теоретические работы, хотя опубликована была лишь одна ее большая статья, в которой леди Лавлейс хотела дать наиболее четкое и законченное изложение принципов действия и возможностей автоматических вычислительных машин, которые она называла (по терминологии того времени) "аналитическими машинами". Вот отрывок из ее статьи: "Аналитическая машина может дать материальное воплощение любой функции, имеющей любую степень общности или сложности".

В то же время в статье были трезво указаны и ограничения, налагаемые самим принципом действия программируемых вычислительных машин. "Необходимо предостеречь, — писала далее леди Лавлейс, — от вероятных преувеличений возможностей аналитической машины. При рассмотрении любого нового изобретения мы довольно часто сталкиваемся с попытками переоценить то, что мы считаем интересным и выдающимся… особенно, когда наши новые идеи вытесняют те, которые мы считаем незыблемыми. Аналитическая машина не претендует на то, чтобы создать что-либо. Она может делать все то, в отношении чего мы знаем — как приказать машине сделать, машина может только следовать анализу (или, в современной формулировке — следовать программе. — *Ю. П.*) и не в состоянии предугадать какие-либо аналитические соотношения или истины. Сфера ее деятельности — помочь нам сделать то, с чем мы уже знакомы".

Эти важные соображения, высказанные в ее статье 1843 года, не остались незамеченными. В знаменитой работе Алана Тьюринга "Может ли машина мыслить?", опубликованной в 1950 году, был специальный раздел, озаглавленный "Возражения леди Лавлейс", в котором подробно обсуждалось — справедливы ли эти возражения не только для жестко программируемых машин, но и для машин с более общими принципами своей работы.

Леди Лавлейс умерла молодой в 1852 году, не дожив — как и ее отец — до 37 лет. Согласно завещанию, ее похоронили в семейном склепе Байронов, в Ньюстеде, рядом с могилой отца.

Чарльз Бэббидж на много лет пережил свою помощницу. Он скончался в 1871 году, до самых последних лет занимаясь различными отраслями науки. Самое большое дело его жизни — создание универсальной вычислительной машины — не было завершено. Теперь мы понимаем, что она не была завершена потому, что на чисто механических элементах — шестеренках, осях и рычагах — построить универсальную вычислительную машину слишком трудно.

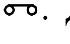
Дополнительные трудности приносила и известная "разбросанность" Бэббиджа, его неумение вовремя остановиться. Вот что писал младший современник Бэббиджа, посетивший его мастерскую: "В прихожей я узнал отдельные части его хорошо известной вычислительной машины, которую он много лет назад довел до уровня действующего устройства, и спросил — завершил ли он свою работу. «О, я не занимался больше этой машиной, — ответил он. — Еще до ее окончания мне пришла в голову идея аналитической машины, которая была настолько лучше, что не стоило тратить времени на завершение первой машины, я стал строить новую». Потом мы подошли к его аналитической машине. «Закончили Вы ее?», — спросил я. «Нет, — ответил он, — я пришел к новой идее, которая полностью затмила мои предыдущие замыслы, поэтому было бы пустой тратой времени работать далее над старым вариантом»".

Мы видим, что Бэббидж натолкнулся на одну из основных трудностей, лежащих на пути любого изобретателя, — трудность вовремя остановиться. Все время хочется улучшить свое изобретение, сделав его еще более совершенным. И очень трудно — хотя и совершенно необходимо — вовремя сказать себе: "Стоп! Дальше совершенствовать ничего не буду, ибо лучшее — это враг хорошего".

Однако идеи Бэббиджа, хотя и не всегда воплощенные в работающие машины, не были забыты. Они воплотились в жизнь тогда, когда пришел "век электричества", и стали появляться вычислительные машины на электромагнитных, а затем и на электронных элементах.

10.4. Релейные и аналоговые машины

Во второй половине XIX века получили широкое распространение электромагнитные реле. Каждое такое реле состоит из электромагнита с поворотным якорем и нескольких контактов. При подаче напряжения на электромагнит реле "срабатывает". Это означает, что электромагнит притягивает якорь, якорь поворачивается и своим движением переключает контакты: ранее разомкнутые контакты замыкаются, замкнутые контакты размыкаются.

Из набора реле можно собрать различные релейные схемы, работу которых удобно изобразить на чертеже. На релейных схемах (простой пример показан на рис. 10.4) электромагнитное реле обозначается прямоугольником, а реле, имеющее электромагнит с двумя независимыми обмотками, — двумя смежными прямоугольниками. Контакт, замыкающийся при срабатывании реле, обозначается так: , а контакт, размыкающийся при срабатывании реле, обозначается так: . Для срабатывания реле достаточно подать на него короткий импульс напряжения, всего 5—15 миллисекунд. Если мы хотим, чтобы реле держало замкнутыми свои контакты вида после прекращения импульса, то реле "ставится на блокировку" — т. е. через один из замкнувшихся контактов на вторую обмотку электромагнита подается постоянное напряжение.

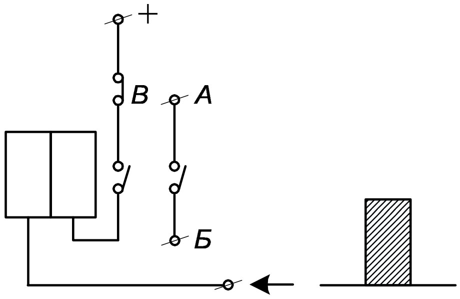


Рис. 10.4. Релейная схема

Импульс напряжения, подаваемый на первую обмотку реле, на рис. 10.4 условно изображен заштрихованным прямоугольником. После прекращения импульса реле "стоит на блокировке", его контакты o/o замкнуты и могут управлять какой-либо цепью *АБ* (рис. 10.4) или несколькими такими цепями. Если надо "снять реле с блокировки", то следует с помощью другого реле разомкнуть контакт *В* (см. рис. 10.4).

Наиболее интересными свойствами обладает комбинация из двух взаимодействующих реле *А* и *Б*, показанная на рис. 10.5. Исходное положение: реле *Б* стоит на блокировке, контакты o/o, которыми это реле управляет, замкнуты, контакты o‾o, которыми оно также управляет, — разомкнуты. Реле *А* при этом не находится под напряжением, поэтому контакты o/o, которыми оно управляет, — разомкнуты, контакты o‾o — замкнуты.

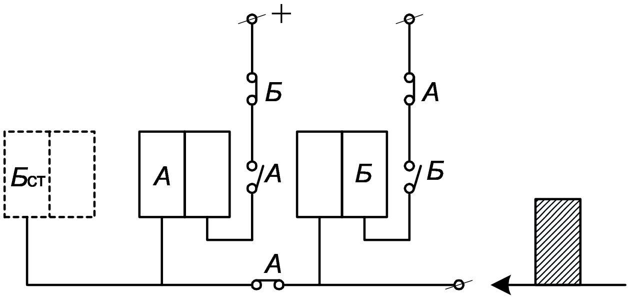


Рис. 10.5. Комбинация из двух взаимодействующих реле

Если теперь приходит очередной импульс напряжения, то он вызывает срабатывание реле *А*, замыкание его контактов вида o/o и размыкание контактов вида o‾o. В результате реле *Б* снимается с блокировки, но зато ставится на блокировку реле *А*. Новый импульс напряжения "перебрасывает" систему в исходное положение: реле *Б* на блокировке, реле *А* — не под напряжением.

Такую релейную схему из двух реле, которую каждый приходящий импульс "перебрасывает" из одного устойчивого состояния в другое, называют "релейным триггерным устройством" или просто "триггером". Легко убедиться, что триггер можно рассматривать как одноразрядный счетчик в двоичной системе счисления. Действительно, состоянию триггера, в котором на блокировке находится реле *Б*, можно приписать значение "нуль", а состоянию, в котором на блокировке стоит реле *А*, — значение "единица".

После прихода первого импульса на триггер, стоящий в состоянии "нуль", он переходит в состояние "единица". Второй импульс напряжения снова переводит триггер в состояние "нуль", но зато по одному из контактов реле *А* импульс проходит на триггер старшего разряда, который на рис. 10.5 показан пунктиром, при этом происходит перенос единицы в старший разряд. Ряд триггеров, соединенных между собой контактами переноса, позволяет производить суммирование чисел в двоичной системе счисления и является центральным звеном арифметического устройства машины. Для суммирования тридцатиразрядных двоичных чисел (что соответствует девятиразрядным десятичным числам) достаточно использовать 60 реле.

Из реле нетрудно сформировать и ячейки оперативной памяти машины. Обратившись к рис. 10.4, заметим, что каждому реле, не находящемуся под напряжением, можно приписать значение "нуль", а каждому реле, стоящему на блокировке, — значение "единица". Подавая напряжение на контакты, которыми реле управляют, легко "прочесть" — какое число "записано" в последовательности реле, и подать это число в арифметическое устройство машины.

Главное отличие реле от механических элементов заключается в том, что их совместной работе не препятствует трение, и поэтому машина, составленная из большого числа релейных элементов, может надежно работать. Таким образом, отпало главное препятствие для реализации замысла Бэббиджа, и релейные универсальные вычислительные машины действительно успешно и надежно работали во многих странах.

Изобретатели разных стран творили, по-видимому, независимо друг от друга.

В США релейная вычислительная машина ("Модель I") была построена Джорджем Штибицем, сотрудником фирмы "Белл" в 1939 году. Ее усовершенствованный вариант ("Модель V") начал работать в 1944 году. Машина содержала около 9000 реле, имела память из 44 восьмиразрядных регистров, выполняла сложение за 0,3 секунды, умножение — за 1 секунду, имела отдельные блоки для вычисления функций $\sin x$, $\log x$ и др.

В Германии, в Геттингенском университете релейная вычислительная машина с программным управлением была построена инженером Конрадом Цузе в 1941 году. Машина К. Цузе состояла из 2600 реле, имела память на 64 числа, каждое число имело 23 двоичных разряда. Операции сложения/вычитания занимали по 0,3 секунды, умножения/деления по 4—5 секунд.

В Советском Союзе над созданием релейных машин трудились Николай Иванович Бессонов (1906—1963) в Москве и Николай Николаевич Поснов (род. в 1925 г.) — в Ленинграде. На созданных ими машинах выполнялись расчеты цен для Госплана, а также велись научные расчеты в Ленинградском отделении Математического института (ЛОМИ) Академии наук СССР. Машины успешно работали до тех пор, пока в начале 60-х годов XX века их не вытеснили значительно более быстро считающие вычислительные машины на электронных лампах и полупроводниковых триодах.

Вообще релейным машинам, если можно так выразиться, "не повезло". Они успешно реализовали мечту Бэббиджа, работали вполне надежно, но были вытеснены новыми конструкциями. На моих глазах в 1960 году была разобрана релейная машина в ЛОМИ АН СССР, на ее место поставили тогда электронную машину "Урал". Машина Н. И. Бессонова (законченная в 1957 году и содержавшая 5500 реле) работала несколько дольше — до 1965 года.

Да, это общее явление — любой инженер и конструктор должны быть готовы к тому, что изделие, которому они отдали столько времени, труда и таланта, очень часто работает не очень долго и вытесняется изделием более совершенным. Не надо жалеть о том, что твое любимое детище прослужило недолго. Главное все-таки заключается в том, что появилось и работает еще более совершенное изделие, и прогресс техники не остановился.

Еще одной отраслью вычислительной техники, которая успешно решала поставленные перед ней задачи, но должна была постепенно уступить наступлению стремительно развивающихся быстродействующих цифровых машин, были так называемые аналоговые вычислительные машины (АВМ). В основу этих машин положена аналогия между различными процессами (механическими, электрическими, гидравлическими и т. д.), которые описываются одними и теми же математическими моделями. Так, например, уравнение

$$\dot{x} + kx \qquad (1)$$

с общим решением

$$x = c_1 e^{-kt} \qquad (2)$$

описывает как радиоактивный распад, так и процесс разряда конденсатора на сопротивление, причем коэффициент k, входящий в уравнение (1), равен отношению емкости конденсатора c к сопротивлению r, на которое он разряжается.

Поэтому для того чтобы моделировать процессы, описываемые дифференциальными уравнениями в самых различных объектах исследования, достаточно составить электрическую схему из сравнительно небольшого количества конденсаторов, усилителей, линейных и нелинейных сопротивлений. Когда все это сделано, можно просто записать на осциллографе или другом регистрирующем приборе выходные напряжения схемы, которые будут решениями соответствующей системы дифференциальных уравнений.

На этой идее в 40—50-х годах XX века были разработаны и построены самые различные аналоговые вычислительные машины. Общими чертами этих машин было представление исследуемых процессов не в цифровой, а в непрерывной форме, в виде непрерывно изменяющегося напряжения. Поэтому подобные машины называли иногда "машинами непрерывного действия".

Каждая машина снабжалась наборным полем, на котором можно было легко набрать структуру и коэффициенты математической модели исследуемого объекта, после чего оставалось только нажать пусковую кнопку и ждать появления записи интересующего тебя процесса на экране осциллографа или на самописце.

Простота обслуживания аналоговых вычислительных машин привела к их широчайшему распространению, особенно в области инженерных расчетов. В 60—70-х годах XX века в СССР серийно выпускался целый набор аналоговых вычислительных машин, начиная с простых, размещающихся на рабочем столе инженера, до сложных и совершенных, для размещения которых требовался уже большой зал.

В табл. 10.3 приведены марки и основные характеристики АВМ, выпускаемых в СССР в 70-е годы XX века.

Таблица 10.3. *Марки и основные характеристики АВМ*

Марка машины	Вид решаемых уравнений	Порядок решаемых уравнений	Габариты, мм или занимаемая площадь, м^2	Потребляемая мощность, квт
ИПТ-5	линейные	9	200×400	2
МПТ-9	линейные	16	700×80×120	5
ЛМУ-1	нелинейные	9	622×426×1320	2,1

Таблица 10.3 *(окончание)*

Марка машины	**Вид решаемых уравнений**	**Порядок решаемых уравнений**	**Габариты, мм или занимаемая площадь, м^2**	**Потребляемая мощность, квт**
ЭМУ-3	линейные	6	1200×410×700	0,85
МН-7	нелинейные	6	0,5 м^2	0,74
МН-8	нелинейные	32	60м^2	25
ЭМУ-5	нелинейные	6	680×500×1000	0,76
ЭМУ-6	нелинейные	6	680×500×540	0,35
МН-10	нелинейные	6	0,3 м^2	0,13
МН-14	нелинейные	30	40 м^2	15
ЭМУ-10	нелинейные	24	20 м^2	2
МН -11	нелинейные	9	15 м^2	10
МН-10М	нелинейные	10	0,2 м^2	0,25
МН-18	нелинейные	50	1714×1086×530	10
МН-17м	нелинейные	60	7520×1042×2390	15

Помимо перечисленных в таблице машин, применяющихся для моделирования решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений — линейных и нелинейных, — были созданы машины для моделирования процессов, описываемых уравнениями с частными производными, — т. е. моделирования магнитных полей, температурных полей, полей фильтрации жидкостей в пористых средах и других полей различной природы.

На аналоговых вычислительных машинах и моделирующих установках успешно выполнялась значительная доля расчетов для авиации и космонавтики, атомной энергетики и т. п. Но и эти замечательные машины стали постепенно уступать свои позиции, и основная часть расчетов постепенно перешла к цифровым персональным компьютерам и сверхбыстродействующим большим цифровым вычислительным машинам. Однако пренебрегать аналоговыми машинами не следует, в ряде случаев они очень выгодны и удобны.

10.5. Электронные вычислительные машины

Совершенно новый этап в развитии вычислительных машин наступил тогда, когда их элементами стали электронные радиолампы, ранее применявшиеся только в радиотехнике.

Еще в 1884 году Эдисон, работая над лампой накаливания, обнаружил, что от раскаленного волоска лампы, из которой выкачан воздух, летит поток электронов. Подключив один полюс цепи к волоску, а другой — к холодному электроду, впаянному в стенку лампы, он обнаружил, что ток идет только от раскаленного катода к аноду, холодный электрод электронов не испускает. Фактически лампа Эдисона со впаянным вторым электродом уже являлась диодом — элементом, который пропускает электрический ток только в одном направлении. На основе опубликованных наблюдений Эдисона и взятого им "на всякий случай" патента в 1904 году Амброзиусом Флемингом, консультантом "Компании беспроволочного телеграфа" был построен пригодный для радиотехники вакуумный диод — двухэлектродная радиолампа с накаливаемым катодом.

Следующий шаг сделал в 1906 году Ли де Форест, поместивший между катодом и анодом третий электрод — сетку. Подавая напряжение на сетку, можно гибко и точно регулировать ток, протекающий через радиолампу. Трехэлектродную лампу Ли де Фореста назвали триодом и она получила широчайшее распространение в радиотехнике. На рис. 10.6 показаны первые триоды.

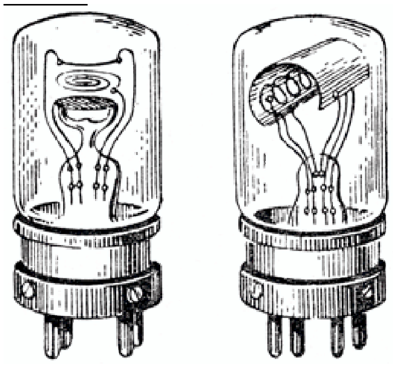


Рис. 10.6. Первые триоды

В 1918 году русский радиоинженер М. А. Бонч-Бруевич (1888—1940), впоследствии видный советский ученый, с 1931 г. — член-корреспондент АН СССР, соединил аноды двух триодов с их сетками так, что получился электронный триггер — прибор с двумя устойчивыми состояниями: если проводит ток первая лампа, то не проводит вторая, а если сигнальный импульс вызовет ток во второй лампе, то перестанет проводить первая. Электронный триггер по своим свойствам был подобен ранее рассмотренному релейному триггеру, но мог переключаться гораздо быстрей.

Перейдя к управлению потоками электронов, техника получила огромный выигрыш в быстродействии. Причина простая — электрон, как известно, в 1840 раз легче протона и, следовательно, более чем в 100 тыс. раз легче атома железа в якоре электромагнитного реле или в детали механической машины. Теперь понятно, что переход на управление электронными токами мог привести к очень большому скачку в быстродействии даже по сравнению с релейными машинами, не говоря уже о механических.

Однако эта кажущаяся сейчас такой простой идея долго никому не приходила в голову, и первая вычислительная машина на электронных лампах была построена лишь в 1943 году в США для военных целей (расчеты баллистических артиллерийских таблиц). После двух с половиной лет упорной работы большой группы ученых, инженеров и рабочих под руководством Могли и Эккерта эта машина в 1945 году вошла в строй и получила название ЭНИАК — по первым буквам английских слов "электронный цифровой интегратор и вычислитель". ЭНИАК был огромным сооружением, содержал 18 000 электронных ламп и 1500 вспомогательных реле, потреблял 150 киловатт электроэнергии. ЭНИАК работал еще в десятичной системе счисления. Десятичный счетчик состоял из 10 триггеров, соединенных в кольцо, и выполнял роль счетного колеса механической вычислительной машины. Сложение чисел в этой машине занимало 200 микросекунд (миллионных долей секунды), умножение — 0, 0028 секунды.

По современным меркам быстродействие было, конечно, еще не очень велико, но возможности электронной техники, показанные машиной, способность быстро производить самые громоздкие, недоступные ранее вычислительные работы были сразу оценены.

Вскоре после того, как в 1945 году машина ЭНИАК продемонстрировала возможность и достижимость огромного скачка в быстродействии, началось стремительное развитие вычислительной техники, которая сразу привлекла к себе внимание большого числа ученых и инженеров.

Среди ученых, сыгравших наибольшую роль в разработке теории быстродействующих вычислительных машин, нужно особо отметить Джона фон Неймана и Алана Тьюринга. Джон фон Нейман (Neumann, 1903—1957) родился в Будапеште, там же кончил университет, но уже в 1930 году переехал в США, где в 1931 году стал профессором Принстонского университета, а с 1933 года — сотрудником знаменитого Института перспективных исследований в Принстоне.

Вот как вспоминал о нем его сотрудник Станислав Улам: "Он был среднего роста, худощавый в молодости, а затем быстро располневший, двигавшийся маленькими шажками, не быстро, но иногда со значительным и каким-то беспорядочным ускорением. Улыбка вспыхивала на его лице, как только в задаче появлялись черты логического или математического парадокса.

Его разговоры по научным вопросам с друзьями могли длиться часами. Здесь никогда не было нехватки в темах, даже если кто-то отклонялся от математических проблем. У Джонни был живой интерес к людям, он наслаждался болтовней. Часто казалось, что он собирал в своей памяти коллекцию человеческих характеров, как будто намеревался провести статистическое исследование. Будучи в среде ученых-коллег, он делал блистательные, часто иронические замечания по поводу исторических и социальных явлений, облекая их в математическую формулировку…

Я бы сказал, что после науки его больше всего интересовало изучение истории. Его знания древней истории были неправдоподобно детальным. Кроме всего прочего, Джонни был превосходным знатоком языков. Он замечательно помнил школьную латынь и греческий. Кроме английского он бегло говорил по-немецки и по-французски. Немного хуже знал испанский".

Джон фон Нейман в 1941—1945 годах участвовал в работе над созданием американской атомной бомбы, выполняя многие сложные расчеты, а получив в 1944 году сведения о машине ЭНИАК, сразу оценил ее возможности, стал энтузиастом вычислительной техники. В 1946 году совместно с Г. Гольдстайном и А. Берксом (впоследствии — деканом факультета вычислительной техники Мичиганского университета) он опубликовал статью об основных принципах построения вычислительных машин. В этой статье было обосновано применение для электронных машин двоичной системы счисления (в машине ЭНИАК, как уже говорилось, использовалась еще десятичная система) и было предложено управлять ходом вычислений с помощью программы, хранимой — как и числа — в памяти машины (в релейных машинах и в машине ЭНИАК последовательность будущих вычислений набиралась — как и в табуляторах, о которых будет рассказано далее — на наборной доске).

Принципы, сформулированные Нейманом и его соавторами, легли в основу конструкций последующих вычислительных машин, которые начали появляться одна за другой в США и в Англии. В 1948 году компания International Business Machines (IBM), еще с 1929 года производившая различную вычислительную технику, выпустила машину IBM-603, первую электронную вычислительную машину, изготовлявшуюся серийно. В дальнейшем фирма IBM многие годы оставалась ведущим производителем электронных машин в США, и ее машины IBM-650, IBM-360 и другие во многом определили дальнейшее развитие вычислительной техники.

В 1946—1950 годах английские инженеры, не уступавшие американским коллегам, разработали свои вычислительные машины (MADAM, АКЕ), а наиболее известным теоретиком вычислительных машин стал английский математик Алан Матисон Тьюринг (Turing, 1912—1954). Тьюринг окончил Кэмбриджский университет и еще в 1937 году опубликовал статью "О вычислимых числах", где рассмотрел предельные возможности вычислительных машин, отвлекаясь от ограничений на их быстродействие и объем памяти. Тьюринг рассмотрел возможности абстрактной машины (которая потом была названа "машиной Тьюринга"). Машина могла выбирать числа из ячеек своей неограниченной памяти, производить над ними арифметические действия и заносить результаты в новые ячейки памяти. Тьюринг нашел отдельные задачи, которые его машина решить не могла, но гораздо больший, почти необъятный, круг задач оказался для его машины вполне посильным.

Конечно, "машина Тьюринга" являлась всего лишь абстракцией и идеализацией реальных машин, "память" которых всегда конечна. Однако уже сам факт существования идеализированной машины с такими огромными возможностями укреплял уверенность тех, кто в дальнейшем работал над созданием цифровых машин, — уверенность в том, что цифровые машины могут сделать много, очень много, почти необъятно много — нужно только увеличивать быстродействие машины и объем ее памяти.

Не меньшую роль сыграла и знаменитая статья Тьюринга "Может ли машина мыслить?", опубликованная в 1950 году и переведенная в 1960 году на русский язык. В этой статье Тьюринг доказал, что ограничения на возможность программируемых вычислительных машин, описанные в свое время леди Лавлейс, можно обойти, и машина, действительно, может выполнять функции, которые ранее считались возможными лишь для мыслящих существ. Появление строго доказательной статьи Тьюринга (которая, все равно, вызвала бурную дискуссию и яростные споры) еще больше раззадорило разработчиков машин. Теперь они знали, что машины могут не только считать, но и мыслить — во всяком случае исполнять многие функции, которые ранее выполнялись только человеком. Начались исследования в области искусственного интеллекта, распознавания образов — на базе стремительно совершенствующихся цифровых машин. Все это оказалось возможным.

Решающим этапом в совершенствовании вычислительных машин стало использование в них полупроводниковых элементов — диодов и триодов. Электронные вакуумные радиолампы с накаливаемым катодом не являлись для вычислительных машин идеальными элементами. Они потребляли немало энергии, выделяли много тепла, имели ограниченный срок службы, что при большом числе радиоламп приводило к довольно частым отказам первых вычислительных машин.

Однако уже в 1948 году фирма "Белл" объявила о выпуске полупроводникового прибора — точечного транзистора, — использовав для его создания предыдущие, занявшие более 10 лет, исследования физика-теоретика Уильяма Шокли. В 1951 году У. Шокли запатентовал более совершенный плоскостной транзистор.

Исследования У. Шокли показали, что такие элементы, как германий и кремний, очищенные до очень высокой, почти идеальной, чистоты, являются полупроводниками, и их проводимость сильно зависит от малейших примесей, специально вводимых в полупроводник. Если подмешиваются вещества, у атомов которых на внешних электронных орбитах больше электронов, чем у полупроводника, то возникает обычная электронная проводимость, такая же, как в любом металле. Если же атомы примеси имеют меньше внешних электронов, чем полупроводник, то возникает особая, так называемая "дырочная" проводимость, когда носителями тока являются места, оставшиеся после ухода электронов. Такие места условно назвали "дырками", и их можно считать как бы частицами с положительным зарядом.

Полупроводниковые приборы состоят обычно из двух или более слоев полупроводника с электронной или "дырочной" проводимостью. Уже простой контакт электронной и дырочной проводимости пропускает ток только в одном направлении, что и позволило создать первый прибор — полупроводниковый диод, сразу использованный для выпрямления переменного тока.

Следующим прибором стал транзистор — полупроводниковый триод, который (как и вакуумный триод) имеет три электрода: один играет роль катода в радиолампе, создает первичные носители тока и называется "эмиттером". Другой электрод выполняет функцию анода, воспринимая носители тока, и называется "коллектором". Наконец, последний, третий, электрод играет роль сетки радиолампы, и его называют "базой" или "основанием" транзистора.

Поскольку имеется общая база, то в транзисторе возникает взаимодействие между цепями. В результате, управляющий импульс может вызвать переход транзистора из непроводящего состояния в проводящее, и транзистор в этом случае начнет работать как триггер. Это и дает ему возможность стать основным элементом вычислительной машины.

Уже в 1956 году появились первые разработки вычислительных машин, использующие полупроводниковые триоды вместо вакуумных электронных ламп. Устройство первых полупроводниковых приборов показано на рис. 10.7. Вверху — полупроводниковый выпрямитель (диод). Внизу — триод.

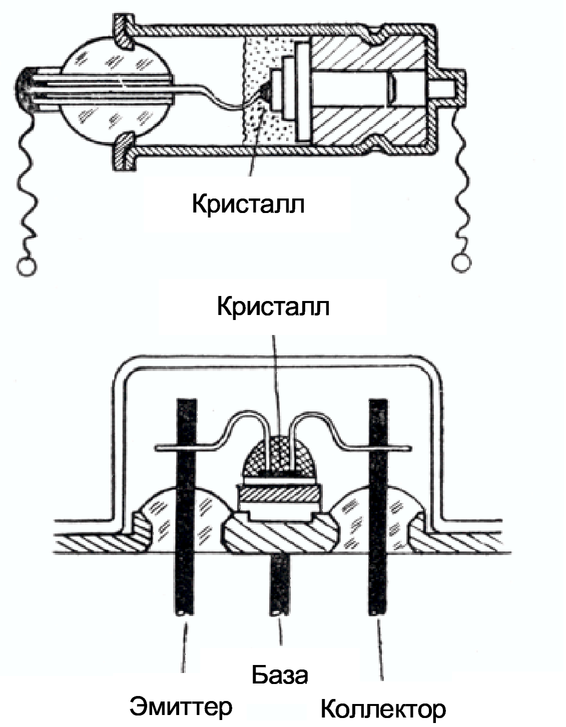


Рис. 10.7. Первые полупроводниковые приборы

Устройство и принципы действия полупроводниковых приборов не сложны, но освоение их производства было трудной и тяжелой технической задачей, потребовало высокой культуры производства и ранее не применявшихся технологий. Потребовалась исключительно тщательная очистка исходного материала — германия или кремния с доведением остаточных примесей не до долей процента — что считалось хорошей очисткой ранее, — а до миллионных долей, что стало, конечно, очень трудной задачей. Тем не менее производство полупроводниковых приборов было освоено и в США, и в СССР. В 1959 году фирмой IBM был начат серийный выпуск машин IBM-1620 на транзисторах — машин более компактных и надежных, чем машины на электронных лампах.

В СССР первая электронная вычислительная машина, названная МЭСМ (малая электронная счетная машина), была создана в 1950 году в Киеве под руководством Сергея Алексеевича Лебедева (1902—1974). Опыт, накопленный при ее разработке, позволил уже в 1952 году выпустить большую электронную машину (БЭСМ-1) — первую из машин серии БЭСМ. В машине использовалось 4000 электронных ламп и было достигнуто быстродействие 10 тысяч операций в секунду.

В дальнейшем были разработаны и другие машины:

1. Машина "Стрела" — в 1953 году под руководством Ю. Я. Базилевского. В машине использовалось 6000 электронных ламп и было достигнуто быстродействие 2000 операций в секунду. Память — на электронно-лучевых трубках.
2. Вычислительная машина М-2 средней мощности с памятью на ферритовых сердечниках — в 1957—1958 годах под руководством И. С. Брука и М. А. Карцева.
3. Машина М-20 — в 1958 году под руководством С. А. Лебедева, быстродействие — 20 тыс. операций в секунду.
4. Малая вычислительная машина "Урал" — в 1954—1957 годах под руководством Б. И. Рамеева.

   Машина не обладала высоким быстродействием (всего 80 операций в секунду), но, в отличие от других машин, она с 1957 года выпускалась серийно. Машина была проста в обслуживании и широко использовалась на многих предприятиях до тех пор, пока не была заменена на более совершенные машины. Помимо оперативной памяти на вращающемся магнитном барабане, машина имела долговременную память на магнитных лентах. Ленты для удобства контроля и доступа размещались под большим стеклом на передней вертикальной панели машины и во время ее работы с тихим шорохом летали вверх и вниз, протягиваемые мимо магнитных считывающих головок. Почти бесшумное быстрое движение лент и мигание неоновых ламп на передней панели привлекали благоговейное внимание посетителей, которые именно на примере машины "Урал" получали в 60-е годы прошлого века первое впечатление от вычислительной техники (машины БЭСМ-1, М-2, "Стрела" изготовлялись в единичных экземплярах, работали, в основном, в закрытых учреждениях и были мало кому доступны).

   Позднее были разработаны и выпускались многие модификации машины "Урал" — вплоть до "Урал-16", выполненной уже не на электронных лампах, а на полупроводниковых элементах.
5. Машина "Киев" — в 1958 году в Институте кибернетики АН УССР под руководством директора Института Виктора Михайловича Глушкова

(1923—1982). В дальнейшем в Институте кибернетики было разработано немало других машин: машина "Проминь" — в 1962 году, машина "МИР" (машина для инженерных расчетов) — в 1968 году и др.

6. Серия вычислительных машин "Минск" (от "Минск-1" до "Минск-32") была разработана в Белоруссии. "Минск-1" и "Минск-2" работали еще на радиолампах, "Минск-22" и "Минск-32" были выполнены уже на полупроводниках.
7. В Армении, в Ереванском институте математических машин были разработаны в 1958—1965 годах вычислительные машины "Раздан", а в 1964—1970 годах — машины "Наири".

Вообще эпоха конца 50-х — начала 60-х годов XX века была бурным и героическим периодом в истории вычислительных машин в СССР. Помимо уже упомянутых крупных институтов и научных центров в Москве, Киеве, Ереване, Минске, созданием своих вычислительных машин занимались группы энтузиастов почти в каждом высшем учебном заведении СССР. Элементная база машин тогда определилась — это были полупроводниковые элементы — но оставался большой простор для выбора структуры машины, тех или иных систем оперативной и долговременной памяти и многого другого. И здесь группы энтузиастов, сформировавшиеся в вузах, предложили много оригинальных решений.

Особенно много экспериментировали с устройствами машиной памяти. Память на линиях задержки, память на электронно-лучевых трубках, память на ферритовых сердечниках, на вращающихся магнитных барабанах, на магнитных лентах, на магнитных дисках — вот лишь неполный перечень устройств, над которыми экспериментировали в те годы. Пробовали использовать различные системы счисления. Так, например, в Московском государственном университете в 1959 году была разработана машина "Сетунь" (названная в честь небольшой речки в окрестностях Москвы), которая являлась единственной машиной в мире, работавшей в троичной системе счисления. Интересные замыслы реализовывались и в других вузах, тем более, что между ними постоянно происходил обмен, и все охотно делились своим, тогда еще очень небольшим опытом. Это было веселое и бурное время, время надежд и энтузиазма. Потом, в 70-е годы, многое изменилось и стало совсем другим.

10.6. Настольные машины

В 1957 году и в США, и в СССР уже работали быстродействующие электронные вычислительные машины. Это были большие и громоздкие устройства. Они стояли в вычислительных центрах, куда приходилось ездить исследователям и инженерам для проведения больших расчетов.

Повседневная вычислительная работа выполнялась тогда на настольных механических машинах. Это были шумные, дорогие и капризные устройства. Лучшие из них — машины "Мерседес", "Рейнметалл" — приходилось импортировать из-за границы (механические машины, изготовленные в СССР, работали не очень надежно).

На нежелательность такого положения вещей и на возможность его изменения одним из первых обратил внимание выдающийся советский математик и экономист Леонид Витальевич Канторович (1912—1986), который в 1957 году был профессором Ленинградского государственного университета и одновременно работал (по совместительству) в Ленинградском отделении математического института (ЛОМИ) Академии наук СССР. В молодые годы Л. В. Канторович был вундеркиндом. Ленинградский университет он окончил в 18 лет, в 1930 году, с 1934 года стал его профессором. В 1938—1940 годах пионерские работы Л. В. Канторовича положили начало новому научному направлению — линейному программированию. В 1957 году Канторовичу было 45 лет, но он выглядел старше своего возраста и казался тогда немного усталым и утомленным. Говорил он очень тихо, слегка запинаясь, но очень веско и твердо. На многочисленных тогда научных семинарах он сидел, прикрыв глаза, и часто казалось, что он просто дремлет. Но стоило докладчику сказать что-либо ошибочное, как глаза Леонида Витальевича сразу раскрывались и раздавалась его исправляющая реплика.

В мае 1957 года Л. В. Канторович вызвал к себе меня, тогда еще молодого 27-летнего инженера, только месяц назад поступившего на работу в ЛОМИ, и предложил сначала подумать, а потом и приступить к работе по созданию настольной вычислительной немеханической машины, которая работала бы лучше, чем "Мерседес" и "Рейнметалл". "Создав такую машину, — сказал Л. В. Канторович, — мы достигнем двух целей: во-первых, мы облегчим работу многочисленных инженеров, бухгалтеров, счетных работников и сократим расходы государства на закупку механических машин за рубежом, во-вторых, появление немеханической настольной машины, пусть даже и не обладающей высоким быстродействием, сразу подтолкнет разработчиков к созданию лучших машин, а вычислительная техника только тогда по-настоящему войдет в жизнь, когда быстродействующая машина будет стоять на столе у каждого инженера".

Это были пророческие слова, хотя задание, поставленное Л. В. Канторовичем, оказалось очень трудным. Ведь в 1957 году еще не было никаких микросхем, да и полупроводниковые триоды еще только начинали выпускаться и отличались крайней ненадежностью и дороговизной. В то же время полупроводниковые диоды уже выпускались серийно, были очень невелики по размерам и работали вполне надежно. Главной трудностью стало то, что в небольшом корпусе настольной машины требовалось поместить блок питания, блок формирования счетных импульсов, арифметическое устройство, наборную клавиатуру и блок вывода результатов вычислений. Задача казалась невыполнимой, но интуиция Л. В. Канторовича подсказывала ему, что решение возможно.

Действительно, после целого ряда проб и ошибок постепенно начали проясняться контуры технических решений, суливших успех. Во-первых, удалось объединить арифметическое устройство и вывод результатов за счет использования модифицированных десятичных телефонных счетчиков, давно и успешно применявшихся в телефонии. Эти счетчики имели колесо с четко различимыми цифрами и давали удобный вывод результата вычислений, а мы добавили контакт, который замыкался при повороте от цифры 9 к цифре 0, и с помощью дополнительного реле помогал переносу десятков.

Решающим звеном в реализации настольной машины и ее основной "изюминкой" стало создание диодного импульсатора, схема которого показана на рис. 10.8, *а*. Небольшой, размером всего со спичечный коробок и состоящий из шести диодов, импульсатор включался прямо в бытовую сеть переменного тока, 220 вольт, 50 герц и позволял формировать в трех цепях — *А*, *Б* и *В* — три различные последовательности импульсов напряжения, каждый длительностью по 10 миллисекунд. Эти последовательности и показаны на рис. 10.8, *б*. В цепи *А* идет нечетная последовательность импульсов (импульсы 1, 3, 5…), в цепи *Б* — четная (импульсы 2, 4, 6…), в цепь *В* подаются обе последовательности. Цель такого разделения — не допустить, чтобы контакты любого реле размыкали цепи, по которым идет электрический ток. Достигалось это тем, что если какое-либо реле срабатывало от цепи *А*, то на его контакты подавалось напряжение только от цепи *Б*. Цепь *В* использовалась в том случае, если реле нужно было "держать на блокировке". Такое разделение цепей сразу во много раз увеличивало надежность работы вычислительной машины, поскольку основным источником сбоев в работе реле было обгорание контактов при разрыве цепи под током.

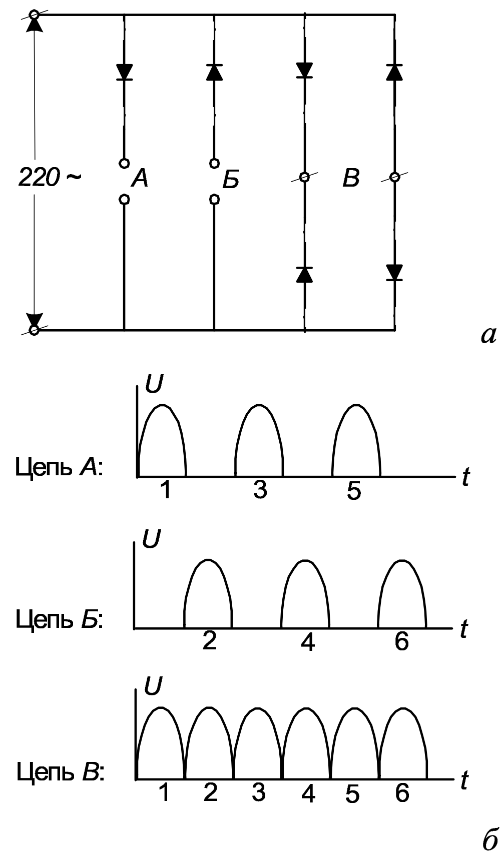


Рис. 10.8. Диодный импульсатор:
а — принципиальная схема; *б* — последовательности импульсов в цепях

Еще одной особенностью разрабатываемой машины стало использование в ней электрического аналога знаменитого "валика Лейбница" — релейного устройства, которое в цикле сложения/вычитания подавало на каждую клавишу машины число импульсов, соответствующее номеру клавиши. На клавишу 1 подавался один импульс, на клавишу 2 — два импульса и т. д. Если клавиша была нажата, то именно это число импульсов проходило в счетчик при каждом цикле работы машины.

Все эти разработки — и особенно очень компактный диодный импульсатор — позволили спроектировать небольшую и компактную машину, выполняющую все четыре арифметических действия.

Уже в марте 1958 года была подана заявка в Комитет по делам изобретений и открытий при Совете Министров СССР на изобретение новой релейной вычислительной машины с диодным импульсатором, и через год получено авторское свидетельство № 123762 на имя Л. В. Канторовича, Ю. П. Петрова и Н. Н. Поснова. Сразу после отсылки заявки на изобретение началась работа по изготовлению и доводке машины, и в конце 1959 года исправно работающая машина уже стояла у нас на столе.

Машина состояла из 27 счетчиков, 46 реле и 130 полупроводниковых диодов, весила 18 кг, выполняла сложение и вычитание за 0,2 секунды, умножение и деление за 4—5 секунд, и работа ее не создавала шума.

Новая машина — мы назвали ее "Нева-1" — вполне могла заменить импортные машины "Мерседес" и "Рейнметалл", поскольку была дешевле и работала бесшумно (подобное описание машины дано в небольшой брошюре — Петров Ю. П. Настольная клавишная машина "Нева-1". — 1960, 11 стр., 2100 экз. Сейчас эту брошюру можно найти в больших библиотеках).

Однако для того, чтобы реально заменить импортные машины, нужно было найти для новой машины завод-изготовитель. Вот здесь и начались трудности. Заводов, выпускающих вычислительную технику, в СССР было несколько. Мы — изобретатели — приходили на завод, приносили изготовленную нами в единственном экземпляре реально работающую машину, рассказывали об ее преимуществах. Директор завода, ведущие инженеры внимательно слушали нас, изучали машину, восхищались ею — а затем находили очень веские и уважительные причины, по которым именно их завод никак не может взяться за ее изготовление. На следующем заводе повторялось то же самое.

Один из директоров как-то разоткровенничался. "Ваша машина, — раскрыл он "секрет", — как и любая другая новая техника очень невыгодна и мне, и всему заводскому коллективу. Ведь освоение новой машины — это много труда, много хлопот, не исключены неудачи и неприятности, а в конце всех трудов и забот у нас не будет никакого вознаграждения. Зарплата останется той же, премии — мизерны, львиную долю их забирает министерство, а нам остаются только хлопоты и заботы", — заключил он. Мы спросили: "А как же за рубежом? Ведь заграничные заводы наперебой стремятся осваивать новую технику". "За рубежом все по-другому, — ответил директор. — Там, если новая машина действительно оказывается лучше и технологичнее предыдущей (как, кстати, и ваша "Нева"), то и владельцы завода, и его дирекция получают большую прибыль, могут сразу и на всю жизнь стать состоятельными людьми, не знать горя и забот. У нас в СССР этого нет, поэтому я всегда буду искать и, конечно, найду очень веские причины для отказа от новой техники, даже если на ее освоение придет приказ. Впрочем, — добавил он, — вы не ослабляйте усилий, обивайте пороги заводов, министерств. Иногда происходит чудо, кому-то везет, и новую машину все же начинают изготавливать. Без этого не обходится. Может быть, повезет и вам".

Нам, действительно, повезло, хотя и не сразу. В 1963 году было закончено строительство нового завода вычислительной техники в г. Вильнюсе, столице Литовской ССР. Для нового завода выпуск любой марки машины был одинаково новым делом, поэтому завод согласился выпускать массовой серией нашу машину "Нева", но уже под заводской маркой "Вильнюс" (рис. 10.9). Окончательные данные выпускаемой машины:

- габариты — 414×438 ×256 мм;
- вес — 26 кг;
- потребляемая мощность — 100 ватт.

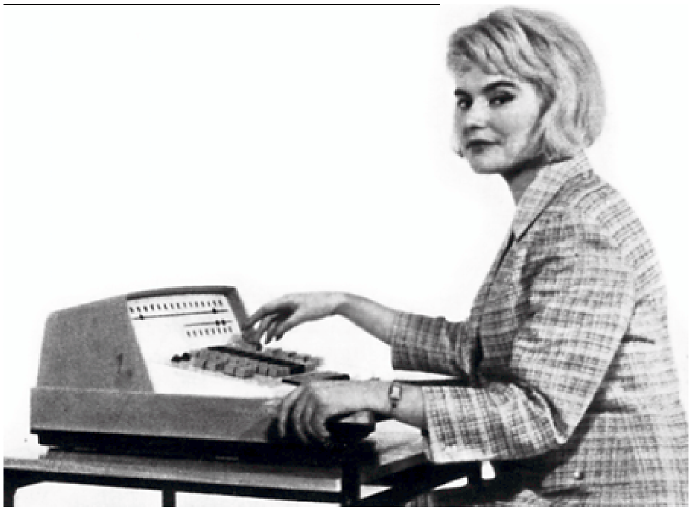


Рис. 10.9. Общий вид машины "Вильнюс"

Машина начала выпускаться в 1964 году. Она нравилась потребителям, спрос на нее рос, поэтому к ее выпуску подключился и завод в г. Кирове. Этот город стоит на реке Вятка, и в нем машина выпускалась под фирменным названием "Вятка". Всего было выпущено более 40 тысяч машин "Вильнюс" и "Вятка", и их выпуск продолжался до 1974 года, когда развитие вычислительной техники позволило создать еще более компактные и дешевые вычислительные машины на новых процессорах.

И здесь Л. В. Канторович оказался провидцем, он знал, как быстро развивается вычислительная техника, понимал, что машина "Нева" не будет выпускаться вечно, и на смену ей придут лучшие машины. В 1960 году он предрекал, что "Нева" будет выпускаться 10 лет — с 1960 по 1970 год. На самом деле эта машина под марками "Вильнюс" и "Вятка" выпускалась, как мы указали ранее, с 1964 по 1974 год. На изобретение машины, ее разработку и изготовление работающего образца ушло 2,5 года (с 1957 по конец 1959), 4 года она ожидала завода, который согласился ее изготавливать, 10 лет она выпускалась.

Исполнилось и другое предсказание Л. В. Канторовича — в 1980 году в Ленинграде проходила международная выставка вычислительной техники. Одна из японских фирм, освоивших к тому времени выпуск прекрасных "карманных" электронных калькуляторов, представила на одном из стендов свою историю — все машины, которые она последовательно выпускала со дня своего основания, с 1968 года. И оказалось, что начала японская фирма с того, что скопировала и стала самостоятельно выпускать машину "Вильнюс", к тому времени хорошо известную за рубежом. Эту машину она взяла за отправную точку, за образец, а потом японская фирма быстро двинулась вперед и дошла до выпуска машин "карманных". Таким образом, машина "Нева", как и предвидел Л. В. Канторович, не только избавила нашу страну от импорта зарубежных настольных машин и облегчила труд счетных работников, но и способствовала быстрому прогрессу мировой вычислительной техники.

После начала массового выпуска машины встал вопрос о выплате авторского вознаграждения ее изобретателям. Министерство приборостроения, средств автоматизации и систем управления СССР, которому принадлежали заводы, выпускавшие "Вильнюс" и "Вятку", упорно отказывалось платить изобретателям. Потянулась многолетняя череда судов: сначала районный суд в Москве по месту нахождения ответчика — Министерства, потом — в 1976 году — Судебная коллегия по гражданским делам Московского городского суда, потом — Верховный суд РСФСР. Только благодаря настойчивости изобретателей авторское вознаграждение в конце концов все же было выплачено. Но — это исключение. Создатели многих других прекрасных вычислительных машин вообще не получили ничего, ни копейки.

Благодаря экспертизам, назначенным судами, стала известна сумма экономии, полученной государством в 60—70-х годах прошлого века от использования изобретенной машины "Нева". Экономия эта превышала 8 миллионов рублей в год. Ценность денег с тех пор очень изменилась, но 8 миллионов тогдашних рублей в производственной сфере примерно соответствуют 25 миллионам долларов США 2005 года.

Суды по изобретению, происходившие в Москве, подарили автору этих строк возможность неоднократных встреч и советов с Л. В. Канторовичем, который к этому времени уже не был профессором Ленинградского университета и сотрудником ЛОМИ. Он был избран академиком, жил в Москве, в 1975 году — получил Нобелевскую премию. Встречи с выдающимся человеком, —

а Л. В. Канторович был им, — это лучший подарок, который можно получить от судьбы.

Автор остановился так подробно на истории машины "Нева" только потому, что эта история известна ему "из первых рук" и со всеми подробностями. Но эта история типична для всего развития вычислительной техники в Советском Союзе. Плохая восприимчивость промышленности СССР к новой технике (о причинах невосприимчивости было рассказано), пренебрежительное отношение к ученым и изобретателям, постоянное снижение их реальной заработной платы и социального положения по сравнению с другими слоями населениями СССР — все это привело к тому, что вычислительная техника в Советском Союзе, начиная с 70-х годов XX века, стала постепенно все больше отставать от уровня, достигнутого в США и Японии.

Персональные компьютеры, определившие лицо вычислительной техники начала третьего тысячелетия, были изобретены не у нас.

10.7. Персональные компьютеры

В 70-х годах XX века в Советском Союзе с целью высвобождения средств "для достижения военного паритета с США" на науке стали все больше экономить. Многие научно-исследовательские группы и научные школы в сфере информационных технологий были вынуждены сократить или совсем прервать свою работу. В области вычислительной техники решили "в целях экономии и унификации" перейти к единой системе электронных вычислительных машин (ЕС ЭВМ).

Единая система состояла из серии машин — от небольшой ЕС-1010 до наиболее быстродействующей ЕС-1060. Основные характеристики машин приведены в табл. 10.4.

Таблица 10.4. *Основные характеристики машин серии ЕС*

Модель	Время выполнения операций сложения/вычитания в микросекундах	Время выполнения операций умножения, в микросекундах	Емкость оперативной памяти, в килобайтах
ЕС-1010	2000—3000	40000	8—64
ЕС-1020	50—70	320—350	64—256
ЕС-1030	10—16	32—38	256—512

Таблица 10.4 *(окончание)*

Модель	**Время выполнения операций сложения/ вычитания в микросекундах**	**Время выполнения операций умножения, в микросекундах**	**Емкость оперативной памяти, в килобайтах**
ЕС-1040	2,5—3,5	7,2—8,2	256—1024
ЕС-1050	1,4	2	256—1024
ЕС-1060	0,5	1	1024—8192

Машины единой системы начали выпускаться серийно с 1972 года. На долгие годы из машин этой системы стал формироваться основной парк вычислительных центров СССР. Фактически эти машины были примерной копией машин, выпускавшихся в США фирмой IBM. Внимание к отечественным разработкам в области вычислительной техники было ослаблено. В результате, Советский Союз стал отставать от мирового уровня развития вычислительной техники, которая как раз в 70-е годы XX века развивалась особенно быстро.

Решающим звеном в развитии вычислительных машин стало совершенствование технологии полупроводников, позволившее разместить большее число элементов на поверхности одного кремниевого кристалла. Манипулируя различными микропримесями, можно было создавать на поверхности кристалла исключительно малые по размерам диоды, триоды, сопротивления и другие элементы и получить в конечном счете на небольшом кристалле кремния процессор с большими возможностями.

Впервые эта технология была предложена инженерами Джеком Килби и Робертом Найсом еще в 1958 году и затем постепенно осваивалась и совершенствовалась. В 2000 году Джек Килби за свое изобретение был удостоен Нобелевской премии. Разумеется, новая технология требовала очень высокой культуры производства и была освоена лишь немногими странами, но, постепенно совершенствуясь, эта технология открывала перед вычислительными машинами почти неограниченные возможности. Совершенствуя средства нанесения покрытий на кремниевый кристалл, удавалось создать все более и более миниатюрные логические элементы, а по мере их уменьшения увеличивалось быстродействие машин.

Результатом прогресса в технологиях стало создание персонального компьютера — вычислительной машины, размещающейся на рабочем столе инженера, но имеющей быстродействие не меньшее, чем у больших вычислительных машин недавнего прошлого. А начало этому было положено, когда в 1973 году фирма Scelbi Computer Company выпустила на рынок первый готовый персональный компьютер, укомплектованный процессором Intel-8008, работающим на частоте 200 килогерц.

Появление персональных компьютеров явилось решающим — и пока последним — поворотом в истории вычислительных машин. По сути дела, все дальнейшее развитие вычислительной техники с 1973 года и до наших дней — это процесс совершенствования персональных компьютеров и их вспомогательного оборудования — различных типов принтеров для вывода и печати результатов, запоминающих устройств на магнитных дисках и т. п.

Все эти устройства хорошо знакомы современным пользователям компьютеров, и поэтому нет необходимости рассказывать совсем недавнюю, происходившую у всех на глазах историю их постепенного совершенствования. Быстродействие и объем памяти, используемой в персональных компьютерах, постоянно увеличиваются. В настоящее время персональные компьютеры перестали быть только средством вычисления. Область их применения — особенно в информатике — стала почти необъятно велика.

Персональные компьютеры сейчас используются не только для вычислений. Они имеют, как известно, широчайшее применение в самых различных сферах современной жизни, и во многом именно они определяют собой лицо сегодняшнего мира.

Глава 11

История и философия информатики

Информатика — согласно определению, приведенному в известной "Энциклопедии кибернетики" — является научной дисциплиной, изучающей любые процессы коммуникации, обмена сообщениями, обмена информацией в окружающем нас мире.

В истории информатики можно выделить следующие этапы:

1. Этап письменности и книгопечатания, протянувшийся от изобретения письма примерно до середины XIX века. На этом этапе люди, — помимо, конечно, устного общения — обменивались информацией в письменном и печатном виде.
2. Этап все большего использования новых технических средств: телеграфа, телефона, радио, счетно-аналитических машин с перфокартами и, одновременно, — создание теоретической базы информатики — теории информации.
3. Современный этап, когда важнейшим элементом информатики стали персональные компьютеры и появилась сеть Интернет.

На современном этапе информатика превратилась в одну из важнейших научных дисциплин, и это заставляет с особым вниманием отнестись к ее истории.

Заметим, что само слово "информатика" вошло в употребление только в 60-х годах XX века почти одновременно в ряде европейских стран (французское — informatique, немецкое — informatik, в английском языке используется термин computer science). Однако информатика — это совсем не "работа с компьютером", как иногда думают. Сам предмет информатики существовал много раньше компьютеров. Информатика имеет богатую историю, хотя сам термин "информатика" появился позже.

Далее мы расскажем о первом и втором этапах развития информатики, которые, собственно, и составляют ее историю. Третий этап — это уже современность.

11.1. Письменность и книгопечатание

Обмен зрительными и слуховыми сигналами существовал еще у наших далеких предков, но решающим этапом в развитии человеческого общества стало изобретение письменности. Письменность появилась в государствах древности — Древнем Египте, Древнем Вавилоне, поскольку появилась потребность в точной, не допускающей искажений, передаче распоряжений правителя, в точном учете налогов и повинностей.

В *главе 1*, посвященной истории математики, мы уже рассказывали о сословии писцов, в среде которых зародились первые математические знания. Но главным и важнейшим умением писцов было умение писать. "Писец должен уметь писать понятно, хорошо знать математику, уметь межевать землю, примирять спорящих". Эти, уже упоминавшиеся, слова сохранились на глиняной табличке, дошедшей до нас и написанной в Древнем Вавилоне. На первом месте там стоит умение писать, и это связано с тем, что освоить иероглифическую письменность Древнего Египта или клинопись Древнего Вавилона было очень трудным делом, требовало многих лет упорной учебы, поэтому и сословие писцов было немногочисленным.

Лишь много позднее, в первом тысячелетии до н. э., появилось гораздо более удобное алфавитное фонетическое письмо, письмо буквами, существенно увеличившее число умеющих писать.

Письмо иероглифами осталось в Китае. Во многом это было связано с тем, что Китай — очень обширная страна, устная речь в разных районах Китая все больше расходилась между собой. Китаец с юга часто не понимал устной речи жителя северного Китая, а иероглифы они понимали одинаково, и это помогло сохранить единство страны. Но учиться писать иероглифами трудно и сейчас.

В Древнем Египте писали на папирусе, в Древнем Вавилоне — на табличках из глины, которые потом обжигались для сохранности. Во II веке до н. э. в городе Пергам, столице Пергамского царства, расположенного в Малой Азии, стали изготовлять новый материал для письма — пергамен (очень часто говорят и пишут "пергамент" с буквой "т" на конце; однако написание "пергамен" в последнее время стали считать более правильным)*. Это была тщательно выделанная тонкая кожа молодых животных — телят или ягнят. Пергамен был очень дорог, поэтому он использовался в основном лишь для важных документов или богослужебных книг. В древнем Новгороде в XI—XIV веках для повседневной переписки вместо дорогого пергамена использовали бересту. В сырой новгородской земле некоторые берестяные грамоты сохранились до наших дней и были обнаружены при раскопках. Прочитав эти "берестяные грамоты", мы многое узнали о повседневной жизни тогдашних новгородцев.

Между тем в Китае уже во II веке н. э. стал использоваться гораздо более удобный и дешевый материал для письма — бумага. Только в X—XII веках н. э. бумага стала производиться в Западной Европе и постепенно вытеснила пергамен. С тех пор бумага стала основным носителем информации.

Следующим важным шагом стало изобретение в 1440 году И. Гутенбергом (1400—1468) книгопечатания подвижными литерами (до этого книги переписывались от руки). Книгопечатание удешевило книги и привело к их массовому распространению. Напомним, для сравнения, что в XV веке в университетских библиотеках книги приковывались цепью к пюпитру, а профессор приходил на занятия с собственной книгой, которую он читал студентам. Читал, разумеется, с пояснением трудных мест, но основную часть времени все же читал студентам книгу. От тех времен идут выражения "читать лекции", "прочесть лекцию", хотя в наше время лекции давно не "читаются", и "читать по бумажке" считается дурным тоном.

Постепенно главными хранилищами огромной накопленной информации о мире стали обширные книжные библиотеки. В больших государственных библиотеках число книг стало исчисляться миллионами. Для того чтобы разобраться в этом необъятном книжном море и сравнительно быстро найти в библиотеке нужную книгу, еще в XIX веке стали пользоваться универсальной десятичной классификацией, изобретенной английским библиотекарем Дьюи в 1876 году.

Все книги научных библиотек и соответствующие каждой книге карточки в библиотечном каталоге были разбиты на 10 разделов:

0. Общий отдел.
1. Философия.

---

* В Русском орфографическом словаре (отв. редактор В. В. Лопатин), подготовленном Институтом русского языка им. В.В. Виноградова РАН и выпущенном московским издательством "Азбуковник" в 1999 году, по этому поводу сказано: "пергамен, -а (кожа; древняя рукопись)" и далее: "пергамент, -а (сорт бумаги; то же, что пергамен)". — *Ред.*

2. Религия.
3. Общественные науки.
4. Филология, языкознание.
5. Математика и естественные науки.
6. Прикладные знания, техника.
7. Искусство, фотография, спорт.
8. Художественная литература.
9. Правоведение, география, биографии, история.

Если требуется более детальная классификация, то используется вторая десятичная цифра. Так, 5-й раздел (математика и естественные науки) в Универсальной десятичной классификации издания 1962 года подразделялся следующим образом:

50. Работы по общим вопросам математики и естествознания.
51. Математика.
52. Астрономия, геодезия.
53. Физика, механика.
54. Химия.
55. Геология.
56. Палеонтология.
57. Биология.
58. Ботаника.
59. Зоология.

При более детальной классификации используется третья десятичная цифра. Так, раздел 51 (математика) включает следующие подразделы:

510. Общие работы по математике.
511. Арифметика, теория чисел.
512. Алгебра.
513. Геометрия.
514. Тригонометрия и полигонометрия.
515. Начертательная геометрия.
516. Аналитическая геометрия.

517. Математический анализ.
518. Способы вычислений. Математические игры.
519. Комбинаторный анализ. Теория вероятностей. Вариационное исчисление. Теория множеств.

Для еще более детальной классификации используется четвертая цифра, записываемая после точки. Так, работы по философии математики получили индекс 510.1, по дифференциальным уравнениям — 517.9. Дальнейшие подробности можно найти в книге [1]**.

Быстрое и неравномерное историческое развитие научных направлений, появление новых отраслей науки заставили, к сожалению, отказаться от очень удобной неизменности универсальной десятичной классификации. Так, в 1962 году еще не было такого научного направления, как теория оптимального управления, а в 1962—1980 годах по этому направлению были опубликованы сотни книг и тысячи статей. Поэтому в универсальную десятичную классификацию (УДК) 1983 года издания был введен подраздел 517.97 — вариационное исчисление и теория оптимального управления. Были введены также подразделы: 519.6 — вычислительная математика, численный анализ и программирование и 519.72 — теория информации.

При этом, как легко заметить, вариационное исчисление перекочевало из раздела 519 в раздел 517. Такие перестановки, разумеется, создают неудобство для читателей и пользователей каталога и лишний раз подчеркивают, что без знания истории науки трудно разобраться и в текущих научных вопросах. К счастью, перестановки в универсальной десятичной классификации не очень велики. Узнав из УДК шифр интересующей вас отрасли знания, уже не трудно по библиотечному каталогу найти нужные книги.

11.2. Использование технических достижений

В коммуникациях, в передаче сообщений, в использовании информации постепенно (и особенно в XIX веке) начинают все шире и шире использоваться технические достижения. Сначала получил широкое распространение электромагнитный телеграф, изобретенный в 1837 году С. Морзе (1791—1872), им же была разработана и "азбука Морзе". Затем — телефон, в изобретении

** Список литературы приведен в конце главы. Цифры в квадратных скобках обозначают номер в этом списке.

которого решающий шаг сделал в 1876 году А. Белл (1847—1922), система записи/воспроизведения устной речи и музыки на медные, а затем — на пластмассовые диски, разработанная в 1877 году Эдисоном и получившая массовое распространение в виде граммофонов и патефонов.

Не меньшую роль в истории информатики, в деле обработки и хранения информации сыграло изобретение и совершенствование табулятора и системы счетно-аналитических машин американским инженером Германом Холлеритом (1860—1929). Необходимость в подобных машинах особенно остро ощущалась в США, где в XIX веке регулярно, каждые 10 лет проводились всеобщие переписи населения и промышленных предприятий. Данные этих переписей были очень важны для американских предпринимателей, позволяя им ориентироваться в тенденциях развития хозяйства страны, позволяя правильно выбрать наиболее выгодные направления приложения своих денег и своего труда. Но для того, чтобы они могли сделать это, нужно было предварительно быстро обработать миллионы переписных бланков, превратить их в компактные таблицы. Как правильно писал Алексей Николаевич Крылов, "статистика не должна состоять в одном только заполнении ведомостей размерами с двуспальную простыню никому не нужными числами, а в сведении этих чисел на четвертушку бумаги и в сопоставлении их между собой, чтобы по ним можно было не только видеть, что было, но и предвидеть, что будет". Но получить столь нужные "четвертушки бумаги" можно было лишь после огромного и утомительного труда по обработке миллионов первичных переписных бланков.

Герман Холлерит, выполнявший в молодые годы эту тяжелую работу в статистическом управлении Министерства внутренних дел США, а потом служивший в Вашингтонском бюро патентов, сумел переложить столь утомительное дело на плечи машин. В течение 1884—1889 годов он получил ряд патентов на изобретенные им перфокарточные машины. Эти машины неоднократно совершенствовались и получили потом широчайшее распространение. В XX веке на них держался "контроль и учет" всего народного хозяйства СССР, поэтому мы остановимся на них подробнее.

В таких машинах носителем информации стала перфокарта — прямоугольник из тонкого картона размером 82 × 188 мм, в котором перфоратором пробиты прямоугольные отверстия размером 1 × 3 мм. Всего на перфокарте располагается 12 рядов возможных отверстий по вертикали и 80 рядов — по горизонтали. Таким образом, одна перфокарта может нести на себе 960 битов информации. Перфокарта, применявшаяся в XX веке, показана на рис. 11.1. Первые перфокарты, используемые Холлеритом, были меньше и имели 6 рядов по 32 позиции.

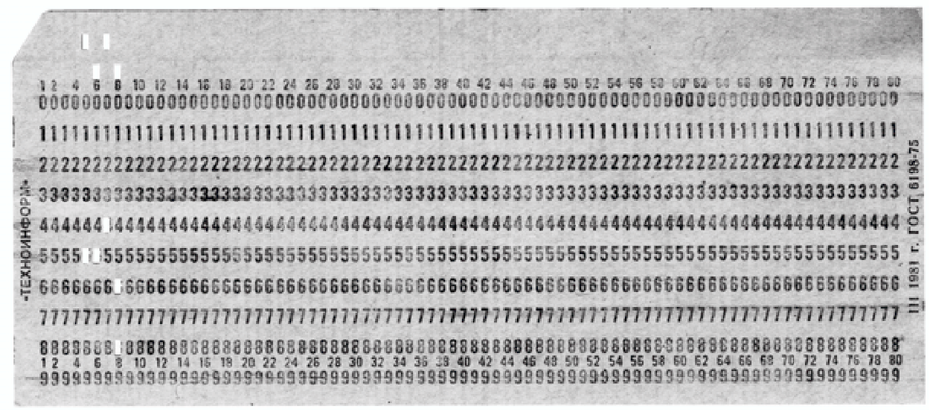


Рис. 11.1. Перфокарта

Отметим, что первоначально перфокарты были придуманы и использованы французским механиком Жаккаром (1752—1834) в 1804—1808 годах для изготовления на ткацких станках узорчатых и декоративных тканей. В перфокартах Жаккара в пробитые отверстия пропускались стержни с крючками, зацеплявшими нити утка. Холлерит использовал отверстия, пробитые в перфокартах, совсем для другой цели — для замыкания электрических цепей. Контакты скользили по движущейся перфокарте, а когда они доходили до отверстия, то цепь замыкалась.

Комплект машин Холлерита состоял из перфоратора, сортировки и табулятора. Перфоратор пробивал отверстия в перфокартах, сортировка автоматически сортировала перфокарты в зависимости от пробитых в них отверстий по закону, заданному на коммутационной доске машины, табулятор, также пропуская через себя перфокарты, печатал результаты, ранее закодированные при пробивке перфокарт.

Работу комплекта машин удобно пояснить на примере обработки результатов переписи. Кодировался, например, пол опрашиваемого: мужской пол — наличием пробивки в первой позиции верхней строки, женский пол — отсутствием пробивки. Возраст опрашиваемого кодировался пробивками в первой и второй строках: возраст от нуля до одного года — пробивкой в первой позиции, возраст от 1 до 2-х лет — пробивкой во второй позиции и т. д.

Если требовалось рассортировать перфокарты мужчин и женщин, то достаточно было запустить сортировку и вставить на ее коммутационной доске всего один гибкий шнур на первой позиции первой строки. Сортировка быстро отсортировывала в свой первый карман карточки мужчин, во второй — женщин.

Если хотели узнать — сколько детей в возрасте до 5 лет находятся в исследуемой группе переписи, то достаточно было запустить табулятор, на коммутационной доске которого следовало вставить пять гибких шнуров в позиции от 1 до 5 первой строки. Табулятор быстро пропускал сквозь себя массив перфокарт и печатал требуемый результат. Фактически табулятор уже являлся вычислительной машиной с программным управлением; программы его могли быть только простыми и короткими, зато составлялись они очень просто — вставкой гибких шнуров с медными наконечниками в отверстия коммутационной доски.

Система машин Холлерита была опробована впервые в 1887 году в Балтиморе, а в 1896 году уже использовалась при обработке результатов очередной переписи населения, сократив время обработки почти в четыре раза.

В дальнейшем система счетно-аналитических машин Холлерита неоднократно совершенствовалась, машины выпускались в больших количествах и применялись для статистики, для механизации учета, автоматизированного начисления заработной платы и т. д. Именно на выпуске счетно-аналитических машин набирала силу американская компания IBM, ставшая в последующие годы наиболее крупным производителем электронных вычислительных машин.

В Советском Союзе счетно-аналитические машины также серийно производились в больших количествах. В 1980 году, например, выпускались четыре модели табуляторов: Т-5М, Т-5МУ, Т-5МВ, ТА 80-1. Этими машинами оснащались машиносчетные станции, на которых и выполнялись работы по обработке статистических данных, по планированию народного хозяйства, механизированному начислению заработной платы, экономические расчеты и т. д. Счетно-аналитические машины работали достаточно быстро, обрабатывая до 400 карт в минуту, и успешно справлялись с задачами информатики своего времени.

Отметим также, что после появления быстродействующих электронных вычислительных машин программы для них и исходные данные для вычислений первоначально пробивались на перфокартах, которые потом приносили в вычислительный центр и вводили в быстродействующую машину.

Вместе со счетно-аналитическими машинами над проведением трудоемких расчетов трудились и расположенные непосредственно на рабочем месте — столе исполнителя — вычислительные полнотекстовые машины, специализированные для выписки всевозможных счетов, накладных, фактур и тому подобных документов. Вычислительные полнотекстовые машины называли еще "фактурными машинами".

Характерной особенностью фактурных машин являлась их способность записывать на одном и том же документе и текст, и числа (обычно — денежные суммы), а также производить над вводимыми числами операции сложения, вычитания и умножения. Поэтому фактурные машины имели две клавиатуры: обычную алфавитную и цифровую, а в эксплуатации одна фактурная машина заменяла работу на трех машинах: пишущей, суммирующей и вычислительной, выполняющей умножение (рис. 11.2). Габариты машины: 790 × 520 × 960 мм, вес — 90 кг.

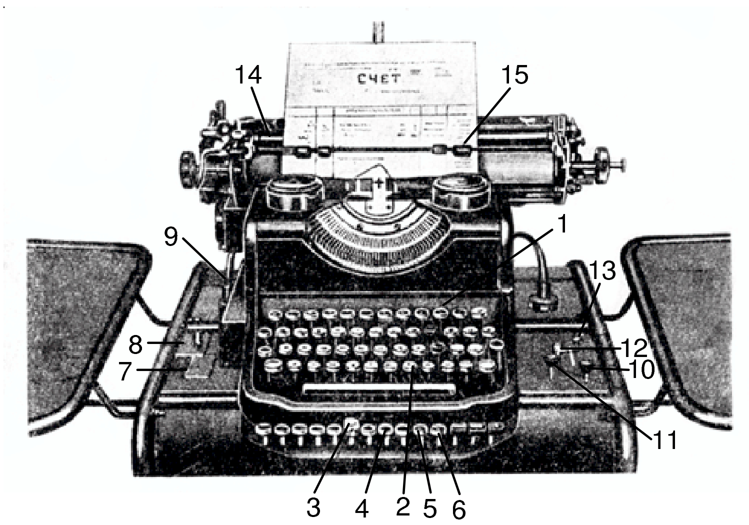


Рис. 11.2. Общий вид фактурной машины:
1 — цифровая клавиатура; 2 — клавиатура алфавита; 3 — десятичный табулятор;
4, 5 и 6 — клавиши печати итогов (промежуточного, окончательного и общей суммы);
7 и 8 — переключатель и выключатель счетчика; 9 — штепсельное соединение;
10 — клавиша вычитания; 11 — клавиша корректуры; 12 — установка запятой;
13 — главный выключатель; 14 — установка ширины поля; 15 — указатель графы счета

Еще одним интересным техническим решением второго этапа исторического развития информатики стала система долговременной памяти с быстрым доступом. Она была разработана в Лаборатории электромоделирования Академии наук СССР под руководством Л. И. Гутенмахера в 60-х годах XX века. К этому времени объем научной и технической информации, накопленной в библиотеках, стал настолько велик, что поиск нужной публикации в почти необъятном книжном и журнальном море стал очень трудным делом. Достаточно сказать, что уже к 1958 году в крупнейшей в СССР библиотеке им. В. И. Ленина насчитывалось 20 миллионов печатных изданий, и каждый год в мире издавалось около 60 миллионов страниц технической и научной литературы. Поэтому еще в те годы возникла идея создания электронных библиотек с быстрым, практически мгновенным, доступом к нужной информации. Реализация этой идеи в 1960 году была далеко не простым делом.

Единственным емким носителем информации с относительно быстрым доступом к ней в начале 60-х годов XX века были магнитные ленты. В одной кассете можно было хранить ленту длиной 720 метров, содержащую 80 миллионов битов информации. Но среднее время доступа к этой информации определялось временем перемотки ленты и составляло примерно шесть минут, что было, конечно, слишком много.

В Лаборатории электромоделирования АН СССР была выдвинута идея емкостной памяти с быстрым доступом. Эту идею поясняет рис. 11.3: если подавать короткие импульсы напряжения на обмотки трансформаторов T_1; T_2; … T_5, то на шины B_1; B_2; … B_5 эти импульсы пройдут там, где есть соединяющие их конденсаторы C, и не пройдут там, где конденсаторов нет.

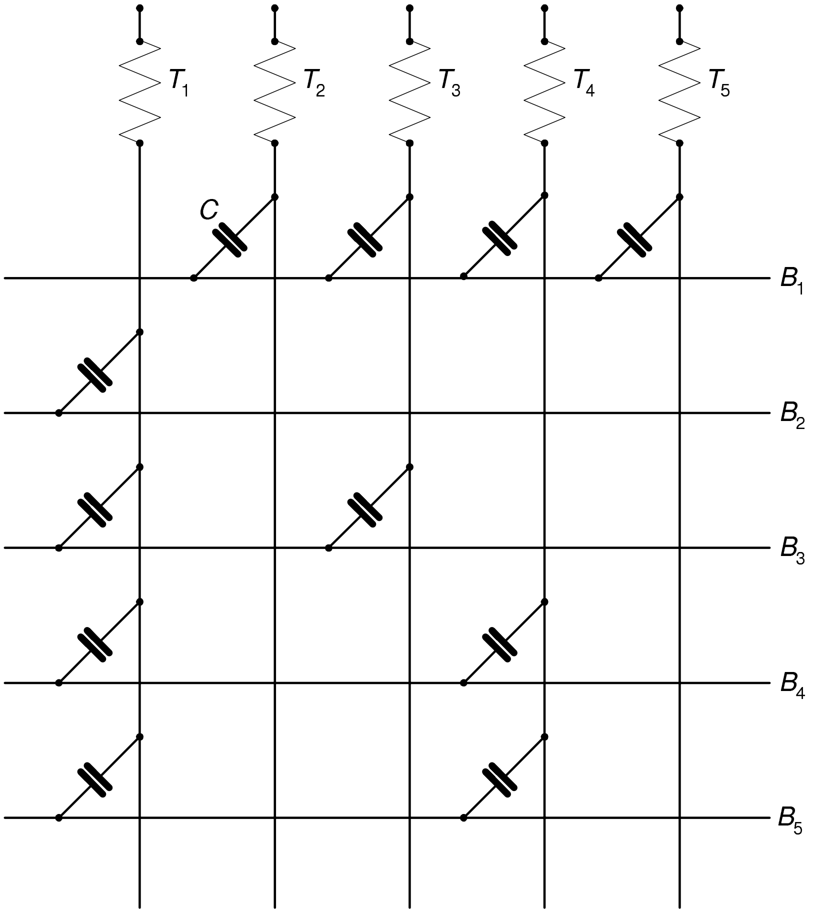


Рис. 11.3. Схема емкостной памяти с быстрым доступом

В Лаборатории электромоделирования предложили реализовать конденсаторы в виде участков напыленного металла на очень тонких бумажных листах, а затем с помощью обычного перфоратора убирать те конденсаторы, которые соответствовали нулям двоичного текста записи. Далее эти листы с уже записанным с помощью перфоратора текстом складывались и прессовались. Получались компактные "пакеты", похожие на книги с очень красивым серебристого цвета обрезом. Эти "книги" показаны на рис. 11.4. Под готовой "книгой" разложены для показа сами металлизированные листы, из которых подобные "книги" собираются, а слева показана одна из книг, в которой для наглядности сделан вырез для лучшей видимости считывающих шин.

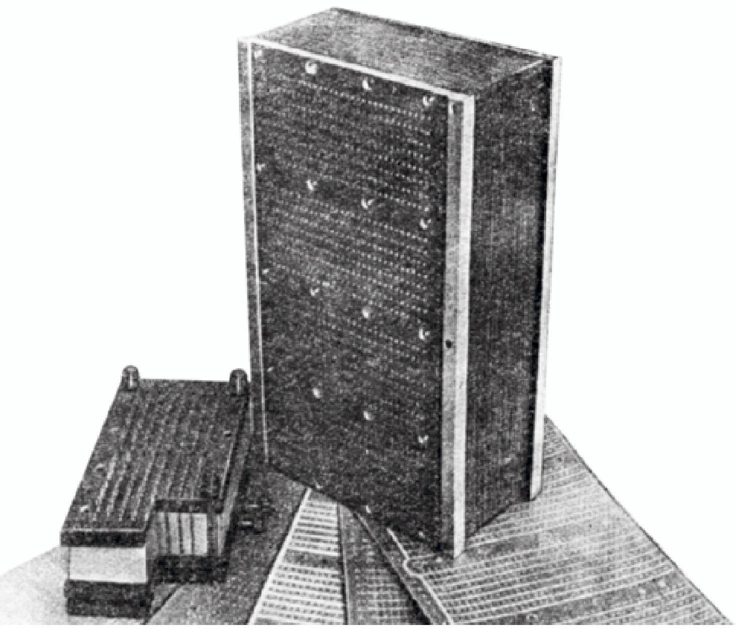


Рис. 11.4. Электронная "книга"
на емкостной памяти с мгновенным доступом

Из подобных "книг" можно было формировать целые электронные библиотеки с практически мгновенным доступом к информации — достаточно было набрать двоичный код интересующей тебя статьи.

Электронная библиотека с мгновенным доступом, сформированная из "электронных книг", была, как уже упоминалось, создана в Лаборатории электромоделирования АН СССР в 1960 году, работала исправно, неоднократно демонстрировалась всем желающим, но в массовое промышленное и серийное производство не пошла.

Причины очень слабой восприимчивости промышленности Советского Союза к изготовлению новых технических устройств, предназначенных для массового гражданского (не военного) применения, была раскрыта в *главе 10* при описании трудного "внедрения" в производство машины "Нева". Сложности и многочисленные отказы предприятий, лежащие на четырехлетнем пути машины "Нева" к первому серийному экземпляру, были типичны. А счастливый конец эпопеи "внедрения" и массовый выпуск машины "Нева" были как раз не типичными, случайными, "Неве" просто повезло. Системы очень быстрого доступа к большой памяти, разработанной в Лаборатории электромоделирования АН СССР, такое редкое "везение" не коснулось. Она осталась (как и многие другие) не завершенной, не получившей применения разработкой.

А потом, после появления лазерной записи на дисках и создания сети Интернет разработки Лаборатории электромоделирования (как и следовало ожидать) потеряли актуальность и были забыты.

11.3. Исследования в области теории информации

Быстрое развитие технических средств распространения информации — особенно телефона и радио — требовало создания теоретической базы информатики. Теоретическая и философская база информатики получила название теории информации. Существенный вклад в формирование основ теории информации внесли ученые Советского Союза и России: М. А. Бонч-Бруевич (1888—1940), В. А. Котельников[16] (1908—2005), А. А. Харкевич (1904—1965), А. И. Берг (1893—1980) Н. Д. Папалекси (1880—1947) и многие другие.

Одним из важнейших вопросов создаваемой теории был вопрос о количественной мере информации. Еще в 1928 году американский исследователь Р. Хартли (R. Hartley) в работе [3] привел доводы в пользу логарифмической меры. Он указал, что из n телеграфных знаков (точек и тире) можно составить 2^n возможных сообщений, но время передачи такого сообщения пропорционально его длине, т. е. двоичному логарифму от числа возможных сообщений. Число возможных сообщений $N = 2^n$ возрастает экспоненциально с ростом n, что не позволяет выбрать само число N в качестве меры количества передаваемой информации, и в качестве такой меры Хартли предложил логарифм:

$$I = \log N, \tag{1}$$

где I — количество информации. Логарифм в формуле (1) можно брать по любому основанию, но удобнее его брать по основанию два, потому что тогда в простейшем сообщении, для которого возможны два значения (т. е. точка или тире, да или нет) количество информации будет равно $\log_2 2 = 1$. Эту единицу информации назвали битом.

Определение Хартли пригодно и для сообщений, состоящих из последовательности любого числа символов. Так, если сообщение передается буквенным алфавитом с числом букв 32, то число различных слов, которые можно составить из четырех букв, будет равно $32^4 = (2^5)^4 = 2^{20} = 1\ 048\ 576$, а количество информации, содержащейся в одном четырехбуквенном слове: $I = \log_2 2^{20} = 20$ битов.

В общем случае, когда алфавит состоит из m символов, то число возможных сообщений длиной n символов будет равно $N = m^n$, а количество информации I в одном сообщении:

$$I = \log m^n = n \log m. \qquad (2)$$

Количество информации можно определить и по-другому. Если число возможных сообщений равно N, то вероятность того, что придет именно данное сообщение, равна $1/N$. Тогда можно определить количество информации как логарифм (с обратным знаком) вероятности сообщения, т. е.

$$I = -\log 1/N. \qquad (3)$$

Это определение совпадает с предыдущим, поскольку $-\log 1/N = \log N$.

Следующий очень важный шаг в разработке основ теории информации сделал в 1948 году выдающийся американский инженер и математик Клод Шеннон (C. Shannon, род. в 1916 г.). В статье [5] К. Шеннон отметил, что в сообщении — на английском, на русском, на любом другом языке — вероятности появления любой буквы не одинаковы. Если искусственно составить случайную последовательность из равновероятных русских букв, то мы получим последовательность типа

`фюнащрщцжы,` (4)

совершенно невозможную в реальном русском тексте. Если же составить случайную последовательность из русских букв в соответствии с вероятностями их встречаемости, то получим последовательность типа

`ивядмаоад.` (5)

Последовательность (5) уже немного больше похожа на русский текст, хотя в ней еще не учтены более тонкие связи между буквами в русском языке.

С их учетом получается последовательность типа:

`с воздрунателыб которогенял меслотогем,` (6)

уже достаточно похожая на реальные русские тексты.

Учет вероятностей символов позволил Шеннону получить более точную формулу для количества информации в реальных сообщениях. Приведем наиболее простой вывод знаменитой формулы Шеннона (в работе [5] она выводилась гораздо сложней). Пусть в некотором алфавите имеется m символов, и вероятность каждого символа равна p_i, где $i = 1, 2, \ldots, m$. Вероятность сообщения, составленного из n символов, равна:

$$P = p_1 p_2 \ldots p_n \tag{7}$$

(всего n множителей). Если каждый i-й символ встречается в сообщении n_i раз, то:

$$P = p_1^{\,n_1} p_2^{\,n_2} \ldots p_m^{\,n_m} \tag{8}$$

(в формуле (8) число множителей равно m). При достаточно длинном сообщении любой i-й символ встретится $n_i = p_i n$ раз — т. е. n_i равно общему числу символов n, умноженному на вероятность каждого символа. Следовательно, формулу (8) можно переписать в виде:

$$P = p_1^{\,np_1} p_2^{\,np_2} \ldots p_m^{\,np_m}, \tag{9}$$

и поэтому количество информации в сообщении будет равно:

$$I = -\log p = -n \sum_{i=1}^{m} p_i \log p_i, \tag{10}$$

а количество информации на один символ определится формулой:

$$I = -\sum_{i=1}^{m} p_i \log p_i. \tag{11}$$

Формулы (10) и (11) носят название формул Шеннона. Они являются обобщением формулы Хартли (2). Действительно, если все символы равновероятны, т. е. все $p_i = \frac{1}{m}$, то формула (10) при $p_i = \frac{1}{m}$ переходит в:

$$I = -n \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{m} \log \frac{1}{m} = n \log m,$$

а это и есть формула Хартли (2).

Величину:

$$H = \sum p_i \log p_i \tag{12}$$

К. Шеннон в работе [5] назвал "энтропией" множества вероятностей p_1; $p_2 \ldots p_n$ — назвал просто по аналогии с похожей на нее формулой Больцмана для энтропии идеального газа.

Практический смысл формул Шеннона заключался в том, что они позволили разработать коды, примерно вдвое сокращавшие время передачи сообщений. Действительно, анализ частот появления различных букв в русских текстах показал, что одна буква несет с собой не пять битов информации (как это было бы в тексте, где все 32 буквы равновероятны), а примерно в два раза меньше, что дало возможность создать экономные коды и увеличить пропускную способность каналов связи и информатики. Однако надо сразу отметить, что исследования Хартли и Шеннона относятся лишь к теории связи.

Фактически определение количества информации, данное Хартли, предполагает, что получатель информации является "идеальным приемником", для которого любая комбинация символов различима и имеет смысл. Определение количества информации, данное Шенноном, предполагает "несколько менее идеального" получателя, для которого различима и имеет смысл лишь каждая комбинация символов, отвечающая законам языка, на котором передается сообщение, и соответствующая вероятностям появления символов и их сочетаний.

Понятно, что реальные получатели информации совсем не являются "идеальными приемниками". Это предопределило неизбежную ограниченность классической теории информации К. Шеннона, формулы которой дают, как правило, очень завышенные оценки для реально получаемой информации.

Рассмотрим в качестве примера, приводившегося ранее в [6], отца, с нетерпением ожидающего из родильного дома известия о том, кто родился — мальчик или девочка. Для него в четырнадцатибуквенном сообщении: "родился мальчик" содержится один бит информации. В то же время, по формуле Хартли в нем содержится $14 \times 5 = 70$ битов информации, а по формуле К. Шеннона — примерно в два раза меньше, т. е. примерно 35 битов.

Этот простой пример лишний раз подчеркивает, что представления классической теории связи чаще всего далеки от реальных целей обмена сообщениями между людьми, и поэтому не удивительно, что и после публикации Шеннона исследования в области теории информации продолжались в самых различных направлениях.

Так, А. А. Харкевич и М. М. Бонгард (работы [7] и [8]) рассмотрели тот случай, когда передача и получение информации используются для достижения какой-либо цели, для повышения эффективности некоторой операции.

М. М. Бонгард предложил информацию, помогающую достижению цели, называть полезной информацией, и ее количество оценивать по приращению целевой функции, достигаемой вследствие получения информации. В практической жизни цели, для достижения которых используется информация, могут быть самыми разными, и поэтому полезная информация неизбежно будет распадаться на несколько подвидов. Вот наиболее известный и в 60-х годах XX века неоднократно обсуждаемый пример, приведенный в [8] на стр. 141—143.

Некто *X* хочет застать сотрудника *Y* в учреждении, открытом с 10 до 18 часов. Сотрудник *Y* бывает в учреждении по 2 часа ежедневно. Желая уточнить эти сведения, *X* обратился к знакомому и узнал от него, что *Y* бывает после 14 часов в два раза чаще, чем до 14. После этого *X* позвонил секретарю и услышал: "Товарищ *Y* принимает пять раз в неделю с 12 до 14 и один раз в неделю с 14 до 16. Ой, простите, я ошиблась, один раз он принимает с 12 до 14 и пять раз — с 14 до 16". Последний ответ секретаря уже соответствовал действительности.

После этого М. М. Бонгард поставил вопрос: какую полезную информацию *X* получил по интересующему его вопросу:

1. Из ответа знакомого?
2. Из ответа секретаря?
3. Получил бы из ответа секретаря, если бы она не исправила ошибки?

Для ответа на эти вопросы вероятности застать сотрудника *Y* на рабочем месте сведены в таблицу (табл. 11.1).

Таблица 11.1. *Вероятности застать сотрудника Y на рабочем месте*

Часы	**10—12**	**12—14**	**14—16**	**16—18**
Истинное распределение вероятностей	0	$^1/_6$	$^5/_6$	0
Начальная гипотеза	$^1/_4$	$^1/_4$	$^1/_4$	$^1/_4$
Гипотеза после ответа знакомого	$^1/_6$	$^1/_6$	$^1/_3$	$^1/_3$
Гипотеза после ответа секретаря	0	$^1/_6$	$^5/_6$	0
Гипотеза после ошибочного ответа секретаря	0	$^5/_6$	$^1/_6$	0

Если выражать вероятности и связанную с ними неопределенность в логарифмической мере, в логарифмах по основанию два, то получатся следующие соотношения , приведенные впервые в [8]:

- начальная неопределенность, соответствующая начальной гипотезе об одинаковой вероятности застать каждый день:

$$N_0 = -\log_2 \frac{1}{4} = 2; \tag{13}$$

- ❐ неопределенность после ответа знакомого:

$$N_1 = -\frac{1}{6}\log_2 \frac{1}{6} - \frac{5}{6}\log_2 \frac{1}{3} \approx 1{,}75; \tag{14}$$

- ❐ неопределенность после ответа секретаря:

$$N_2 = -\frac{1}{6}\log_2 \frac{1}{6} - \frac{5}{6}\log_2 \frac{5}{6} \approx 0{,}65; \tag{15}$$

- ❐ если бы секретарь не исправила ошибки, то была бы неопределенность:

$$N_3 = -\frac{1}{6}\log_2 \frac{5}{6} - \frac{5}{6}\log_2 \frac{1}{6} \approx 2{,}2. \tag{16}$$

Таким образом, полезная информация, полученная из ответа знакомого:

$$I_{n1} = N_0 - N_1 \approx 0{,}25. \tag{17}$$

Ответ секретаря содержал полезную информацию:

$$I_{n2} = N_1 - N_2 \approx 1{,}1. \tag{18}$$

Если бы тот же самый разговор с секретарем произошел до ответа знакомого, то он содержал бы $N_0 - N_2 = 1{,}35$ бита полезной информации. Ошибочный ответ секретаря нес полезную информацию:

$$I_{n3} = N_1 - N_3 = -0{,}45. \tag{19}$$

В данном случае полезная информация имеет отрицательный знак, она является дезинформацией, поскольку затрудняет решение задачи — встречу с нужным лицом.

Этот простой пример (который в 60-х годах XX века многократно обсуждался) сразу выявляет основные черты "полезной информации":

- ❐ она может быть не только положительной, но и отрицательной величиной (в то время как информация в теории связи, измеряемая "по Шеннону", всегда положительна);
- ❐ она зависит от свойств приемника, в частности, от той информации, которой получатель уже располагал до прихода нового сообщения.

Введение понятия "полезной информации" позволяет сразу разрешить парадокс о количестве информации в четырнадцатибуквенном сообщении из родильного дома: "родился мальчик". Для отца — это полезная информация, устраняющая неопределенность, количество ее ("по Бонгарду") равно одному биту, а не 35 битам, как получилось бы "по Шеннону", и не 70 битам — "по Хартли". Точно так же получили разрешение и многие другие парадоксы.

Таким образом, исследования М. М. Бонгарда позволили сделать крупный шаг в понимании информации и информационных процессов. К сожалению, после безвременной кончины М. М. Бонгарда они не были продолжены.

Однако и понятие "полезной информации" далеко не исчерпывает всего разнообразия встречающихся на практике различных информационных процессов и различных видов информации. В частности, нередки случаи, когда получаемая информация совсем не предназначена для какой-либо определенной цели, а просто расширяет объем знаний, сведений получателя информации, причем может быть совершенно неизвестно, когда и как эта информация будет использована.

В этих случаях мы имеем дело с еще одним видом информации, отличным как от статистической информации К. Шеннона, так и от "полезной информации" М. М. Бонгарда. Изучением этого вида информации занимался Ю. А. Шрейдер [9], который предложил называть информацию, "запасаемую впрок", смысловой (или семантической) информацией — в переводе с греческого "семантический" как раз и означает "смысловой".

Ю. А. Шрейдер обратил внимание на то, что для выживания любого живого существа в нем должен быть накоплен достаточно богатый запас соответствий между сигналами от внешней среды (запах хищника, запах добычи) и правильными, целесообразными действиями в этих ситуациях.

У человека, в человеческом обществе, запас таких соответствий должен быть гораздо богаче. Первоначальный (и меняющийся в ходе получения смысловой информации) запас соответствий можно представить себе как некоторый обобщенный словарь или справочник, который Ю. А. Шрейдер предложил назвать "тезаурусом" (от греческого слова "тезаурос" — сокровище; в словарной практике тезаурусами называют словари, в которых даны не только значения слов, но и связи между ними). Главной характеристикой смысловой информации, ее главной особенностью является то, что она изменяет тезаурус, изменяет запас соответствий между различными понятиями, или между понятием и правильным действием.

В качестве меры количества смысловой информации естественно взять изменение тезауруса получателя под действием поступившей к нему информации. К сожалению, методы и формулы для вычисления количества смысловой информации, предложенные за время, протекшее после публикации [9], оказались слишком сложными и взаимно противоречивыми. Однако качественные соображения, относящиеся к смысловой информации, уже сами по себе представляют большой интерес. Они были развиты, например, Е. С. Вентцель в публикации [10]. Там указывалось, что если, например, поступившее сообщение не внесло ничего нового в тезаурус получателя, то количество смысловой информации в нем естественно считать равным нулю. Из двух сообщений, одно из которых почти не меняет тезауруса, а второе существенно меняет его естественно считать, что второе несет большее количество смысловой информации. Кроме того, нужно учитывать, что для восприятия сообщения тезаурус получателя должен иметь какой-то уровень развития, както пересекаться с сообщением — иначе воспринятая информация будет равна нулю. Зависимость смысловой информации, содержащейся в некотором сообщении, от степени развития тезауруса получателя Е. С. Вентцель предложила изобразить кривой с максимумом, показанной на рис. 11.5, и привела простой пример: учебник по высшей математике для трехлетнего ребенка несет нулевую информацию. Школьнику старших классов он уже даст коечто. Максимальную информацию извлечет из него студент того курса, для которого учебник предназначен. По мере дальнейшего развития тезауруса информация начнет убывать: получатель будет узнавать все меньше нового. В пределе для очень богатого тезауруса сообщение становится тривиальным и новой информации не несет, количество полученной смысловой информации равно нулю.

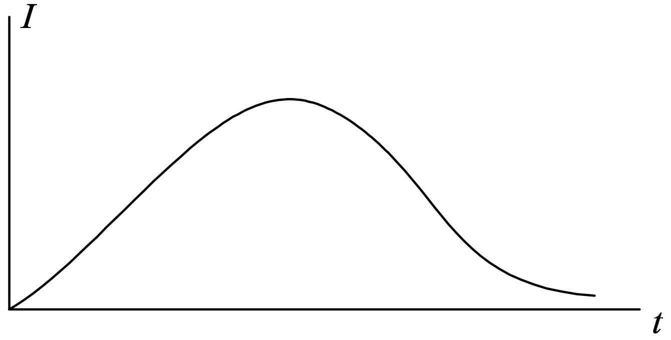


Рис. 11.5. Зависимость смысловой информации, содержащейся в некотором сообщении, от степени развития тезауруса получателя

В другом предельном случае, когда сообщение усваивается получателем полностью, до последней буквы, количество смысловой информации в нем можно вычислять по формуле для статистической информации теории связи, по формуле К. Шеннона (10). Во всех других случаях смысловая информация много меньше статистической.

Самой существенной особенностью смысловой и целевой информации является то, что они существенно зависят от свойств получателя. Одно и то же сообщение может нести для различных получателей самую разную информацию, и если статистическая информация теории связи, информация "по Шеннону", не зависит от свойств получателя, то это происходит лишь потому, что в определение информации, изучаемой в теории связи, неявно входит "идеальный получатель", для которого каждая комбинация кодовых символов различима и имеет смысл.

Поскольку еще в 60-х годах XX века стало явным существование различных видов и форм информации, то в работе [6] было предложено определить само понятие "информация" как меру взаимодействия между материальными системами (в частном случае — между людьми). А поскольку цели и формы взаимодействия могут быть различными, то понятным становится существование статистической, целевой, смысловой информации, которыми, конечно, количество различных видов информации не исчерпывается. Так, например, в [6] рассмотрены особенности и методы вычисления количества управляющей (командной) информации.

Работы [8, 9] помогли разрешить многие парадоксы, накопившиеся при попытках использовать статистическую информацию "по Шеннону" для анализа художественной литературы. Так, например, в работе [11] и многих других сравнивалась энтропия распределения вероятностей появления различных букв и слов в художественной прозе и в "штампованной" газетной речи того времени с ее однообразным языком, где по началу фразы можно предсказать ее конец. Поскольку непредсказуемость, а значит, и энтропия распределения вероятностей в художественной прозе выше, чем у газетной речи, то делался вывод: информации в художественной прозе больше, чем в равном по размеру отрывке газетной речи. Этот вывод вполне соответствует интуитивным представлениям и оценкам, что и приводило к заключению о применимости понятий классической теории связи и формул Шеннона к литературным произведениям.

Однако внимательные исследователи продолжили анализ, проведенный, в частности, в работе [11] и ей подобных, и быстро обнаружили, что наибольшей энтропией распределения вероятностей обладает не художественная проза, а случайная бессистемная последовательность букв. Приходилось с удивлением признать, что наибольшую информацию (на единицу длины текста) несет в себе текст, лишенный всякого смысла. Заметим, что с точки зрения теории связи этот вывод верен, поскольку передавать по каналам связи бессмысленный текст труднее, чем осмысленный, и в нем труднее исправить случайные ошибки. Но этот верный вывод лишний раз подчеркнул полную бесперспективность применения понятий теории связи к анализу языка и художественной литературы.

Действительно, вычисляя количество информации в литературном тексте по формулам Шеннона, мы фактически вычисляем меру взаимодействия между этим текстом и "идеализированным приемником", для которого любая последовательность букв, удовлетворяющая частотным характеристикам языка, заслуживает одинакового внимания.

Совершенно очевидно, что реальный читатель совсем не является таким "идеализированным приемником" (приближается к подобному идеалу разве только гоголевский Петрушка), и поэтому попытки применить концепции теории связи к области литературы с самого начала не могли не быть бесплодными. Заметим, что опытный литературовед, профессор Л. И. Тимофеев (автор известной книги "Теория литературы") еще в 1963 году в публикации [12] доказал бесплодность подобных попыток, но они все равно еще не раз повторялись.

На опасность расширительного толкования "модных" понятий указывал и сам К. Шеннон еще в 1956 году (публикация [5], стр. 667). "Теория информации, — писал он, — как модный опьяняющий напиток кружит головы всем вокруг. Для тех, кто работает в области теории информации, такая широкая популярность приятна, но она настораживает. Сознавая, что теория информации является сильным средством решения проблем связи, нельзя забывать, что она не является панацеей даже для инженера-связиста, и уж тем более — для представителей всех других специальностей. Очень редко удается открыть одновременно несколько тайн природы одним и тем же ключом".

Так что предостережений было не мало, но, тем не менее, попытки упрощенных решений сложных вопросов с помощью таких "модных" понятий, как "информация" и "энтропия", возникали снова и снова (особенно в 60-е и 70-е годы XX века). В этом отношении наука подобна саду — плодоносящее дерево вырастить трудно, а сорняки (как и заблуждения) вырастают сами, и даже борьба с ними не всегда приводит к успеху.

Путь к пониманию законов поэзии, законов художественного творчества открылся позже, после публикаций [8, 9, 10] о смысловой информации и о взаимодействии тезаурусов. Стало ясно, что у человека может существовать (но может и не существовать!) тезаурус эстетических впечатлений, тезаурус чувств, и что поэзия, художественная литература, взаимодействуют именно с этим тезаурусом — взаимодействуют по законам, самый простейший из которых отражен на рис. 11.5.

Очень жаль, что публикации [9] и [10] не получили дальнейшего развития. Некоторые дополнительные соображения были позже приведены в [6] .

Еще одним важным направлением исследований, в котором переплелись интересы теории связи и теории управления, информатики и кибернетики, стало исследование случайных функций. Действительно, если записать напряжение на выходе телеграфного аппарата, то мы получим типичную "случайную функцию времени", показанную на рис. 11.6. Эта функция принимает значения $\varphi(t) = \pm 1$, а переход от значения $\varphi(t) = +1$ к значению $\varphi(t) = -1$ происходит случайно, причем вероятность перемены знака подчинена закону Пуассона с параметром μ. Это означает, что вероятность того, что за время τ не произойдет ни одной перемены знака, равна $P_0 = e^{-\mu\tau}$, а вероятность ровно n перемен знака равна

$$P_n = \frac{(\mu\tau)^n}{n!} e^{-\mu\tau}. \tag{20}$$

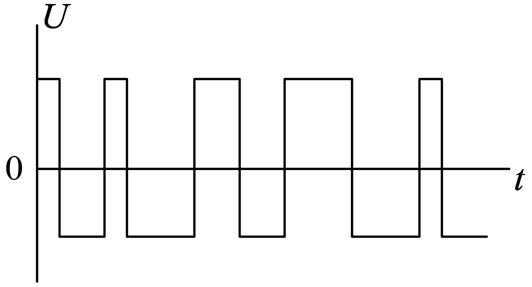


Рис. 11.6. Напряжение на выходе телеграфного аппарата ("случайная функция времени")

Случайную функцию времени с такими свойствами называют "телеграфным сигналом", что подчеркивает ее происхождение. Напряжение в телефонном сигнале также является случайной функцией времени, типичный вид которой показан на рис. 11.7 (масштаб времени здесь совсем другой, чем на рис. 11.6).

Случайными функциями времени являются погрешности в измерительной информации, получаемой с разных измерительных приборов.

В задачах управления также приходится иметь дело со случайными функциями; различные возмущающие воздействия на объекты управления (на корабль, на самолет) чаще всего являются случайными, погрешности измерительных приборов, измеряющих положение объекта управления, также случайны.

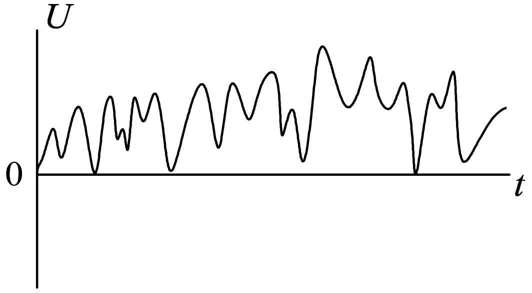


Рис. 11.7. Напряжение в телефонном сигнале

Поэтому исследование случайных функций (и случайных процессов) шло как в интересах информатики, так и в интересах теории управления (кибернетики).

Первоначально главную роль играла задача управления (кибернетики). Первые результаты в области случайных временных рядов были изложены Норбертом Винером (N. Wiener, 1894—1964) в его известной книге [13], вышедшей в 1948 году. В дальнейшем эти результаты, как и многие последующие, использовались и для целей информатики (работы [14, 15, 16, 17]).

Отметим интересную особенность: информация о возмущающих воздействиях, используемая в системах управления, является, безусловно, целевой информацией, поскольку используется для вполне определенной цели — уменьшения отклонения объекта управления от заданной траектории движения. Однако количество информации в этом случае рассчитывается совсем не так как в примерах, рассмотренных М. М. Бонгардом в [8]. Для линейных устойчивых объектов управления полезной информацией является информация о корреляционной функции $K_\varphi(\tau)$ внешнего воздействия $\varphi(t)$ — т. е. о функции, определяемой через интеграл:

$$K_\varphi(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{0} \varphi(t)\varphi(t+\tau)dt. \tag{21}$$

Более подробно о корреляционной функции и о той роли, которую она сыграла при расчете систем управления и других технических объектов, будет рассказано в *главе 13*.

Дополнительная информация о возмущающем воздействии сверх функции (21) уже бесполезна и не может улучшить значение целевой функции. Это своеобразное обстоятельство лишний раз подчеркивает трудности использования понятия "информация" в теории управления. О разрешении ряда трудностей было рассказано в [6], стр. 75—79. Отметим, что исследования по информатике и управлению долгое время шли вместе, их объединяли (часто вместе с вычислительной техникой) в одну науку — кибернетику, которая в 1975 году в известной "Энциклопедии кибернетики" [45] определялась как "наука об общих законах получения, хранения и преобразования информации в сложных управляемых системах". Кстати, и само слово "кибернетика" было произведено от греческого "кибернетес", которое в переводе на русский язык близко по значению к слову "кормчий" (тот, кто управляет движением корабля).

Начиная с 60-х и, примерно, до 80-х годов XX века, слово "кибернетика" было модным и употреблялось очень широко. Затем "мода" переменилась, модным стало слово "информатика". В результате термин "кибернетика" постепенно стал употребляться все реже и реже, а термин "информатика" — все чаще и чаще. Однако от этого тесная связь между информатикой и управлением отнюдь не стала менее тесной (так, например, в Московском государственном техническом университете им. Н. Э. Баумана работает большой факультет "Информатика и системы управления").

История исследований по информатике, смежных с управлением, рассмотрена более подробно в *главе 13*.

11.4. Философские вопросы информатики

Помимо конкретных рекомендаций по лучшей передаче сообщений, исследования в области информатики позволили глубже разобраться в ряде общенаучных, философских вопросов.

Обнаружилось, что информация является одним из важнейший понятий науки — не менее важным, чем понятия "материя", "энергия". Действительно, основное содержание процессов и явлений в окружающем нас мире — это процессы взаимодействия между различными материальными системами. В XVII—XIX веках физики смогли разобраться во многих процессах с помощью введенных ими таких важных понятий как количество движения mv, кинетическая энергия $\frac{m}{2}v^2$, количество тепла Q и т. д.

Однако существует очень много взаимодействий, для анализа которых понятий физики недостаточно. Уже результат разговора двух собеседников очень мало зависит от громкости, от энергии их речи. Он зависит от ее содержания, от ее смысла, от информации, заключенной в ней.

И точно так же обстоит дело в огромном количестве других сигнальных, информационных взаимодействий между материальными системами, в том числе — между людьми.

Для понимания всех этих взаимодействий недостаточны понятия физики. Необходимо использовать понятийный аппарат информатики и прежде всего — понятие "информация", которое оказывается не менее важным и значимым, чем понятия "материя", "энергия". Подробно тому, как существуют различные виды энергии — кинетическая, потенциальная, механическая, электрическая и т. д. — точно так же существуют и различные виды информации — статистическая информация теории связи, целевая, смысловая, управляющая и многие другие виды и формы информации, пока еще до конца не исследованные.

Исследования в области теории информации помогли решить и некоторые важные вопросы физики. Так, например, еще в XIX веке был установлен важнейший физический закон — второе начало термодинамики. Первое начало термодинамики — это закон сохранения энергии, второе начало — это закон возрастания энтропии. Согласно ему, все процессы в природе протекают в определенном направлении, протекают так, что суммарная энтропия участвующих во взаимодействии систем может только возрасти.

Для тепловых процессов изменение энтропии ΔS равно изменению количества тепла ΔQ, деленному на абсолютную температуру T, при которой это изменение произошло, т. е.:

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}. \tag{22}$$

Если приведены в соприкосновение два тела (или два объема газа) с температурами T_1 и T_2, причем $T_1 > T_2$, то при переходе тепла ΔQ от горячего тела к холодному горячее тело теряет энтропию:

$$\Delta S_1 = \frac{\Delta Q}{T_1}, \tag{23}$$

холодное тело приобретает энтропию:

$$\Delta S_2 = \frac{\Delta Q}{T_2}, \tag{24}$$

и результирующее изменение энтропии:

$$\Delta S_2 - \Delta S_1 = \Delta Q\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right) \tag{25}$$

оказывается положительным, поскольку $T_1 > T_2$, поэтому суммарная энтропия возрастает. Если бы тепло переходило от холодного тела к горячему, то суммарная энтропия уменьшилась бы. Но это противоречит второму началу термодинамики и реально не происходит. Таким образом, именно второе начало термодинамики определяет направленность происходящих в природе процессов.

Все это было установлено Р. Клаузисом (Clausius R., 1822—1888), У. Томсоном (Thomson, 1824—1907) и другими учеными еще в середине XIX века. Однако несколько позже, в 1871 году, великий английский физик Дж. К. Максвелл (Maxwell, 1831—1879) поставил интересный мысленный эксперимент, который потом приобрел большую известность под названием "демон Максвелла". Максвелл предложил представить себе два замкнутых объема газа с одинаковой температурой, которые сообщаются между собой только через небольшое отверстие, закрытое дверцей, около которой сидит гипотетическое существо, которое Максвелл назвал "демоном", и предложил допустить, что этот "демон" способен видеть отдельные молекулы газа и различать их скорости. Предположим теперь, — говорил Максвелл, — что "демон" открывает дверцу тогда, когда быстрая (т. е. — "горячая") молекула летит из левого сосуда в правый, или когда медленная ("холодная") молекула летит из правого сосуда в левый, а в остальных случаях держит дверцу закрытой. Понятно, что в результате работы "демона" в правом сосуде соберутся "горячие" молекулы, в левом — "холодные", суммарная энтропия обоих сосудов уменьшится, второе начало термодинамики окажется нарушенным.

Хотя эксперимент Максвелла был мысленным, вытекающее из него возможное нарушение второго начала термодинамики требовало объяснения, которое было дано далеко не сразу. Полное объяснение было дано уже с позиции теории информации. Действительно, для того чтобы сортировать быстрые и медленные молекулы, "демон Максвелла" должен был получить информацию о величине и направлении скорости молекулы, подлетающей к дверце, которой он управляет.

Но всякое получение информации — это материальный процесс информационного взаимодействия, и он должен — как и всякий материальный процесс — сопровождаться увеличением энтропии. Количественный анализ, проведенный, например, в [18], показал, что приращение энтропии, происходящее при измерении скорости одной молекулы, превосходит (по абсолютной величине) уменьшение энтропии, происходящее от направления быстрой молекулы в правый сосуд.

Таким образом, даже "демон", способный измерить скорость каждой молекулы, не смог бы нарушить второе начало термодинамики. Теория информации позволила полностью объяснить мысленный эксперимент Максвелла.

Однако в дальнейшем теория информации пошла во многом по неверному пути, когда многие ученые стали отождествлять информацию с "отрицательной энтропией" или "негэнтропией". Начало положил Н. Винер, который в своей известной книге [13] писал: "Как количество информации в системе есть мера организованности системы, точно так же энтропия системы есть мера ее дезорганизованности, одно равно другому, взятому с обратным знаком" ([13], стр. 23 русского перевода).

Аналогичные утверждения высказывались в [18, 19] и во многих других книгах и статьях — так, в [19] утверждалось: "энтропия понимается как мера вероятности состояния, мера дезориентации элементов, мера хаоса. Информация понимается как мера особенности состояния, мера упорядочения, порядка".

Все эти и им подобные утверждения являются ошибочными, и поэтому они принесли немало вреда кибернетике и информатике.

На самом деле энтропия не является "мерой дезорганизации, мерой беспорядка и хаоса", а информация совсем не является мерой упорядоченности, мерой организованности, порядка.

История науки — это не только история открытий и достижений, это еще и история ошибок и заблуждений. Поэтому очень важно понять и интересно проследить — как возникают и прочно укореняются научные ошибки и заблуждения, каким образом в истории науки (и в истории информатики, в частности) рождаются и быстро развиваются ошибочные представления.

Нужно помнить, что рассеять заблуждения — не просто, а вреда они приносят много.

Представление об энтропии как о мере беспорядка возникло из неправильного, чрезмерно упрощенного понимания второго начала термодинамики. Дело в том, что достаточно сложное понятие энтропии иллюстрируют, как правило, на примере "идеального газа" — т. е. газа, состоящего из молекул, между которыми не действуют никакие иные силы, кроме сил отталкивания при столкновениях. Молекулы такого газа, заключенного в сосуд, будут двигаться как идеально-упругие шары, беспрестанно сталкиваясь как друг с другом, так и со стенками сосуда. Если сосуд мысленно разделен на равные ячейки, и общее число ячеек равно Z, то теория вероятностей дает простую формулу для вычисления вероятности того, что в первой ячейке находится n_1 молекул, во второй n_2 и т. д. Вот эта формула:

$$P = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_z!} \cdot \frac{1}{z^n}, \qquad (26)$$

где n — общее число молекул в сосуде. Поскольку для больших n с очень хорошей степенью точности выполняется приближенное равенство:

$$\ln n! = n(\ln n - 1), \tag{27}$$

то формулу (26) можно записать в виде:

$$\ln p = n(\ln n - 1) - \sum_{i=1}^{z} n_i \ln n_i + \sum_{i=1}^{z} n_i - n \ln z. \tag{28}$$

Поскольку общее число молекул n и число ячеек z задано, то формулу (28) можно записать в виде:

$$\ln p = c_0 - \sum_{i=1}^{z} n_i \ln n_i, \tag{29}$$

где c_0 — постоянная.

Как легко проверить средствами дифференциального исчисления, сумма

$$\sum_{i=1}^{z} n_i \ln n_i \tag{30}$$

будет наименьшей тогда, когда все n_i равны друг другу — т. е. когда расположение молекул является наиболее неупорядоченным, без всякой выделенности, предпочтительности одной ячейки перед другой. При этом разница в вероятностях для различных значений n_i будет очень большой, особенно для большого общего числа молекул. Вот простой пример, приводившийся ранее в [6], — сравнивали два распределения тысячи молекул по двум равным ячейкам. Первое распределение: 400 молекул в одной ячейке и 600 — в другой. Второе распределение: в каждой ячейке по 500 молекул, выделенности, предпочтительности ячеек нет. Для первого распределения имеем:

$$\sum_{i=1}^{z} n_i \ln n_i = 400 \ln 400 + 600 \ln 600 = 6236{,}7. \tag{31}$$

Для второго распределения будет:

$$\sum_{i=1}^{z} n_i \ln n_i = 500 \ln 500 + 500 \ln 500 = 6214{,}6 \tag{32}$$

Разность логарифмов вероятности обоих распределений равна 22,1, а это означает, что второе распределение будет в

$$e^{22{,}1} = 3{,}6 \cdot 10^9 \tag{33}$$

раз вероятнее первого.

При такой огромной разнице в вероятностях понятно, что мы подавляющую часть времени будем наблюдать лишь вероятные распределения. Если каким-либо искусственным путем, внешней силой или перегородкой была создана большая неравномерность в числе молекул в разных ячейках, то после устранения этой причины произойдет процесс выравнивания чисел молекул, переход к вероятному состоянию. Этот процесс — как и всякий естественный процесс — сопровождается увеличением энтропии, и поэтому сама энтропия пропорциональна логарифму вероятности, т. е.

$$S = k \ln p, \tag{34}$$

где k — постоянная.

Знаменитая формула (34), как и все многочисленные важные следствия из нее, была установлена еще в 1877 году великим австрийским физиком Людвигом Больцманом (Boltzmann, 1844—1906). Эта формула была выгравирована потом на постаменте памятника, установленного в 1933 году на его могиле.

Из формулы (34) следует, что для идеального газа энтропия, действителъно, может служить мерой неупорядоченности, хаотичности. Однако Л. Больцман не ограничился, конечно, исследованием только идеального газа, на молекулы которого не действуют другие силы, кроме сил отталкивания при столкновении молекул. Он рассматривал в том числе очень большие количества молекул газа, содержащиеся, например, в газовых планетах — в Юпитере, Сатурне. При таких огромных количествах молекул становятся существенными силы всемирного тяготения между ними — и сразу наиболее вероятным распределением молекул перестает быть распределение неупорядоченное. В ячейках, расположенных ближе к центру планеты, число молекул будет больше. При удалении от центра плотность газа будет уменьшаться, подчиняясь барометрической формуле, тоже выведенной Больцманом. А внешне это будет выражаться в том, что при наблюдении в телескоп с Земли газовые планеты — Юпитер и Сатурн — будут выглядеть как почти идеальные эллипсоиды вращения.

Точно так же при учете электромагнитных сил взаимодействия между молекулами и ионами наиболее вероятным состоянием вещества, соответствующим максимуму энтропии, будет упорядоченное кристаллическое состояние, а совсем не "хаос". На рис. 11.8 показана (условно) кристаллическая решетка обычной поваренной соли, хлорида натрия.

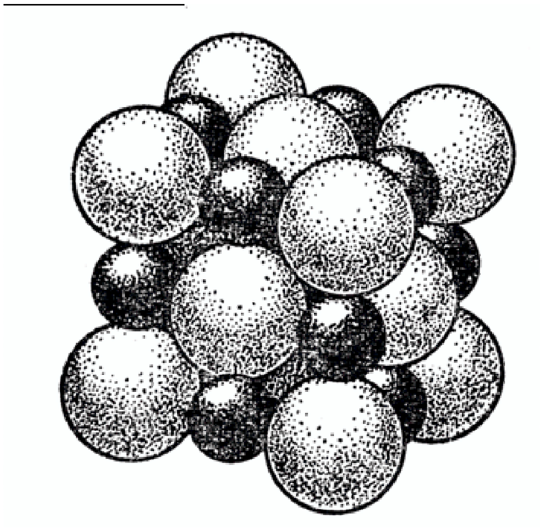


Рис. 11.8. Кристаллическая решетка хлорида натрия

Силы электромагнитного взаимодействия между положительно заряженными ионами натрия (черные шары) и отрицательно заряженными ионами хлора (белые шары) приводят к образованию почти идеально правильной кристаллической решетки, а вовсе не хаоса.

Вообще, образованные физики хорошо знают, что энтропия не является "мерой неупорядоченности". "Идеальный газ" представляет собой исключение.

Об этом говорится, например, в университетских учебниках физики [21, 22]. Однако лишь для сравнительно небольшого числа людей физика является профессией; они изучают физику по солидным курсам и знают, что энтропия не является мерой неупорядоченности. Для гораздо большего числа людей — инженеров, врачей, педагогов (и, в том числе, для специалистов по информатике) — физика является лишь необходимым элементом общего образования, и они не могут уделить ей много времени и внимания. Поэтому важное (но сложное!) понятие энтропии излагается для них в ходе преподавания на примере идеального газа, где все более или менее просто и понятно. Ну, а в дальнейшем почерпнутое на примере идеального газа представление об энтропии как о мере беспорядка незаметно закрепляется на всю жизнь, и от него уже трудно отказаться.

Так возникают и так закрепляются научные заблуждения.

А ведь они очень и очень не безобидны. Перечитайте стенограммы происходивших в 70-х и 80-х годах XX века обсуждений проектов новых больших заводов и электростанций. Здравомыслящие инженеры на таких обсуждениях часто возражали: "Проект составлен неудачно, он разрушает природу, ухудшает условия жизни работающих, проект надо переделать".

На это разработчики проекта убежденно отвечали: "А что вы хотите? Ведь согласно второму началу термодинамики любой процесс — в том числе и работа нашего завода — увеличивает энтропию, увеличивает хаос, неупорядоченность. Поэтому терпите. Впрочем, ладно, мы построим на заводе высоченные трубы, чтобы произведенные заводом энтропия и хаос распространялись бы на большую площадь, не концентрировалась бы вблизи завода. Это — сделаем, а большего — не просите, против второго начала термодинамики не пойдешь". После таких "обсуждений" заводы строили, и в результате испортили за прошедшие десятилетия и поля, и леса, и реки. А ведь все могло быть по-другому, если бы такие горе-проектировщики лучше знали науку и умели пользоваться ее достижениями (а не играть на ее заблуждениях).

Да, любая деятельность человека увеличивает энтропию Земли. Это верно. Но мы можем построить свою деятельность так, чтобы ее результатом вместе с увеличением энтропии стало и увеличение порядка, а конкретно — порядка, выгодного и удобного людям. Это не всегда легко сделать (нагадить проще), но сделать можно, и на практике уже делалось (к сожалению, не везде и не всегда).

Характерный пример — разработка полезных ископаемых (например, бурого угля) в открытых карьерах. При таких разработках приходится перемещать большие массы земли, и часто после завершения добычи угля у нерадивых хозяев на месте карьера остается нагромождение переворошенной земли, на которой ничего не растет. Бесплодную землю развевает ветер, и на месте бывших разработок на долгие годы остается безотрадный хаотический ландшафт, который иронически называют "лунным пейзажем". Однако такая порча природы совсем не является неизбежной. Если перед началом разработки карьера снять верхний слой плодородной почвы, сложить его отдельно, а потом, после завершения добычи угля, насыпать плодородную землю равномерным слоем сверху и разровнять, то в этом случае наиболее вероятным оказывается процесс быстрого восстановления растительности на насыпанном слое почвы, причем растет она даже лучше, чем на участках, не тронутых рукой человека. Такое грамотное ведение добычи еще в XX веке было введено на ряде карьеров (к сожалению, не на всех), и оно наглядно показало, что второе начало термодинамики и рост энтропии совсем не мешают росту порядка, выгодного и удобного человеку, а энтропия совсем не является мерой неупорядоченности.

Заметим, что распространенное название величины

$$H = \sum_{i=1}^{z} p_i \log p_i \qquad (35)$$

"энтропией распределения вероятностей" имеет под собой еще меньше оснований. Этот термин был введен К. Шенноном в 1948 году в работе [5], но уже редактор первого перевода работы К. Шеннона на русский язык (публикация [23]) профессор Н. А. Железнов писал в 1953 году в специальном примечании к переводу: "К. Шеннон вводит термин «энтропия» на основании чисто внешнего сходства выражения для введенной им величины H с выражением для энтропии в общепринятом в физике значении. Поскольку с понятием энтропии связано вполне определенное физическое содержание, то во избежание недоразумений в дальнейшем тексте перевода статьи Шеннона слово «энтропия» везде поставлено в кавычки. Следует иметь в виду, что в данном случае «энтропия» (в кавычках) есть не более, чем краткое название величины (35), где p_{i} — вероятность появления некоторого события i". К сожалению, все предостережения Н. А. Железнова остались "гласом вопиющего в пустыне". Кавычки вокруг слова "энтропия", введенные Н. А. Железновым, постепенно исчезли, смешение функции H с энтропией физики, а энтропии физики — с мерой неупорядоченности постепенно стали свершившимися фактами и привели к очень многим ошибочным представлениям и к ошибочным решениям.

Заблуждения возникают легко, укореняются быстро, бороться с ними надо, необходимо. Но Академия наук Советского Союза, ставшая затем Академией наук России, очень не хотела с ними бороться (да и сейчас не очень хочет). Знаю это по собственному опыту, когда попытался опубликовать в журнале "Природа", издаваемом АН СССР, статью, еще раз и на целом ряде примеров доказывающую, что энтропия не может быть мерой неупорядоченности [24]. Печатать статью не хотели и опубликовали случайно только потому, что заместителю главного редактора Д. А. Франк-Каменецкому понадобилась дискуссия об энтропии [25]. Разумеется, и к другим авторам относились так же (совсем не хочу сказать, что ко мне относились хуже, чем к другим).

Конечно, голос правды иногда возникал — так, выдержала даже не одно, а несколько изданий прекрасная книга профессора А. И. Китайгородского [26]. Там приведены предельно ясные формулировки: "Если атомы (или молекулы) находятся в тепловом движении и на них действуют силы, то наиболее вероятным распределением частиц уже не явится беспорядок". "Действие сил направлено к установлению порядка" (см. [26], стр. 166). Отсюда уже сразу следует, что переход какой-либо системы к более вероятному состоянию, сопровождаемой ростом энтропии, может увеличивать порядок, и "мерой неупорядоченности" энтропия быть не может. Но в целом борьбы с ошибочными представлениями об информации и энтропии почти не велось, они укоренились и оказали самое отрицательное влияние на развитие информатики и науки в целом, а кроме того привели к целому ряду ошибочных решений в области природопользования, нанесли большой ущерб природе России. Такова цена научных ошибок и заблуждений, лучшее лекарство от которых — знание истории науки.

11.5. "Стрела времени" и работы И. Р. Пригожина

В этом разделе мы продолжим рассказ о философских вопросах информатики и науки в целом, сосредоточив внимание на анализе публикаций лауреата Нобелевской премии И. Р. Пригожина. Эти публикации входят в число тех, знакомства с которыми требует программа кандидатского экзамена по истории и философии науки. В то же время написаны эти публикации достаточно сложно, содержат ошибочные положения и поэтому требуют комментария.

Отметим сразу, что особого комментария требуют некоторые из высказываний И. Р. Пригожина по вопросам энтропии, информации, "стрелы времени", приведенные в его работах [26, 27, 28], написанных в соавторстве с Изабеллой Стенгерс (Stengers, в некоторых русских переводах ее фамилия пишется как "Стенжерс"). Заметим, что сам Илья Романович Пригожин — по рождению москвич, родился в Москве в 1917 году, но уже в трехлетнем возрасте был увезен родителями в Бельгию, где и проработал всю жизнь, сохраняя до самой кончины глубокий интерес и внимание к российской науке.

В публикациях [26, 27, 28] Пригожин и Стенгерс утверждали, что Л. Больцман "был вынужден прийти к заключению, что необратимость, присущая второму началу термодинамики, несовместима с обратимыми законами динамики", и что это было "поражением" Больцмана, ставшим "драмой всей его жизни" ([28], стр. 96).

На самом деле Больцман и обсуждавшие вместе с ним сложную проблему необратимости его коллеги-физики: И. Лошмидт (Losthmidt, 1821—1895) и Мариан Смолуховский (Smoluchowski M., 1872—1917), математики: Анри Пуанкаре (Poincare, 1854—1912) и Эрнст Цермело (Zermelo, 1871—1953) — тщательно разобрались в проблеме необратимости и ее соотношении с законами динамики. Результаты проведенных ими исследований и обсуждений заняли прочное место в истории и философии науки — их удобно пояснить на простом примере с поведением молекул после удаления перегородки в сосуде.

Рассмотрим идеальный газ, заключенный в сосуд, разделенный на две половины перегородкой: в левой половине — газ, в правой — пустота. Все это показано на рис. 11.9, где молекулы изображены черными точками. Показ, конечно, условен, поскольку на рисунке всего 30 точек, а, например, в 1 см^3 азота при нуле градусов Цельсия и давлении 760 мм рт. ст. число молекул равно $2{,}687 \cdot 10^{19}$ (число Лошмидта). Если убрать перегородку, то газ быстро заполнит обе половинки сосуда, произойдет сопровождающийся увеличением энтропии необратимый процесс, и мы никогда не будем наблюдать самопроизвольного возвращения газа к исходному состоянию, когда все молекулы сосредоточены в левой половине сосуда, и энтропия меньше, чем при равномерном распределении молекул по половинкам сосуда (иллюстрацией могут служить формулы (31) и (32)).

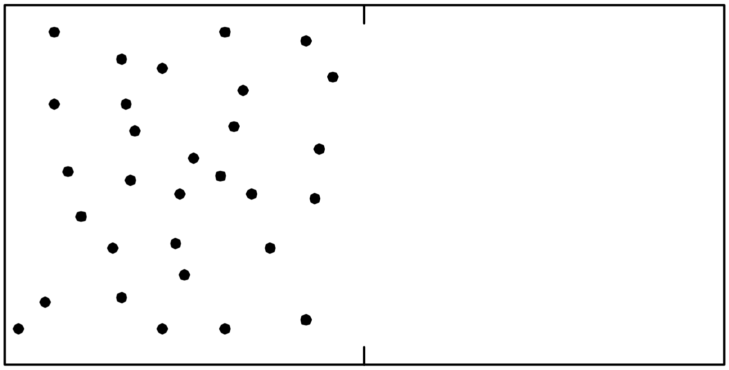


Рис. 11.9. В левой половине сосуда — идеальный газ, в правой — пустота

Все это вполне соответствует опыту, но возникает вопрос: соответствует ли необратимость реального движения молекул уравнениям их движения? Ведь движение каждой молекулы подчинено закону Ньютона:

$$F = m\frac{d^2S}{dt^2}, \tag{36}$$

где S — вектор положения молекулы, а F — сумма действующих на нее сил. Каковы бы ни были силы, уравнения (36) полностью симметричны относительно времени t, они не изменятся при замене t на $-t$, а это означает, что и движение всех молекул должно быть симметричным относительно времени, и никакой необратимости существовать не должно.

Это общее положение было затем конкретизировано Пуанкаре, который доказал знаменитую "теорему о возвращении". Согласно этой теореме, изолированная система из любого числа частиц (или молекул) с течением времени будет сколь угодно много раз возвращаться в начальное положение (или сколь угодно близкое к нему). Поэтому даже без всякой перегородки в сосуде, показанном на рис. 11.9, молекулы даже не один, а множество раз вернутся в свое начальное состояние в левой половине сосуда — с полным, казалось бы, противоречием со вторым началом термодинамики (а также и с нашим опытом).

Опираясь на теорему Пуанкаре, Цермело в 1896 году сделал вывод о том, что на достаточно длинном интервале времени вероятности встретить процессы, идущие с возрастанием энтропии и с убыванием энтропии, будут одинаковы, никакой необратимости поэтому быть не может.

Л. Больцман подробно проанализировал возражение Цермело и дал обоснованный ответ. Он указал, что для любой изолированной системы изменение энтропии в функции времени можно условно изобразить на графике, подобном приведенному на рис. 11.10. Если вначале, при $t = 0$, система находится в мало вероятном состоянии, состоянии с низкой энтропией (например, все молекулы собрались в левой половине сосуда, как показано на рис. 11.9), то произойдет процесс выравнивания, энтропия возрастет (участок *АБ* на рис. 11.10).

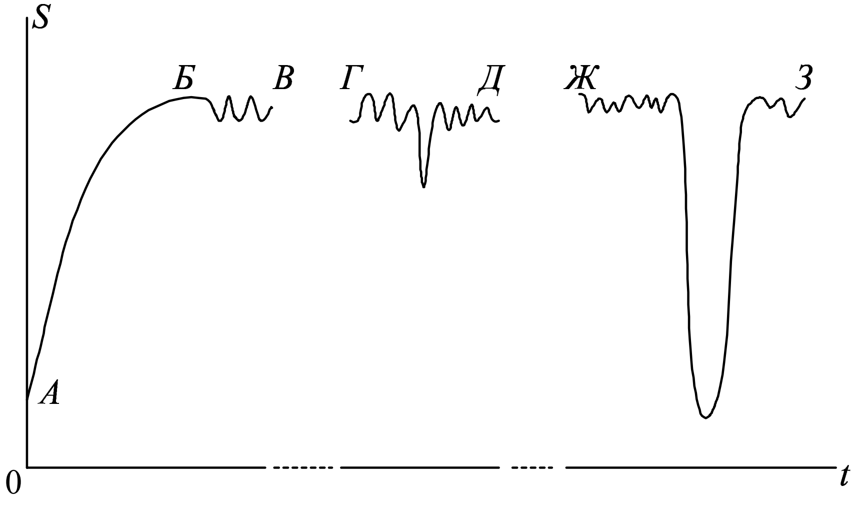


Рис. 11.10. График изменения энтропии от функции времени для любой изолированной системы

Однако и после выравнивания плотности газа количества молекул в правой и левой половинах сосуда не будут в точности равны (что соответствовало бы точному максимуму энтропии). Нет, все время числа молекул в правой и левой половинах сосуда будут испытывать малые колебания, малые флюктуации, и энтропия системы будет все время (каждую секунду) то отклоняться от точного максимума, то возвращаться к нему (участок *БВ*). Как показывает рис. 11.10, в области малых флюктуаций в полном согласии с выводами Пуанкаре и Цермело одинаково часто будет происходить и возрастание энтропии, и убывание ее. Гораздо реже — в миллионы раз реже — будут происходить немного более значительные изменения числа молекул в правой и левой частях сосуда, и — соответственно — немного более глубокие временные уменьшения энтропии системы (участок *ГД*); обратите внимание на то, что между участками *БВ* и *ГД* проходит очень большое время.

Наконец, через очень большое, колоссально большое время происходит — в полном согласии с "теоремой о возвращении Пуанкаре" — временное (на мгновение) возвращение системы к исходному состоянию, когда все молекулы находятся в левой половине сосуда, и энтропия системы на это мгновение уменьшается до исходного малого значения (участок *ЖЗ*). Больцман рассчитал и среднее время между возвращениями системы (сосуда с молекулами газа) в исходное состояние. Оно оказалось очень сильно зависящим от числа молекул. Вот результаты расчетов Больцмана (табл. 11.2).

Таблица 11.2. *Среднее время между возвращениями системы в исходное состояние*

Число молекул	10	100	10^5	10^{19}
Время возвращения, с	1024	10^{32}	$10^{(10^5)}$	$10^{(10^{10})}$

Напомним, что 10^{19} — это меньше, чем число молекул в 1 см^3 газа при атмосферном давлении, а число

$$10^{(10^{10})}, \qquad (37)$$

стоящее в последнем столбце, содержит 10 миллиардов цифр. Понятно, теперь, почему реального возвращения к исходному состоянию никогда не наблюдалось. Больцман приводил образное сравнение: "Предположим, что каждая из звезд, видимых в лучший телескоп, имеет столько же планет, что и Солнце, что на каждой планете живет столько же людей, сколько на Земле, и продолжительность жизни каждого равна миллиарду лет. Тогда полное число секунд, которое они проживут вместе, требует для своей записи менее 50 цифр".

Это наглядное сравнение и расчеты Больцмана показывают коренную разницу между абстрактной математикой, абстрактным математическим, хотя и совершенно правильным, утверждением о неизбежности возвращений в исходное состояние и их реальным осуществлением. Да, возвращения произойдут — но далеко за пределами существования и сосуда с газом, и Земли, и Солнечной системы. Поэтому реального "возвращения" все же не будет.

Рассказывают, что, выслушав утверждение Цермело о неизбежности возвращения системы в исходное состояние и уменьшения ее энтропии, Больцман ответил: "Ну, что же, ждите. Долгонько придется Вам ждать!"

Расчеты Больцмана были продолжены и уточнены польским физиком М. Смолуховским. Им был произведен расчет времени обратимости для различных объемов воздуха. "Представим себе, — пишет М. Смолуховский, — что в атмосферном воздухе нормальной плотности проведена шаровая поверхность радиуса r, и поставим перед собой следующий вопрос: по истечении какого времени можно ожидать такого самопроизвольного нарушения нормального состава воздуха, чтобы концентрация кислорода в шаре оказалась на 1% выше нормальной". Приведем конечный результат расчета: при радиусе $r = 10^{-5}$ см время возврата будет $t = 10^{-11}$ с, при $r = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ см время возврата равно $t = 10^{6}$ с = 12 суток и, наконец, при $r = 1$ см будет $t = 10^{(10^{14})}$ с, или больше, чем $10^{(10^{13})}$ лет.

Таким образом, если наблюдать за объемом газа в шаре радиусом 3×10^{-5} см, то при длительности наблюдения $5 \div 10$ минут процесс будет казаться необратимым, а на интервале времени в десятки суток он будет обратим. Наконец, при $r = 1$ см, практически уже никогда, при любых реально мыслимых сроках наблюдения, не будет наблюдаться обратимость процесса, хотя и здесь предельный переход к $t \to \infty$ не допустим.

Еще одно остроумное возражение Больцману было высказано его старшим коллегой Лошмидтом. Это возражение получило известность под названием "парадокс Лошмидта" и заключалось в следующем: пусть после удаления перегородки из сосуда, изображенного на рис. 11.9, молекулы распространились по всему объему сосуда и наступило термодинамическое равновесие. "Предположим, — писал Лошмидт, — что мы поменяли направление скорости каждой молекулы на обратное. Тогда весь процесс пойдет в обратном направлении, и через некоторое время все молекулы снова соберутся в левой половине сосуда, и энтропия газа уменьшится".

Это рассуждение (известное в истории науки как "парадокс Лошмидта")" вызвало многочисленные дискуссии и способствовало более точной формулировке основ кинетической теории материи. Простейшее возражение, которое, кстати, приводит и И. Р. Пригожин, состоит в том, что идеально-точное обращение вектора скорости всех молекул невозможно, а уже самое малое отклонение приведет к тому, что система не пройдет в точности обратную последовательность состояний и не вернется в исходное состояние. Это возражение отрицает фактически правомерность "мысленного" (идеализированного) эксперимента. Однако мысленные эксперименты и идеализированные системы играют большую роль при построении многих физических теорий и имеют полное право на существование. Если мы не можем объяснить мысленного эксперимента, не противоречащего законам физики, то это свидетельствует лишь о неполном понимании сущности рассматриваемого явления. Парадокс Лошмидта получает разрешение, если мы проследим за дальнейшей судьбой системы, вернувшейся (после обращения вектора скорости всех молекул) в исходное состояние.

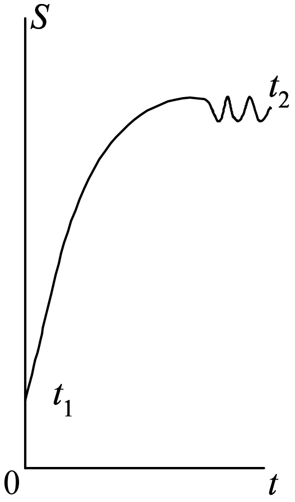


Рис. 11.11. Изменение энтропии системы молекул в функции времени

Рассмотрим еще раз систему молекул, показанную на рис. 11.9, изменение энтропии которой в функции времени изображено на рис. 11.11, и в момент времени t_2 изменим на обратные скорости всех молекул. После такого обращения система начнет проходить свои состояния в обратном порядке (рис. 11.12) и через время $t_2 - t_1$ окажется в начальном состоянии t_1. Однако это не значит, что она в нем останется. Поскольку разделяющей перегородки нет, система из состояния t_1 быстро перейдет в более вероятные состояния с максимальной энтропией и будет в дальнейшем находиться в них, испытывая лишь малые флюктуации вокруг состояния равновесия. Обращение скоростей всех молекул привело, как мы видим, лишь к тому, что неравновесное состояние (соответствующее моменту t_1) промелькнуло, как кратковременная флюктуация, на фоне вероятных состояний, в которых пребывает система подавляющую часть времени. Но такой же флюктуации можно было дождаться и без обращения скоростей молекул, если ждать колоссально долгое время (многие миллиарды миллиардов лет).

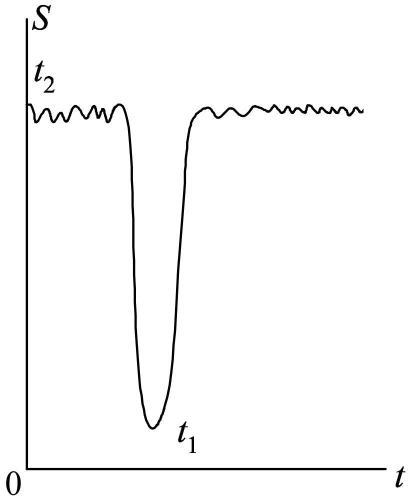


Рис. 11.12. Флюктуация системы молекул после обращения скоростей их движения

Идеализированный опыт обращения скоростей молекул приводит лишь к теоретически возможному броску по оси времени в окрестность маловероятного состояния, но не может отменить того факта, что система подавляющую часть времени будет находиться в вероятных состояниях в окрестностях состояния равновесия. А большие самопроизвольные флюктуации, сопровождающиеся существенным уменьшением энтропии, являются событиями настолько редкими, что хотя они теоретически возможны (и на интервалах в миллиард миллиардов и более лет непременно осуществятся), но на практике при тех интервалах времени, с которыми фактически приходится иметь дело, людьми никогда не наблюдались и не наблюдаются.

Любопытно отметить, что если в 1872 году, когда Лошмидт впервые сформулировал свой парадокс, обращение скоростей могло быть только "мысленным экспериментом", то через сто лет парадокс был смоделирован на компьютере. Точнее — моделировалось движение тысячи "молекул", взаимодействующих между собой как идеально-упругие шары. Помещенные сперва в левую половину "сосуда", они быстро разбегались и равномерно распределялись по обеим половинам. После того как компьютер менял все их скорости на обратные, они быстро возвращались обратно, на мгновение собирались в левой половине, и тут же разбегались вновь — в полном соответствии с предсказаниями Больцмана.

Таким образом, выводы и предсказания великого Больцмана значительно точнее и яснее, чем более поздние рассуждения о "стреле времени", приведенные в работах [26, 27, 28]. Больцман тоже отрицал "стрелу времени", но он давал четкое объяснение тому, что наблюдаемые в окружающей нас природе процессы взаимодействия почти всегда и везде (за вычетом малых флюктуаций) сопровождаются увеличением суммарной энтропии участвующих во взаимодействии систем. Он считал возможной гипотезу о том, что окружающий нас мир "начал свое существование с очень маловероятного состояния", но считал, что "если мы будем представлять себе мир достаточно большим, то, согласно самим законам исчисления вероятностей, то там, то здесь будут возникать места, по своим размерам сравнимые с нашей галактикой и обладающие совершенно невероятными распределениями состояний". В этих областях "ход времени будет иметь односторонний характер", но "для Вселенной в целом" он "не будет односторонним". Более подробно о взглядах и смелых гипотезах Больцмана об устройстве мира рассказано в [20] на с. 166—172.

Помимо обсуждения "стрелы времени" в публикациях [26, 27, 28] содержится много интересных положений, но их доказанность и их справедливость вызывают сомнение. Дело в том, что для их обоснования И. Р. Пригожин использовал (в числе многих других) "принцип минимума производства энтропии в стационарном состоянии". На самом деле этот принцип не является всеобщим, и поэтому любые выводы и рекомендации, полученные с его использованием, могут быть и верными, и ошибочными.

Принцип минимума производства энтропии был выдвинут молодым И. Р. Пригожиным еще в 1945—47 годах, когда он смело обобщил второе начало термодинамики на открытые системы. Ранее второе начало формулировалось лишь для изолированных систем — т. е. систем, которые не обмениваются с окружающей средой ни энергией, ни веществом. Эти системы стремятся с течением времени к равновесному состоянию, энтропия которого максимальна, а ее производство обращается в нуль. Все это было известно еще в XIX веке.

Однако в природе гораздо чаще встречаются открытые системы, которые могут обмениваться с окружающей средой энергией или веществом. Так, Земля получает энергию от Солнца и отдает энергию в космическое пространство, человек получает энергию из пищи и отдает энергию в виде тепла в окружающую среду (а иначе перегреется и умрет). Примеров открытых систем очень много, и поэтому столь важны исследования законов их поведения, более сложных, чем у изолированных систем.

Открытые системы не стремятся с течением времени к равновесному состоянию. Они остаются неравновесными и стремятся с течением времени к стационарному состоянию, состоянию с постоянными характеристиками. И. Р. Пригожин обнаружил, что в стационарных состояниях производство энтропии, скорость возрастания ее, не обращается в нуль, как в равновесных состояниях, но обычно в стационарных состояниях оно меньше, чем в состояниях не стационарных. Тем самым Пригожин в 40-х годах XX века положил начало новой науке — неравновесной теромодинамике (она изложена, например, в [29]). За эти работы И. Р. Пригожин был в 1977 году заслуженно удостоен Нобелевской премии.

И. Р. Пригожин утверждал, что для всех открытых систем справедлив выдвинутый им принцип минимума производства энтропии ("принцип Пригожина"). Вот формулировка этого принципа, данная самим Пригожиным в лекции при вручении ему Нобелевской премии: "Теорема о минимуме производства энтропии… утверждает, что производство энтропии системой, находящейся в стационарном, достаточно близком к равновесному состоянии, минимально". И далее там же: "…когда граничные условия не позволяют системам достичь термодинамического равновесия, система останавливается в состоянии «минимальной диссипации»" (опубликовано в [30]).

Принцип Пригожина очень удобен при исследовании сложных систем, он быстро получил весьма широкую популярность и стал считаться принципом доказанным, на который можно опираться. Этому способствовал и высокий личный авторитет И. Р. Пригожина — лауреата Нобелевской премии. Принцип Пригожина вошел в число основных принципов неравновесной термодинамики и стал широко использоваться при решении различных задач в области физики, биологии, сложных систем управления (см. работы [31, 32] и др.).

Однако когда принцип Пригожина стали применять к решению практических задач, наряду с правильными результатами еще в 1963—64 годах начали появляться и результаты ошибочные. Так, например, оказались во многом ошибочными основанные на "теореме Пригожина" рассуждения о минимуме производства энтропии, опубликованные в монографии [31]. Это обстоятельство побудило проанализировать — действительно ли принцип Пригожина носит всеобщий характер? Анализ затруднялся тем, что в работах самого Пригожина и его последователей принцип минимума производства энтропии выдвигался сразу для весьма сложных систем, и поэтому в его обоснование выдвигались общие наводящие соображения, а не точные расчеты, которые для сложных систем крайне затруднительны. Необходимо было найти такую систему, в которой производство энтропии поддается точному и неопровержимому расчету.

В качестве такой системы был рассмотрен однородный твердый брус длиной L и сечением S (в дальнейшем положим для простоты $L = 1$ и $S = 1$). Боковые стенки бруса теплоизолированы; на левом торце бруса поддерживается температура a градусов (в дальнейшем для простоты $a = 1$), а на правом торце — $1 + m$. Поэтому тепло распространяется по брусу справа налево. Брус расположен вдоль оси $0x$. Процесс распространения тепла в брусе будет, как известно, осписываться линейным уравнением теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial T} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \tag{38}$$

где T — температура бруса, являющаяся функцией времени t и координаты x, причем $0 \le x \le 1$; k — коэффициент теплопроводности, постоянная величина. Таким образом, рассматриваемая нами система — линейна. Заданы граничные условия: $T(x = 0;\ t) = 1$; $T(x = 1;\ t) = 1 + m$. В стационарном режиме температура не зависит от времени, $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, и тогда из уравнения (38) и граничных условий находим, что в стационарном режиме $T_{\text{СТ}} = 1 + mx$, т. е. температура зависит от координаты x линейно.

Подсчитаем теперь производство энтропии. Выделим внутри бруса элементарный слой толщиной dx. Через слой будет проходить поток тепла $k\frac{\partial T}{\partial x}$, а поскольку поток тепла входит в слой при одной температуре, а выходит при другой, то производство энтропии $d\Pi$ в элементарном слое, согласно формуле (25), равно

$$d\Pi = k\frac{dT}{dx}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T + \frac{dT}{dx}dx}\right) = k\frac{1}{T^2}\left(\frac{dT}{dx}\right)^2, \tag{39}$$

а во всем брусе производство энтропии:

$$\Pi = \int_0^1 d\Pi = k\int_0^1 \frac{1}{T^2}\left(\frac{dT}{dx}\right)^2 dx. \tag{40}$$

Вычисляя интеграл (40) для стационарного режима, когда $T = 1 + mx$, а производная $\frac{dT}{dx} = m$, находим, что в стационарном режиме производство энтропии равно:

$$\Pi_{CT} = k\frac{m^2}{1+m}. \tag{41}$$

Однако это значение не является минимальным. Обычными приемами вариационного исчисления не трудно установить, что минимум производства энтропии достигается при нестационарном, экспоненциальном распределении температуры. Заданным граничным условиям удовлетворяет распределение:

$$T_{\min} = (1+m)^x. \tag{42}$$

Подставив функцию (42) в интеграл (40), вычислим минимальное производство энтропии:

$$\Pi_{\min} = k[\ln(1+m)]^2. \tag{43}$$

Не трудно проверить, что для любых $m > 0$ будет $\Pi_{CT} > \Pi_{\min}$, т. е. производство энтропии в стационарном режиме минимума не достигает. Так, если $m = 1{,}72$, то $\Pi_{\min} = k$, в то время как $\Pi_{CT} = 1{,}087k$.

Опровергающий минимальность производства энтропии в стационарном режиме пример был опубликован в [33]. По сути дела, после этого на принципе Пригожина можно было поставить точку. Ведь если обнаружен хотя бы один опровергающий пример (контрпример), то это означает, что принцип Пригожина — не всеобщий, и прежде чем использовать его в каком-либо конкретном случае, для исследования стационарного режима какой-либо конкретной системы нужно сперва доказать, что именно для этой системы принцип Пригожина справедлив. А поскольку доказать это, конечно, сложнее, чем непосредственно исследовать характеристики стационарного режима, то ясно, что при наличии контрпримера никакой эвристической силой принцип Пригожина обладать не может. Если же отдельного доказательства справедливости принципа Пригожина для каждой рассматриваемой системы не делать, то можно прийти к ошибочным заключениям.

Однако поскольку принцип Пригожина к 1966 году был уже признанным, основополагающим принципом неравновесной термодинамики, то против контрпримера, опубликованного в [33], выставлялись возражения.

В одном из возражений указывалось, что разница в производстве энтропии при стационарном и при экспоненциальном распределении температуры является (для малых m) величиной высшего порядка малости, т. е. принцип Пригожина верен хотя бы как приближенный. Действительно, разложив в ряд по степеням m отношение:

$$\frac{\Pi_{CT} - \Pi_{\min}}{\Pi_{CT}} = \frac{1}{12}m^2 - \frac{1}{4}m^3 + \ldots, \tag{44}$$

находим, что оно имеет второй порядок малости по отношению к m. Но если мы вычислим разность температур в стационарном режиме и при экспоненциальном распределении температуры (42), соответствующем минимуму производства энтропии, то найдем, что эта разность также мала. Она достигает максимума вблизи $x = 0{,}5$ и имеет тот же порядок малости по отношению к m. Так, при $x = 0{,}5$ имеем

$$\frac{T_{CT} - T_{\min}}{T_{CT}} = \frac{1}{8}m^2 - \frac{1}{8}m^3 + \ldots \tag{45}$$

Кроме того, принцип Пригожина — утверждение не количественное, а качественное. Он утверждает, что в любом нестационарном режиме производство энтропии *больше*, а рассмотренный пример показывает, что существуют нестационарные режимы, в которых производство энтропии *меньше*, чем в стационарном.

Были возражения, утверждавшие, что принцип Пригожина справедлив только для линейных систем и только при малых отклонениях от равновесного состояния (для бруса равновесное состояние соответствует $m = 0$). Однако линейность уравнения (38) и разложение (44) показывают, что принцип Пригожина может быть несправедлив и для линейных систем, причем при сколь угодно малых отклонениях от равновесного режима.

В одном из возражений утверждалось, что в стационарном режиме достигает минимума не производство энтропии, а скорость диссипации свободной энергии. Эта скорость пропорциональна произведению производства энтропии на абсолютную температуру T. Для рассмотренного нами примера с брусом скорость диссипации свободной энергии равна:

$$J_{дисс} = k\int_0^1 \frac{1}{T}\left(\frac{dT}{dx}\right)^2 dx \tag{46}$$

и тоже, как нетрудно проверить, не достигает минимума в стационарном режиме. Минимума в стационарном режиме достигает интеграл:

$$J = k\int_0^1 \left(\frac{dT}{dx}\right)^2 dx, \tag{47}$$

не тождественный интегралу (46).

Наиболее интересен и оригинален был отклик самого И. Р. Пригожина на контрпример, опубликованный в [33]. Этот отклик был опубликован в книге [34]. Признав прямо, в отличие от других, что даже при рассмотрении простого процесса теплопереноса в твердом теле могут существовать примеры, когда в стационарных режимах производство энтропии не минимально, Пригожин в книге [34] утверждал, что в этих случаях будет достигать минимума производство так называемой "взвешенной энтропии" $L = ST^2$, равной произведению настоящей энтропии S на квадрат абсолютной температуры T, и что этот факт якобы спасает универсальность принципа минимума производства энтропии. Сам по себе факт верен — при теплопереносе в брусе "взвешенная энтропия", действительно, достигает минимума в стационарном режиме. Однако спасает ли это универсальность принципа Пригожина? Нет, не спасает. "Взвешенная энтропия" имеет другую размерность и совсем другой физический смысл, чем энтропия настоящая. Нетрудно показать, что при переходе тепла от горячего тела к холодному настоящая энтропия S, как и следовало ожидать, возрастает, а "взвешенная энтропия" L убывает.

Кроме того, остается неясным, для каких систем в стационарном режиме достигается минимум производства настоящей энтропии, и для каких — "взвешенной".

Таким образом, возражение И. Пригожина остроумно, но несостоятельно. Однако оно было сформулировано так талантливо и тонко, что после его опубликования в [34] большинство исследователей продолжали верить в универсальность принципа Пригожина. Многие до сих пор продолжают опираться на него при анализе конкретных систем и их стационарных режимов, а ведь это может приводить (и приводит) к ошибкам.

Так, например, в работе [32] принцип Пригожина был использован для отыскания распределения тока в массиве металла с учетом поверхностного эффекта. Использование принципа Пригожина, действительно, очень облегчило анализ распределения тока. Но можем ли мы быть уверены, что результат, приведенный в [32], верен? Ведь для уверенности в его правильности мы должны доказать (а доказать это труднее, чем непосредственно вычислить распределение тока без использования принципа Пригожина), что для исследуемой в [32] системы — массива металла, в которой проникает внешнее переменное магнитное поле, — в стационарном режиме производство энтропии, действительно, минимально, причем минимально именно производство настоящей энтропии S, а не "взвешенной энтропии" $L = ST^2$.

Пока не доказана минимальность производства настоящей энтропии S для системы, рассматриваемой в [32], мы не может быть уверены, что результат, приведенный в [32], действительно верен.

Таким образом, история науки дает убедительные примеры того, с какой осторожностью следует подходить в научной работе даже к вроде бы признанным положениям. Гораздо полезнее — проверить их[17]. К сожалению, это делается не всегда. Не всегда обращают внимание даже на опубликованные опровержения.

Так, в 1986 году, через 20 лет после публикации [33] и несмотря на то, что и после 1966 года были опубликованы работы, опровергающие "принцип Пригожина", М. В. Волькенштейн в своей известной книге [35], на стр. 120 снова утверждал: "Как показал Пригожин, если стационарное состояние открытой системы близко к равновесному, то функция диссипации имеет минимум. Иными словами, продукция энтропии в стационарном состоянии наименьшая по сравнению с другими состояниями системы". Кроме того, на других страницах той же книги можно прочесть о том, что энтропия — это "мера неупорядоченности", и "мера недостатка информации о рассматриваемой системе" (стр. 148) — т. е. снова и снова повторяются вроде уже было отвергнутые взгляды, опровергнутые заблуждения. Мы убеждаемся, что они очень живучи.

Пока такие взгляды существуют и являются, пожалуй, наиболее распространенными, информатике развиваться трудно. Еще не раз будут возникать различные тупики и ошибочные решения. Лучший путь для преодоления заблуждений — это изучение истории науки, истории информатики. История науки показывает — как возникли заблуждения, что помогло их распространению. И тогда уже легче преодолеть заблуждения, выработать правильную позицию, которая поможет и в исследованиях, и в чисто практической работе.

11.6. Переход к использованию в информатике вычислительных машин. Социальная информатика

Использование в информатике (точнее — в обработке информации) быстродействующих электронных вычислительных машин произвело в ней решительный переворот, который начался еще в 60-х годах XX века. Если счетно-аналитические машины (перфоратор и табулятор), которые были основным орудием информатики в первой половине XX века, позволяли обрабатывать не более 7 перфокарт в секунду, а каждая перфокарта несла (кроме служебной) не более 800 битов полезной информации, то это соответствовало скорости обработки не более 5000 битов в секунду. Понятно, что появление быстродействующих машин, способных обрабатывать миллионы битов в секунду, было подлинно революционным переворотом.

Обработка информации с помощью быстродействующих вычислительных машин стала постепенно распространяться на все новые и новые области приложений — от выполнения вычислительными машинами чертежей и всей чертежной документации до управления производством, издательского дела и т. п. Постепенно — еще с 60-х годов XX века — начал использоваться термин "информатика". Первоначально "информатику" считали всего лишь одним из разделов кибернетики (см., например, [46]), но потом она стала самостоятельной и быстро развивающейся научной дисциплиной, вошла в программы и средней, и высшей школы. Вышли в свет многочисленные учебники по информатике. В 1983 году в Академии наук СССР было образовано отделение информатики, вычислительной техники и автоматизации. В том же году был организован Институт проблем информатики АН СССР.

Еще раньше — в 1952 году — был организован Институт научной информации (впоследствии — ВИНИТИ). Именно среди исследователей научной информации и сформировался постепенно сам термин "информатика". Первоначально чаще использовался термин "документация". Так, в 1920 году в Нидерландах был создан Голландский институт документации. Подобные институты создавались и в других странах, а в 1934 году образовалась Международная федерация документации, объявившая своей задачей "сбор, хранение, распространение и использование всех видов информации". Потом термин "документация" перестал нравиться, стали искать ему замену. В 1962 году французский специалист Ф. Дрейфус (Ph. Dreyfus) предложил использовать французское слово — "informatique" и его эквиваленты в других языках. Его предложение было быстро подхвачено. Если в 1965 году большая книга [46] вышла под названием "Основы научной информации", то в 1966 году ее авторы предложили использовать в русском языке термин "информатика" (статья [47]), и в 1968 году второе (дополненное) издание своей книги [46] ее авторы назвали уже по-новому: "Основы информатики" [48]. Книга [48] вышла большим тиражом в 25 тысяч экземпляров, и ее публикация способствовала закреплению нового термина. В книге [48] информатика уже называлась "самостоятельной научной дисциплиной".

В то же время надо отметить, что поскольку информатика является очень быстро развивающейся дисциплиной, то даже в первом пятилетии XXI века еще не выработалось и не закрепилось общепризнанное определение самого понятия "информатика". Если мы перелистаем учебники и учебные пособия для высшей школы, вышедшие в свет в XXI веке, — такие как [37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44], то определения понятия "информатика", приводимые в них, будут несколько отличаться одно от другого, но в целом они будут вариациями определения, выработанного еще в 1975 году авторами известной "Энциклопедии кибернетики" [45]: "Информатика является научной дисциплиной, изучающей любые процессы коммуникаций, обмена информацией в окружающем нас мире".

Отметим, что ни в коем случае нельзя (это подчеркнуто и в [39]) понимать "информатику" как "работу с компьютером", или как "область человеческой деятельности, связанную с преобразованием информации с помощью компьютеров".

Информатика гораздо старше компьютеров. Она имеет интересную и славную историю, о которой было лишь очень коротко рассказано в начале этой главы. Да, с появлением компьютеров технические средства информатики совершенно изменились, и поэтому подробный рассказ о технике, на которой основывалась информатика в XIX веке и даже в первой половине XX века не будет интересен сегодняшнему читателю. Но история развития теории, на которой основывается информатика — теории информации — а также философские вопросы информатики, представляют самый живой интерес, тем более, что развитие теории информации шло далеко не прямолинейно, было богато и заблуждениями, и острыми дискуссиями, о которых частично рассказано в предыдущих разделах.

Поэтому в предшествующем изложении не очень много внимания уделялось развитию технических средств информатики, а больше — развитию ее теоретических и философских основ.

Историю науки знать надо. Она является лучшей путеводной звездой для новых открытий.

Отметим, что и после перехода к использованию вычислительных машин в истории информатики происходило не мало драматических событий.

Энтузиастом в области применения вычислительных машин для решения насущных проблем экономики Советского Союза был академик Виктор Михайлович Глушков (1923—1982), возглавивший с 1962 года Институт кибернетики Академии наук УССР в Киеве. Экономика Советского Союза была экономикой плановой. Это означало, что каждый завод выпускал только ту продукцию, которая была ему запланирована. Сам же план вырабатывался после тщательного обсуждения в планирующих организациях. Целью обсуждения, целью принятого после обсуждения плана было наилучшее удовлетворение научно обоснованных потребностей населения.

В подавляющем большинстве стран, окружающих Советский Союз, экономика была рыночной — т. е. заводы и фабрики (кроме тех, которые выполняли военные заказы государства) производили ту продукцию, которую у них покупали, на которую был спрос. А поскольку спрос не был (да и не может быть) постоянной величиной, то в рыночной экономике приходится постоянно держать резервные производственные мощности — для удовлетворения спроса, который может возрасти. В то же время часть мощностей при падениях спроса неизбежно простаивает. В результате коэффициент использования производственных мощностей в рыночной экономике не превышает 60—70%, а в плановой — приближается к 100%. Это большое преимущество плановой экономики.

Однако оборотной стороной этого преимущества является необходимость точного расчета всего огромного ассортимента производимой в стране продукции. Стоило ошибиться всего лишь в нескольких позициях — и возникал пресловутый "дефицит", который стал чуть ли не синонимом "планового хозяйства". Для преодоления "дефицита" требовался огромный объем расчетов, и В. М. Глушков видел, что вычислительные машины в 60-х годах XX века могли быть быстро усовершенствованы и получить возможность обеспечить весь необходимый объем вычислений. В. М. Глушков просил у правительства сравнительно умеренного дополнительного финансирования для опережающего развития и совершенствования вычислительных машин, причем давал твердые гарантии в том, что эти машины позволят реализовать все большие преимущества планового хозяйства, исключить просчеты и "дефициты". Все развитие Советского Союза могло тогда пойти по другому пути, но именно в это время, в те же 60-е годы XX века, были приняты оказавшиеся роковыми решения в области социальной информатики. Было решено иметь в Советском Союзе два бюджета — один бюджет открытый, публикуемый во всех газетах и статистических справочниках, и второй бюджет — закрытый, секретный, доступный только высшим руководителям государства. Реально деньги распределялись и тратились так, как распоряжался второй, секретный бюджет.

Разница между двумя бюджетами заключалась, прежде всего, в уровне военных расходов, расходов на Вооруженные силы страны, на армию, на флот, на внутренние войска. Делалось это так: в открытом бюджете предусматривались большие расходы на финансирование народного хозяйства, на восстановление износившихся средств производства и на их обновление. На самом же деле во втором бюджете, секретном, но единственном реально действующем, значительная и даже основная часть этих средств шла не на народное хозяйство, а на армию. В результате, если судить по открытому бюджету, то СССР был необычайно миролюбивой страной, тратил на армию очень мало, но на самом деле военные расходы СССР уже в конце 60-х годов XX века были весьма не малыми, а главное — с появлением секретного бюджета они стали быстро расти, отбирая средства у народного хозяйства, которое в результате вместо роста начало хиреть.

Вполне возможно, что "раздвоение" бюджетов, разделение их на бюджет открытый и бюджет истинный, секретный, было продиктовано самыми лучшими намерениями — на мировой арене Советский Союз выглядел страной, подающей пример другим в деле сокращения военных расходов, обуздания гибельной "гонки вооружений", а высшее руководство страны, которое, собственно, и принимало все решения, не обманывалось цифрами бюджета официального. Таким образом, вполне возможно, что секретный, раздвоенный бюджет ввели с самыми хорошими намерениями и планами, но согласно известной поговорке: "Дорога в ад вымощена благими намерениями". Именно по дороге, ведущей к неминуемому упадку, двинулся Советский Союз уже в

70-е годы XX века — двинулся, прежде всего, потому, что он раздвоил свои информационные средства, свою социальную информатику, разделил ее на открытую и секретную, причем разделил так, что секретная часть стала более значимой, чем открытая.

Результат нам известен — избавленные от открытого контроля военные расходы стали расти неудержимо, подминая под себя все другие нужды государства. Чтобы не утомлять читателя длинным рядом очень печальных и неутешительных цифр, приведем только одну: в 1989 году СССР имел на вооружении более 68 тысяч танков — это больше, чем было в том году во всех армиях Земли вместе взятых! А ведь танки (да и вся другая боевая техника) очень дороги.

В то же время население СССР в 1989 году составляло лишь 5% населения мира, да и валовой национальный продукт СССР не превышал 4% от того, что производилось во всем большом Мире. Понятно, что если страна, население которой не превышает 5% населения Земли, стала производить танков (и других вооружений) больше, чем все остальные 95% населения Земли, то это совершенно неминуемо ведет такую страну к разорению и последующему распаду. Все это потом и произошло с Советским Союзом, и в этом нет ничего неожиданного, есть одна только неизбежность такого исхода. Но эти печальные уроки истории СССР должны помочь определиться и извлечь уроки для социальной информатики, о которой говорится в учебниках [37] и [38]. Ведь дело не в технических средствах, не в компьютерах. Технические средства информатики позволяли в 1970 году оповестить население СССР о надвигающихся трудностях, организовать обсуждение и отмену ошибочных решений, которые уже тогда начали заводить страну в тупик, но еще была возможность организовать общественное обсуждение, изменить политику, выйти из кризиса и все спасти. На самом деле ничего этого не было сделано, и Советский Союз распался. Но знание истории прошлых ошибок — в том числе и ошибок социальной информатики — может стать полезным уроком для настоящего и будущего.

"Раздвоение бюджетов" первым ударило по академику В. М. Глушкову. Во-первых, стремительно и бесконтрольно раздувшиеся в условиях секретности военные расходы заставили правительство экономить на науке, на оплате труда научных работников. Требуемых денег на совершенствование вычислительных машин, которые могли бы повысить эффективность планового хозяйства, В. М. Глушков не получил. С наибольшей скоростью развитие вычислительной техники стало происходить в США (об этом уже говорилось в *главе 10*), а в Советском Союзе наметилось отставание, которое с тех пор постепенно росло и углублялось. Во-вторых, само развитие народного хозяйства СССР по научно разработанному плану перестало быть возможным с тех пор, когда все основные показатели страны стали делиться в ее информатике на истинные, но секретные и недоступные ученым, и на открытые, доступные, но не соответствующие истине. В таких условиях научное планирование развиваться не могло.

Все это подрывало силы В. М. Глушкова. Он скончался 30 января 1982 г., не дожив и до 59 лет. Его замыслы в области вычислительной техники и информатики остались не реализованными.

Будем надеяться, что уроки истории — в том числе и истории социальной информатики — помогут выработке правильных решений.

В заключение напомним очень коротко даты основных событий третьего (современного) этапа в развитии информатики, когда одним из основных ее элементов стала сеть Интернет, а саму информатику начали часто (хотя и неправильно) понимать как "работу с компьютером".

- ☐ 1969 год. Первые четыре компьютера крупнейших научных учреждений США соединены между собой в сеть APRANet — предшественницу Интернета.
- ☐ 1971 год. Рэй Томлинсон разработал первую программу для электронной почты. Появляется e-mail и еще через год классическая "собака" — @.
- ☐ 1973 год. Число пользователей APRANet достигает 2000 — и в их числе пользователи за пределами США. Впервые в печати появляется термин "Интернет" (соединенные сети), и начинается работа над концепцией новой Всемирной сети.
- ☐ 1990 год. На карте Всемирной сети появился домен **su**, объединивший сайты, расположенные на территории СССР.
- ☐ 1993 год. В Интернете появляется миллионный пользователь.
- ☐ 1999 год. Число пользователей Интернета достигает 500 млн человек.

Литература к главе 11

1. Универсальная десятичная классификация. — М.: Изд-во Всесоюзной книжной палаты, 1962. — 725 с.
2. Котельников В. А. Теория потенциальной помехоустойчивости. — М.; Л., 1956.
3. Хартли Р. Передача информации. На русском языке опубликовано в сборнике "Теория информации и ее приложения". — М.: Физматгиз, 1959.

4. Харкевич А. А. Теоретические основы радиосвязи. — М., 1947.
5. Шеннон К. Математическая теория связи. На русском языке опубликовано в книге: К. Шеннон "Работы по теории информации и кибернетике". — М.: Издательство иностранной литературы, 1963. — 830 с.
6. Петров Ю. П. Информация и энтропия в кибернетике: Учебное пособие. — Ленинградский гос. ун-т. 1989. — 82 с.
7. Харкевич А. А. О ценности информации. — Сборник "Проблемы кибернетики", вып. 4, 1960.
8. Бонгард М. М. Проблема узнавания. — М.: Наука, 1967. — 320 с.
9. Шрейдер Ю. А. Об одной семантической модели информации // Проблемы кибернетики, вып. 13, 1965.
10. Грекова И. (Вентцель Е. С.). К вопросу об информации // Наука и жизнь, 1967, № 3, с. 31—37.
11. Кондратов А. М. Математика и поэзия. — М.: Знание, 1962.
12. Тимофеев Л. И. Число и чувство меры в изучении поэзии // Вопросы литературы, 1963, № 4.
13. Винер Н. Кибернетика. — М.: Советское радио, 1958. — 215 с. (перевод с издания на английском языке 1948 г.).
14. Шеннон К. Упрощенный вывод линейной теории сглаживания и предсказания по методу наименьших квадратов, 1950. На русском языке опубликовано в той же книге, что и [5].
15. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. — М., 1962.
16. Бендат Д., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. — М.: Мир, 1971. — 408 с.
17. Яглом А. М. Корреляционная теория стационарных случайных функций. — Л.: Гидрометеоиздат, 1981. — 179 с.
18. Бриллюэн Л. Наука и теория информации. — М., 1960.
19. Ивахненко А. Г. Техническая кибернетика. — Киев, 1959.
20. Полак Л. С. Людвиг Больцман. — М.: Наука, 1987. — 203 с.
21. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 5. — М.: Наука, 1964.
22. Фриш С. Э., Тиморева А. В. Курс общей физики. Т. 1. — М.: Физматгиз, 1962.

23. Теория передачи электрических сигналов при наличии помех / Под ред. Н. А. Железнова. — М., 1963.
24. Петров Ю. П. Энтропия и неупорядоченность // Природа, 1970, № 2, с. 71—74.
25. Франк-Каменецкий Д. А. Что такое беспорядок и какова его связь с энтропией? // Природа, 1970, № 2, с. 75—78.
26. Пригожин И. Р., Стенгерс И. Вызов, брошенный науке // Химия и жизнь, 1985, № 7, с. 20—27.
27. Пригожин И. Р., Стенгерс И. Порядок из хаоса. — М.: Прогресс, 1986.
28. Пригожин И. Р., Стенгерс И. Время, хаос, квант (к решению парадокса времени). — М.: Прогресс, 1999. — 266 с.
29. Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. — М., 1964.
30. Пригожин И. Р. Время, структуры и флюктуации // Успехи физических наук, 1980. Т. 131, вып. 2, с. 185—206.
31. Лернер В. С. Применение подхода теории неравновесных процессов к некоторым задачам управления. — Кишинев, 1968.
32. Стеблев Ю. И. Условия минимальных потерь в теории поверхностного эффекта // Электричество, 1983, № 6, с. 62—65.
33. Петров Ю. П. К вопросу о принципе минимума скорости возрастания энтропии в стационарном режиме // Биофизика, 1966. Т. 11, № 5, с. 926—928.
34. Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флюктуаций. — М., 1974.
35. Волькенштейн М. В. Энтропия и информация. — М.: Наука, 1986. — 191 с.
36. Губин В. Б. Прав ли Пригожин? // Известия ВУЗ, философские науки, вып. 5—6, 1995. — 140 с.
37. Колин К. К. Социальная информатика. — М.: Академический проект, учебное пособие, 2003. — 427 с.
38. Социальная информатика. Коллективная монография под редакцией Лапина И. И. — М.: УРСС, 2003. — 214 с.
39. Могилев В. А., Пак Н. И., Хеннер Е. К. Информатика. — М.: Изд-во "Academia", 2-е изд., 2004. — 809 с.
40. Информатика / Под ред. Н. В. Макаровой: Учебник для вузов. — М.: Финансы и статистика, 3-е изд., 2003. — 768 с.

41. Информатика, базовый курс / Под ред. С. В. Симоновича. — СПб.: Питер, 2-е изд., 2004. — 640 с.
42. Степанов А. Н. Информатика: Учебник для вузов. — СПб.: Питер, 4-е изд., 2005. — 684 с.
43. Алексеев А. П. Информатика 2003: Учебное пособие для студентов специальности "Телекоммуникации". — М.: Солон-пресс, 2003. — 457 с.
44. Рыжиков Ю. И. Информатика. Лекции и практикум. — СПб.: Корона принт, 2000. — 255 с.
45. Энциклопедия кибернетики. — Киев, 1975, в 2-х т. — Т. 1. — 607 с. Т. 2. — 619 с.
46. Михайлов А. И., Черный А. И., Гиляревский Р. С. Основы научной информации. — М., 1965. — 650 с.
47. Михайлов А. И., Черный А. И., Гиляревский Р. С. Информатика — новое название теории научной информации // Научно-техническая информация, 1966, № 2.
48. Михайлов А. И., Черный А. И., Гиляревский Р. С. Основы информатики. — М., 1968. — 735 с.

Часть II

В этой части книги мы рассмотрим историю развития некоторых важных областей науки — методов оптимизации, теории автоматического управления, теории некорректных задач — но исследуем их подробнее, доведя изложение вплоть до последнего десятилетия XX века, т. е. до совсем недавнего времени.

Материал второй части книги рассчитан на тех, кто хочет более детально ознакомиться с историей науки. Это определяет стиль изложения и оформления входящих в нее глав, несколько отличный от стиля изложения и оформления первой части.

Глава 12

Вариационное исчисление и теория оптимальных процессов

12.1. Необходимые условия экстремума

Одной из важнейших задач математики является помощь ученым и инженерам в выборе и создании наилучших конструкций, наилучших прогнозов будущего, наилучших технических, экономических и финансовых решений.

Понятно поэтому то внимание, которое уделялось решению экстремальных задач, задач о поиске "максимумов и минимумов". Эти задачи стали предметом систематического исследования еще в XVII веке.

Если подлежащая исследованию величина являлась функцией от некоторой переменной, то путь к решению открывало простое правило, которое теперь мы выражаем следующим образом: "Значения переменной, доставляющие экстремум (максимум или минимум), разумно искать среди точек, в которых производная функции обращается в нуль". Однако уже в XVII веке математикам стали встречаться задачи, где максимум или минимум исследуемого свойства зависели не от выбора того или иного значения независимой переменной, а от выбора функции в целом. Естественно, что новые задачи требовали и совершенно новых методов решения.

Примером задачи такого типа, рассмотренной впервые еще Ньютоном в 1687 году, был выбор формы корпуса корабля, которая обеспечивала бы наименьшее сопротивление воды. Это — типичная вариационная задача. Однако первым, кто подметил специфику нового типа задач на экстремум, был швейцарский математик И. Бернулли (Bernoulli, 1667—1748). В июньском номере журнала "Acta eruditorium" за 1696 год Бернулли предложил математикам задачу о брахистотроне. Задача формулировалась так: "Среди всех линий, соединяющих две заданные точки, найти кривую, двигаясь по которой под действием силы тяжести, материальное тело прошло бы путь между ними за кратчайшее время".

Лейбниц решил эту, по его определению, "прекрасную, до сих пор неслыханную задачу", и попросил Бернулли предоставить математикам год времени для состязания в ее решении. Бернулли согласился и в январе 1697 года вновь опубликовал свою задачу, сопроводив ее следующим воззванием: "Остроумнейших математиков всего мира приветствую я — Иоганн Бернулли! Людей высокого ума ничем нельзя больше привлечь к работе, как указав им трудную и вместе с тем почетную задачу, решением которой возможно и славу приобрести, и оставить по себе вечный памятник. Я надеюсь, что заслужу благодарность всего ученого мира, если по примеру Паскаля, Ферма и других предложу лучшим математикам нашего времени задачу, которая даст им возможность испробовать, хороши ли те методы, которыми они владеют, и как велика сила их ума. Если кто-либо найдет решение предложенной задачи и сообщит об этом мне, то я объявлю ему публично заслуженную хвалу".

Еще до истечения срока были даны три решения: одно принадлежало Якову Бернулли, другое — Лопиталю, третье было опубликовано без подписи автора. Иоганн Бернулли узнал автора "по его львиным когтям", как он выразился. Решение принадлежало И. Ньютону.

В последующие годы И. Бернулли, его старшим братом Яковом, Лейбницем и другими учеными решались отдельные вариационные задачи. Однако честь создания единого метода вариационных проблем исключительно и безраздельно принадлежит Леонарду Эйлеру (L. Euler, 1707—1783).

Еще в 1732 году (т. е. когда Эйлеру было всего 25 лет) им была выполнена работа "Общее решение изопериметрической задачи, взятой в самом общем смысле". В ней Эйлер рассматривает уже не отдельные частные проблемы, а вообще "задачи, где отыскивают кривые, обладающие максимальным или минимальным свойством".

В последующие годы Л. Эйлер не раз возвращался к вариационным проблемам и, наконец, в 1744 году подвел итоги своей работы в большом трактате "Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле". В 1934 году вышел русский перевод этой замечательной книги [47][*].

---

[*] Список литературы приведен в конце главы. Цифры в квадратных скобках обозначают номер в этом списке.

В отличие от своих предшественников, Эйлер рассматривает конкретные вариационные задачи как частный случай общей проблемы: "найти кривую $y(x)$, доставляющую экстремум некоторому «интегральному выражению» вида:

$$W = \int_{x_0}^{x_1} Z(x; y; \dot{y}; \ldots y^{(n)}) dx, \tag{1}$$

т. е. в нашей терминологии — функционалу, зависящему от независимой переменной x, искомой функции y и ее производных вплоть до произвольного порядка".

Эйлер нашел, что искомая кривая должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$Z_y - \frac{d}{dx} Z_{\dot{y}} + \frac{d^2}{dx^2} Z_{\ddot{y}} - \ldots = 0\,. \tag{2}$$

При выводе уравнения (2) Эйлер приближенно заменял искомую кривую $y(x)$ на ломаную линию с вершинами в точках y_0; y_1; … y_{n-1} (рис. 12.1).

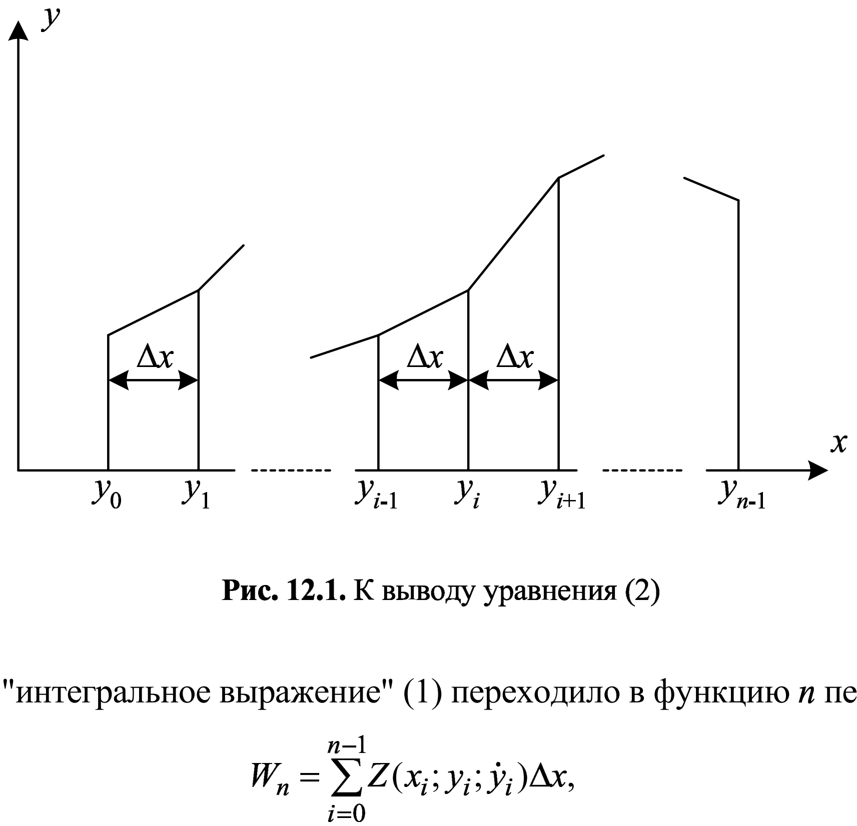


Рис. 12.1. К выводу уравнения (2)

При этом "интегральное выражение" (1) переходило в функцию n переменных:

$$W_n = \sum_{i=0}^{n-1} Z(x_i; y_i; \dot{y}_i)\Delta x, \tag{3}$$

где $\dot{y}_i = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}$ (для определенности в дальнейшем рассматриваем частный случай, когда подынтегральное выражение зависит только от x, y и $\dot{y}$; с рассмотрения этого частного случая начинал и сам Эйлер). Если на ломаной линии достигается экстремум, то, как уже было хорошо известно во времена Эйлера, все производные $\dfrac{\partial W_n}{\partial y_i}$ должны быть равны нулю. Из всех членов суммы W_n от y_i зависят только два: член $Z(x_{i-1}; y_{i-1}; \dot{y}_{i-1})\Delta x$ и член $Z(x_i; y_i; \dot{y}_i)\Delta x$, причем член с индексами i зависит от y_i; как непосредственно, так и через третий аргумент $\dot{y}_i$, а член с индексами i–1 зависит от y_i только через третий аргумент: $\dot{y}_{i-1} = \dfrac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}$.

Следовательно $\dfrac{\partial W_n}{\partial y_i} = Z_y(x_i; y_i; \dot{y}_i)\Delta x - Z_{\dot{y}}(x_i; y_i; \dot{y}_i) + Z_{\dot{y}}(x_{i-1}; y_{i-1}; \dot{y}_{i-1})$.

(Эйлер пользовался несколько отличными обозначениями.)

А это выражение можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial W_n}{\partial y_i} = \left[Z_y(x_i; y_i; \dot{y}_i) - \frac{\Delta Z_{\dot{y}}(x_i; y_i; \dot{y}_i)}{\Delta x} \right] \Delta x, \tag{4}$$

где

$$\Delta Z_{\dot{y}} = Z_{\dot{y}}(x_i; y_i; \dot{y}_i) - Z_{\dot{y}}(x_{i-1}; y_{i-1}; \dot{y}_{i-1}).$$

Эйлер затем переходил к пределу при $n \to \infty$; $\Delta x \to 0$ и получал необходимое условие того, что на плавной кривой достигается экстремум — знаменитое уравнение

$$Z_y - \frac{d}{dx} Z_{\dot{y}} = 0, \tag{5}$$

названное впоследствии уравнением Эйлера. Для общего случая, когда z зависит не только от $\dot{y}$, но от $\ddot{y}; y^{(3)}$ и вообще от производных любого порядка, Эйлер аналогичным путем вывел уравнение (2), за которым, однако, в дальнейшем закрепилось название "уравнение Эйлера—Пуассона". Исторически это неправильно, поскольку уравнение (2) было выведено и исследовано Эйлером в 1744 году, задолго до рождения Пуассона (Poisson, 1780—1840).

В дальнейшем, при решении конкретных примеров, Эйлер непосредственно пользуется формулой (2), сводя тем самым вариационную проблему к задаче интегрирования дифференциального уравнения. Таким образом, Эйлер создал алгоритм решения вариационных задач.

В том же трактате 1744 года Эйлер указал те частные случаи (с тех пор неизменно приводимые в учебниках вариационного исчисления), когда интегрирование уравнения (5) упрощается и выполняется в квадратурах, а именно:

1. Z не зависит явно от x.
2. Z не зависит явно от y.
3. Z зависит только от $\dot{y}$.
4. Z зависит от $\dot{y}$ линейно.

Помимо функционалов вида (1) Эйлер исследует также функционалы, являющиеся произведением, частным или вообще произвольной функцией от определенных интегралов W.

Интересно отметить, что эти важные для приложений функционалы уже не рассматривались в более поздних учебниках по вариационному исчислению. Когда мне пришлось столкнуться с практическими задачами, приводящими к подобным функционалам, то существенную помощь в решении этих задач принесло обращение к первоисточнику, к трактату Л. Эйлера [47].

Наконец, Эйлер рассмотрел также задачи, в которых функция $y(x)$, доставляющая экстремум функционалу (1), должна была удовлетворять дополнительным условиям (например, длина кривой, т. е. ее периметр, должна быть равна заданной длине L), и дал общий алгоритм решения подобных (изопериметрических) задач.

Вообще, богатство содержания трактата, опубликованного Эйлером в 1744 году, изумительно, хотя стиль изложения, разумеется, сильно отличается от современных стандартов. Предельный переход от условия (4) к уравнению (5) Эйлер не обосновывает, достаточных условий не рассматривает. Даже простое условие (знак выражения $Z_{\dot{y}\dot{y}}$), позволяющее отличать, достигается на решениях уравнения (5) максимум или минимум функционала, Эйлером не использовалось и было найдено Лежандром (Legendre, 1752—1833) лишь в 1786 году. Вместо этого условия Эйлер каждый раз исследует физический смысл задачи и из анализа физического смысла заключает, будет ли разыскиваемая им кривая доставлять максимум или минимум. Вообще, надо подчеркнуть, что Эйлер смотрит на уравнение (2) не как на формальный алгоритм, который позволяет мозгу отдохнуть и заменить размышление и анализ конкретной задачи чисто формальными операциями. Для Эйлера уравнение (2) только помогает думать и ценно тем, что позволяет сильно сократить круг функций, "подозрительных" в отношении экстремума функционала (1). Коль скоро уравнение (2) найдено, то функции, доставляющие экстремум (если, разумеется, он существует и достигается в классе кусочно-гладких функций), можно искать только среди его решений. Это резко сокращает круг поисков, но не заменяет целиком содержательного исследования задачи чисто формальными вычислениями. К этому Эйлер и не стремился (поэтому критику уравнения Эйлера, приведенную, например, в [48], нельзя признать справедливой).

Возвращаясь к выводу уравнения (2), подчеркнем еще раз, что фактически Эйлер сводит вариационную задачу к задаче на обычный экстремум функции n переменных с последующим переходом к пределу. Законность предельного перехода Эйлером не обосновывалась.

Недостатки метода Эйлера, громоздкого даже для функционалов, зависящих от одной переменной, особенно резко ощущались при исследовании задач на экстремум кратных интегралов.

Создание метода исследования, специфического для вариационных задач, — метода вариаций — связано с именем Лагранжа (Lagrange, 1736—1813). Первое изложение своего метода Лагранж дал в письме к Эйлеру от 12 августа 1755 г. Эйлер уже был тогда всемирно известным ученым, Лагранжу было 19 лет, и он еще не опубликовал ни одной научной работы. Эйлер немедленно ответил на письмо Лагранжа, горячо одобряя новый метод, и между ними установилась переписка, продолжавшаяся много лет. По рекомендации Эйлера Лагранж был в 1756 г. избран иностранным членом Берлинской академии. В письмах юного Лагранжа Эйлер нашел то, что он давно искал — простой и удобный аналитический метод исследования.

В последующие годы Эйлер интенсивно работал над усовершенствованием и развитием метода Лагранжа. Однако Эйлер не публиковал своих результатов, ожидая публикации работ Лагранжа. 2 октября 1759 г. Эйлер пишет Лагранжу: "Твое аналитическое решение изопериметрической проблемы содержит, насколько я вижу, все, что только можно желать в этой области, и я чрезвычайно рад, что эта теория, которой после моих первых попыток я занимался едва ли не один, доведена тобою до величайшего совершенства.

Важность вопроса побудила меня к тому, что я с помощью твоего освещения сам вывел аналитическое решение; я, однако, решил скрывать это, пока ты сам не опубликуешь свои результаты, так как я никоим образом не хочу отнимать у тебя часть заслуженной тобою славы".

Работы Лагранжа были опубликованы в 1760—1762 годах. В них Лагранж вводит понятие о производной интегрального выражения (в современных терминах — функционала) и вводит по аналогии с дифференциалом d новый знак δ — знак вариации. Если функционал $\int_a^b F(x;y;\dot{y})dx$ достигает на кривой $y(x)$ экстремума, то, считает очевидным Лагранж, имеем:

$$\delta\int_a^b F(x;y;\dot{y})dx = 0,$$

и тогда

$$\int_a^b \delta F(x;y;\dot{y})dx = 0\,.$$

По аналогии с соотношением для дифференциалов

$$dF = F_y dy + F_{\dot{y}} d\dot{y} \tag{6}$$

Лагранж пишет

$$\delta F = F_y \delta y + F_{\dot{y}} \delta\dot{y}, \tag{7}$$

и тогда

$$\delta\int_a^b F(x;y;\dot{y})dx = \int_a^b (F_y \delta y + F_{\dot{y}} \delta\dot{y})dx. \tag{8}$$

Ко второму члену в формуле (8) Лагранж применяет интегрирование по частям:

$$\int_a^b F_{\dot{y}} \delta\dot{y}dx = F_{\dot{y}} \delta y\Big|_a^b - \int_a^b \delta y \frac{d}{dx} F_{\dot{y}} dx,$$

и тогда получает окончательно

$$\delta\int_a^b F dx = \int_a^b \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{\dot{y}} \right) \delta y dx + F_{\dot{y}} \delta y\Big|_a^b. \tag{9}$$

Приравняв нулю подынтегральное выражение, Лагранж получает уравнение Эйлера, а внеинтегральный член позволяет найти условия на концах искомой кривой.

Таким образом, метод Лагранжа позволил более просто вывести уравнение Эйлера, распространить его на кратные интегралы, а также дал возможность решать задачи на экстремум не только с закрепленными, но и со свободными концами искомой кривой.

Однако новый метод Лагранжа встретил холодное отношение современников и не сразу получил признание. Частично это было связано и с тем, что Лагранж важнейшую формулу (7) вводил просто по аналогии с известной из дифференциального исчисления формулой (6), и справедливость новой формулы (7) отнюдь не была очевидна — поэтому новый метод и встретили с недоверием. Для его развития и популяризации снова много сделал Эйлер, который, в частности, и предложил назвать новый алгоритм Лагранжа методом вариаций, а математическую дисциплину, изучающую экстремумы интегралов, — вариационным исчислением. Так она с тех пор и называется.

В своих работах, опубликованных в 1766 г., Эйлер разъяснил, что в вариационном исчислении искомая кривая, доставляющая экстремум, сравнивается с бесконечно близкой к ней кривой, причем вариации δy и $\delta\dot{y}$ есть не что иное, как бесконечно малые приращения $y(x)$ и ее производной при переходе от искомой кривой к соседней. Выяснилось, что в методе вариаций изучается разность между значениями интегралов, взятых на искомой кривой, и кривой, близкой к ней:

$$\Delta J = \int\limits_a^b F(x; y+\delta y; \dot{y}+\delta\dot{y})dx - \int\limits_a^b F(x; y; \dot{y})dx. \tag{10}$$

Разлагая эту разность в ряд Тейлора, получаем:

$$\Delta J = \int\limits_a^b (F_y\delta y + F_{\dot{y}}\delta\dot{y})dx + \frac{1}{2}\int\limits_a^b (F_{yy}\delta y^2 + 2F_{y\dot{y}}\delta y\delta\dot{y} + F_{\dot{y}\dot{y}}\delta\dot{y}^2)dx,$$

причем величины первого порядка малости относительно δy и $\delta\dot{y}$ составляют первую вариацию интеграла:

$$\delta J = \int\limits_a^b (F_y\delta y + F_{\dot{y}}\delta\dot{y})dx, \tag{11}$$

а величины второго порядка малости — вторую вариацию $\delta^2 J$.

Для существования экстремума необходимо, чтобы первая вариация интеграла равнялась нулю. Из условия $\delta J = 0$, интегрируя по частям второй член в формуле (9), получаем снова уравнение (5). Так Эйлер разъяснил окончательно существо методов вариационного исчисления. Изучение знака второй вариации позволило в дальнейшем проанализировать достаточные условия экстремума.

12.2. Достаточные условия

Вторая вариация функционала подверглась детальному исследованию в работах известного французского математика, члена Академии наук Адриана Мари Лежандра (Legendre, 1752—1833).

С помощью интегрирования по частям он привел вторую вариацию $\delta^2 J$ функционала $J=\int\limits_a^b F(x;y;\dot{y})dx$

$$\delta^2 J=\frac{1}{2}\int\limits_a^b (F_{yy}\delta y^2+2F_{y\dot{y}}\delta y\delta\dot{y}+F_{\dot{y}\dot{y}}\delta\dot{y}^2)dx \tag{12}$$

к следующему виду:

$$\delta^2 J=\int\limits_a^b (P\delta y^2+R\delta\dot{y}^2)dx, \tag{13}$$

где $$P=\frac{1}{2}\left(F_{yy}-\frac{d}{dx}F_{\dot{y}y}\right);\ R=\frac{1}{2}F_{\dot{y}\dot{y}}.$$

Для того чтобы функция $y(x)$, удовлетворяющая уравнению Эйлера и, следовательно, обращающая в нуль первую вариацию, доставляла минимум функционалу, необходимо, чтобы вторая вариация была положительна. Однако между вариацией искомой функции δy и вариацией ее производной $\delta\dot{y}$ всегда может оказаться выполненным неравенство

$$\delta y^2 << \delta\dot{y}^2. \tag{14}$$

Оно будет выполнено, например, если δy — функция малая, но достаточно быстро колеблющаяся; тогда $\delta\dot{y}$ может оказаться в любое число раз больше, чем δy. Но раз так, то необходимым условием положительности второй вариации будет условие:

$$F_{\dot{y}\dot{y}}\ge 0, \tag{15}$$

и это условие, таким образом, необходимо для того, чтобы на функции $y(x)$ достигался минимум функционала. Необходимым условием максимума будет неравенство обратного знака.

Лежандр пытался доказать, что выполнение усиленного условия (15) — неравенства $F_{\dot{y}\dot{y}}>0$ — уже не только необходимо, но и достаточно для минимума функционала. Разберем подробнее эту поучительную ошибку Лежандра. Поскольку на концах кривой, при $y=a$ и $y=b$, вариация δy обращается в нуль, то для любой дифференцируемой функции $\omega(x)$ будет

$$\int\limits_a^b (\delta y^2\dot{\omega}+2\delta y\delta\dot{y}\omega)dx=\int\limits_a^b \frac{d}{dx}(\delta y^2\omega)=0. \tag{16}$$

Поэтому, прибавив к правой части равенства (13) выражение (16), равное нулю, приведем вторую вариацию к виду:

$$\delta^2 J = \int_a^b [R\delta\dot{y}^2 + 2\delta y\delta\dot{y}\omega + (P+\dot{\omega})\delta y^2]dx \tag{17}$$

и попробуем подобрать функцию $\omega(x)$ так, чтобы из выражения в квадратных скобках можно было бы выделить полный квадрат. Пусть функция $\omega(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$R(P+\dot{\omega}) = \omega^2 . \tag{18}$$

Тогда, подставив (18) в (17), получим:

$$\delta^2 J = \int_a^b \left[R\delta\dot{y}^2 + 2\delta y\delta\dot{y}\dot{\omega} + \frac{\delta y^2\omega^2}{R} \right] dx = \int_a^b R\left[\delta\dot{y}^2 + \frac{\delta y\omega}{R} \right]^2 dx . \tag{19}$$

Формула (19) свидетельствует, считал Лежандр, что знак второй вариации совпадает со знаком выражения $R = F_{\dot{y}\dot{y}}$, и поэтому выполнение неравенства $F_{\dot{y}\dot{y}} > 0$ достаточно для того, чтобы функция $y(x)$, удовлетворяющая уравнению Эйлера, доставляла минимум функционалу.

Решающие возражения против утверждения Лежандра выставил Лагранж в 1797 г. Он заметил, что доказательство Лежандра основано на следующем допущении — если подынтегральная функция на некотором интервале положительна, то и определенный интеграл, взятый на этом же интервале, будет положительным. Однако это допущение верно лишь в том случае, если подынтегральная функция на рассматриваемом интервале конечна (т. е. если интеграл — "собственный"). Если же подынтегральная функция хотя бы в одной точке обращается в бесконечность, то интеграл от нее (теперь это уже "несобственный" интеграл) может быть и отрицательным. И Лагранж привел пример интеграла от положительной функции

$$\int_a^b \frac{dx}{(1-x)^2} = \left. \frac{x}{1-x} \right|_a^b , \tag{20}$$

который становится отрицательным при $a = 0{,}5$; $b = 2$. Следовательно, для уверенности в положительности второй вариации надо удостовериться, что функция $\omega(x)$ — решение уравнения (18) — конечна на всем интервале $a \le x \le b$, а это справедливо далеко не для всех P и R. Так, если $R = -1$ и $P = 1$, то уравнение (18) принимает вид $\dot{\omega} + 1 + \omega^2 = 0$, откуда $\omega = \mathrm{tg}(c - x)$, и в точках $x = c + \frac{2k+1}{2}\pi$ функция $\omega(x)$ обращается в бесконечность. После возражений Лагранжа стало ясно, что условие Лежандра само по себе еще не гарантирует существования экстремума.

Следующий важный шаг в исследовании вариационных задач был сделан немецким математиком Карлом Якоби (Jacobi, 1804—1851). Якоби родился в Потсдаме, в семье банкира, учился в Берлинском университете, сразу после окончания его начал работать в университете Кенигсберга, сперва доцентом, затем экстраординарным (с 1827 г.) и ординарным (с 1831 г.) профессором. Таким образом, Якоби был исключительно преподавателем. Мы уже отмечали ранее, что это характерно уже для XIX века; математики XVIII века, как правило, соединяли преподавание с практической деятельностью в области прикладной математики. Это изменение бытия математиков не могло не отразиться на изменении их сознания, и в этом отношении очень характерна полемика между Якоби и представителем предшествующего поколения Ж. Б. Фурье (Fourier, 1768—1830): "Господин Фурье, — говорил Якоби в своей речи в 1830 г., — считал, что главной целью математики является общественная польза и объяснение явлений природы; но как философ он должен был знать, что единственная цель науки — это служить доблести человеческого ума и что поэтому какой-нибудь вопрос теории чисел стоит не меньше, чем вопрос о системе мира".

Якоби отличался пылким и страстным характером. "Его избрание профессором Кенигсбергского университета, — рассказывает о нем Феликс Клейн, — натолкнулось на известные затруднения потому, что каждому из членов факультета он успел сказать что-нибудь неприятное. В конце концов, все же победило неоспоримое значение его научных трудов".

В Кенигсберге Якоби быстро стал главой математической школы — кружка талантливых учеников, сплотившихся вокруг учителя и его идей. Мы еще будем упоминать в этой главе об учениках Якоби — Гессе и Клебше — продолжавших работу Якоби в области вариационного исчисления. "Влияние, которое имел Якоби на своих учеников, совершенно исключительно, — свидетельствует Ф. Клейн. — Самые упорные натуры подчинялись его образу мышления, он увлекал всякого к вершинам математического честолюбия, к пламенному интересу к указываемой им постановке очередной проблемы дня".

С той же страстностью Якоби принял участие в буржуазно-демократической революции в Германии в 1848 г. Поражение революции омрачило последние годы Якоби, ненадолго пережившего ее; он скончался в 1851 г.

Важность вклада, внесенного К. Якоби, в вариационное исчисление, заключается в том, что он впервые перешел от исследования изолированных кривых — решений уравнения Эйлера — в дальнейшем эти кривые стали называться экстремалями — к исследованию семейств таких кривых, выходящих из одной точки, к исследованию поля.

Якоби подметил (и опубликовал в 1837 г.), что на экстремалях перестает достигаться экстремум интеграла

$$J=\int_a^b F(x;y;\dot{y})dx,$$

если бесконечно близкие экстремали, выходящие из точки *a*, пересекаются между собой ранее точки *b*. Таким образом, Якоби показал, что локальных условий — условий, проверяемых в каждой точке экстремали, таких условий, как уравнение Эйлера и неравенство Лежандра $F_{\dot{y}\dot{y}}>0$, — недостаточно для обеспечения экстремума, и необходимо дополнительное условие, относящееся к отрезку $a\le x\le b$ в целом; это условие, называемое с тех пор условием Якоби, заключается в том, что экстремаль, соединяющая точки *a* и *b*, не должна пересекаться с бесконечно близкими к ней экстремалями, выходящими из точки *a*.

Двадцать лет спустя, в 1857 г. ученик Якоби Гессе (Hesse, 1811—1874) придал условию Якоби аналитическую форму и показал его связь с проблемой положительности интеграла (19).

Действительно, обозначим через $h(x)$ разность ординат между двумя бесконечно близкими экстремалями $y(x)$ и $y(x)+h(x)$. Так как $y(x)+h(x)$ является экстремалью и удовлетворяет уравнению Эйлера, то

$$F_y(x;y+h;\dot{y}+\dot{h})-\frac{d}{dx}F_{\dot{y}}(x;y+h;\dot{y}+\dot{h})=0. \qquad (21)$$

Воспользовавшись формулой Тейлора и сохраняя члены только первого порядка малости, получим:

$$Ph-\frac{d}{dx}(R\dot{h})=0. \qquad (22)$$

Это есть линейное дифференциальное уравнение относительно расстояния *h* между двумя бесконечно близкими экстремалями. Его называют уравнением Якоби. Условие Якоби пересечения экстремалей можно теперь выразить аналитически — как условие, что решение уравнения Якоби (22) с начальными условиями $h(a)=0$, $\dot{h}(a)=1$ не обращается в нуль внутри отрезка $a\le x\le b$.

Заметим, что если в уравнении Лежандра (18) произвести замену переменных

$$\omega = -\frac{\dot{h}}{h} R, \qquad (23)$$

то уравнение (18) примет вид:

$$Ph - \frac{d}{dx}(R\dot{h}) = 0, \qquad (24)$$

т. е. перейдет в уравнение Якоби. Если $h(x)$ не обращается в нуль на отрезке $a \le x \le b$, то на этом отрезке существует и конечно (при $R > 0$) решение $\omega(x)$ уравнения (18), а это и является (как уже было нами показано) достаточным условием положительности второй вариации.

Ученик Якоби Рудольф Клебш (Clebsch, 1833—1872) исследовал вторую вариацию у функционалов, зависящих от нескольких переменных, и нашел условие различения максимума от минимума, обобщающее условие Лежандра.

12.3. Вариационные принципы

Условие Якоби позволило существенно уточнить понимание вариационных принципов, важность которых для построения механики была осознана в XVIII веке. Впрочем, еще в XVII веке Пьер Ферма подметил, что закон преломления света можно вывести, если принять общий принцип: "Природа действует наиболее легкими и доступными путями". В соответствии с этим принципом луч света при движении в различных средах будет выбирать такой путь, движение по которому занимает кратчайшее время; определяя этот путь, мы получим закон преломления света.

В XVIII веке Пьер Мопертюи (Maupertuis, 1698—1759), президент Берлинской академии наук, выдвинул более общий принцип: "Количество действия, необходимое для того, чтобы произвести некоторое изменение в природе, является наименьшим возможным". Этот принцип, действительно, позволил выработать общую точку зрения на многие законы природы. В настоящее время под "действием" понимают произведение энергии на время и "принцип наименьшего действия" записывают в следующей формулировке (несколько отличной от первоначальной формулировки Мопертюи), предложенной Гамильтоном (Hamilton, 1805—1865): "При движении тела в потенциальном поле на траектории движения достигает минимума «интеграл действия»:

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt, \qquad (25)$$

где $L = T - U$, причем T — кинетическая энергия тела, а U — его потенциальная энергия". Так, в частности, для тела с массой m, движущегося в однородном поле тяготения $U = mgx$, где g — ускорение свободного падения, а $T = \frac{m}{2}\dot{x}^2$, интеграл (25) принимает вид:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 - mgx)dt\right). \tag{26}$$

Решив уравнение Эйлера для интеграла (26), найдем известный закон изменения ординаты x свободно брошенного тела: $x = v_0 t - g\frac{t^2}{2}$. Точно так же можно найти законы движения тел в самых разнообразных силовых полях. Все они вытекают из одного общего принципа. Однако при такой формулировке принципа наименьшего действия в нем остается известный налет теологии и мистики — получается, что брошенное тело уже в начальный момент времени, при $t = t_1$, "знает", как нужно ему двигаться, чтобы "интеграл действия" в пределах от t_1 до t_2 обратился в минимум. Сам Мопертюи не имел ничего против такого истолкования — наоборот, он считал, что он нашел "математическое" доказательство бытия божия: кто же кроме Бога, доказывал Мопертюи, мог указать каждому телу при $t = t_1$ такое движение, которое приведет к минимуму "действия" на всем интервале $t_1 \le t \le t_2$.

"Не в мелких деталях, не в частях Вселенной, отношения которой мы слишком мало знаем, нужно искать Верховное Существо, — писал Мопертюи в 1746 г., — а в явлениях, всеобщность которых не подвержена никаким исключениям, а простота их полностью поддается нашему обозрению... "

"Я осмелюсь сказать, — продолжал Мопертюи, — что открыл универсальный принцип, на котором основываются все законы... это — принцип наименьшего действия; принцип такой мудрый, такой достойный Верховного Существа... Законы Движения и Покоя, выведенные из этого принципа, являются точно теми, какие наблюдаются в Природе; мы можем восхищаться результатами применения этого принципа ко всем явлениям. Движение животных, произрастание растений, вращение Звезд являются только его следствиями, и зрелище Вселенной становится еще более величественным, еще более прекрасным, еще более достойным своего Творца, когда становится известным, что небольшое число законов, наиболее мудро установленных, достаточно для всех ее движений... Какое удовольствие для человеческого ума, рассматривая эти законы, являющиеся принципом Движения и Покоя всех тел Вселенной, найти в них доказательство существования Того, кто ею управляет" (цитирую по книге [8]).

Доводы Мопертюи вызвали в XVIII веке большую полемику. Решающий удар по его построениям нанесли результаты Якоби, показавшего, что действительное движение может не доставлять ни максимума, ни минимума интегралу (25), а лишь обращать в нуль его первую вариацию, если на действительном движении не выполняется условие Якоби. Рассмотрим, для примера, движение тел, брошенных с одной и той же скоростью, но под различными углами к горизонту. Если этот угол больше 45°, то действительное движение тела по экстремали (параболе) не доставляет ни максимума, ни минимума интегралу (25), поскольку экстремаль в этом случае пересекается с экстремалями, сколь угодно близкими к ней, и условие Якоби не выполняется (рис. 12.2). Действительно, если тело брошено под большим углом к горизонту (больше 45°), то чем больше этот угол, тем меньше расстояние, которое тело пролетит ($L_2 < L_1$). Поэтому становится неизбежным пересечение соседних экстремалей.

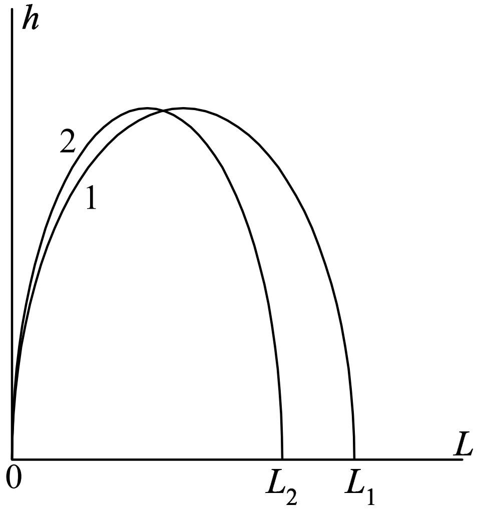


Рис. 12.2. Движение тел, брошенных с одной и той же скоростью, но под различными углами к горизонту

Принцип наименьшего действия более правильно называть "принципом стационарного действия" и формулировать следующим образом: "На действительной траектории движения обращается в нуль первая вариация интеграла (25)". При такой трактовке принципа наименьшего действия в нем не остается ничего теологического.

Мы знаем, что многие законы природы могут быть записаны в форме дифференциальных уравнений. Но эти уравнения можно рассматривать как уравнения Эйлера для некоторого функционала. И тогда действительное движение тел, подчиняющееся этому дифференциальному уравнению, обязательно обратит в нуль первую вариацию функционала. А если вдобавок оказалось выполнено условие Якоби, и $F_{\dot{y}\dot{y}} > 0$, то действительное движение доставит функционалу минимум — без всякого вмешательства Верховного Существа. Так, движение тела в однородном поле тяготения подчиняется уравнению

$$m\ddot{x} = mg, \tag{27}$$

которое является — как легко проверить — уравнением Эйлера для функционала (26).

Таким образом, законы природы можно записывать в двух равносильных формах: в форме дифференциальных уравнений и в форме вариационного принципа, из которого эти уравнения будут следовать. Вторая форма записи является во многих случаях более удобной. Так, например, при записи в виде дифференциальных уравнений форма закона зависит от выбора системы координат, в то время как вариационный принцип сохраняет свою форму в любых координатах, что очень удобно. И если, например, кинетическая и потенциальная энергия системы (а с ними и их разность $L = T - U$) зависит — как это часто бывает — от некоторых обобщенных координат q_i и обобщенных скоростей $\dot{q}_i$, то из уравнений Эйлера для "интеграла действия" (25) непосредственно следуют знаменитые "уравнения Лагранжа":

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{28}$$

(уравнения второго порядка), сыгравшие столь большую роль в истории теоретической механики.

Вариационные принципы обладают большой эвристической ценностью. В частности, они послужили путеводной нитью при разработке основ квантовой механики [8].

В заключение рассмотрим один вариационный принцип, историю которого еще нельзя считать законченной. Известно, какую большую роль в понимании природных процессов играет второе начало термодинамики, которое можно сформулировать следующим образом: "Изолированная система стремится с течением времени к положению равновесия, в котором энтропия системы S максимальна, а скорость возрастания ее обращается в нуль". Однако второе начало термодинамики справедливо лишь для изолированных систем. Неизолированные системы — системы, которые обмениваются с окружающей средой энергией или веществом — не имеют равновесного состояния, в котором скорость возрастания энтропии обращалась бы в нуль. С течением времени они стремятся не к равновесному, а к стационарному состоянию. Естественно предположить, что стационарное состояние неравновесной системы характеризуется тем, что скорость возрастания энтропии в нем наименьшая по сравнению с нестационарными режимами — т. е. с течением времени скорость возрастания энтропии в неизолированной системе стремится к минимуму. Это предположение было выдвинуто в 40-х годах XX века бельгийским ученым (родившимся в Москве в 1917 г.) Ильей Романовичем Пригожиным. Предположение Пригожина долгое время считалось доказанным и играло важную роль в современной физике. Однако еще в 1966 г. против предположения Пригожина был выставлен контрпример [34]. Контрпример относился к процессам теплопереноса, где скорость возрастания энтропии (в отличие от более сложных физических процессов) может быть вычислена аналитически.

Была рассмотрена изотропная пластина, в которой температура является функцией координаты x. Одна сторона пластины ($x = 0$) находится в контакте с источником тепла с абсолютной температурой T_1, вторая сторона ($x = 1$) — в контакте с источником тепла с температурой T_2. Боковые стороны теплоизолированы. Выделим внутри пластины элементарный слой толщиной dx. Тогда через слой будет проходить поток тепла

$$J_q = \lambda \frac{dT}{dx},$$

где λ — коэффициент теплопроводности. Вследствие того, что поток тепла входит в слой при температуре T, а выходит при $T - \frac{\partial T}{\partial x} dx$, то интенсивность возникновения энтропии в элементарном слое, как известно, равна

$$\sigma = J_q \left(\frac{1}{T - \frac{\partial T}{\partial x} dx} - \frac{1}{T} \right) = \lambda \frac{1}{T^2} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 dx,$$

а скорость возрастания энтропии во всей пластине равна интегралу:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} \sigma dx = \lambda \int_{x_1}^{x_2} \frac{\dot{T}^2}{T^2} dx. \tag{29}$$

Поскольку выражение, стоящее под знаком интеграла в формуле (29), не зависит от x, то может быть сразу написан первый интеграл уравнения Эйлера:

$$F - \dot{y}F_{\dot{y}} = C.$$

А раз в данном случае $F = \dfrac{T^2}{T^2}$ и $F_{\dot{y}} = \dfrac{2\dot{T}}{T^2}$, то первый интеграл уравнения Эйлера для функционала (29) имеет вид $\dfrac{\dot{T}^2}{T^2} = C$, и его решением является функция

$$T(x) = c_2 e^{c_1 x}.$$

Отсюда следует, что минимум интеграла (29) достигается при распределении температуры $T(x) = c_2 e^{c_1 x}$, отличном от стационарного распределения, когда

$$T(x) = c_1 x + c_2.$$

Так, если $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $T(0) = 1$, $T(1) = e$, то в стационарном режиме $T(x) = 1 + (e - 1)x$, и скорость возникновения энтропии $J = \lambda \dfrac{(e-1)^2}{e} = 1{,}087\lambda$, в то время как в нестационарном режиме $T(x) = e^x$, удовлетворяющем тем же граничным условиям, скорость возникновения энтропии будет равна $J = \int\limits_0^1 \lambda dx = \lambda$ — или более чем на 8% меньше, чем в стационарном. Очевидно, что предположение Пригожина о минимуме скорости возрастания энтропии в стационарном состоянии неизолированной системы неверно и нуждается в дополнении и уточнении.

Причина ошибки заключается в том, что, производя расчеты скорости производства энтропии сразу для гораздо более сложного случая трехмерного распределения температур, И. Р. Пригожин пренебрег для упрощения малым отличием знаменателя $T^2(x)$ в формуле (29) от постоянной величины, и это привело его к неверному результату (см. вывод "принципа Пригожина" в книге [14]).

Популярность принципа Пригожина связана с тем, что он дает очень общую характеристику выделения стационарных процессов из нестационарных в самых сложных системах, для которых сколько-нибудь полную математическую модель или систему уравнений выписать невозможно. Поэтому принцип Пригожина широко использовался как в общих рассуждениях о протекании процессов в сложных физических или биологических системах, так и для решения некоторых сложных технических задач. Однако именно в технических задачах обнаружилась неверность решений, полученных при использовании принципа Пригожина, что и заставило произвести его тщательную проверку.

Результаты проверки, опубликованные в 1966 г. в [34], показали неуниверсальность принципа. Было доказано, что для систем, включающих теплоперенос, он не справедлив. Публикация [34] вызвала оживленную дискуссию. Наиболее интересным был ответ самого И. Р. Пригожина и его соавторов, опубликованный в монографии [13]. Признав, что в процессах теплопереноса минимум производства энтропии S действительно не достигается, авторы монографии [13] попытались спасти универсальность принципа Пригожина указанием на то, что в этих процессах в стационарном режиме достигает минимума производство так называемой "взвешенной энтропии" ST^2, равной произведению настоящей энтропии S (обычной энтропии физики) на квадрат абсолютной температуры T. Исследуя интеграл (29), нетрудно проверить, что производство "взвешенной энтропии" действительно минимально в стационарном режиме.

Однако "взвешенная энтропия" имеет и другую размерность и совсем другой физический смысл, чем настоящая энтропия. Так, в процессе выравнивания температуры соприкасающихся тел в процессе перехода тепла от горячего тела к холодному настоящая энтропия S, как известно, растет, а взвешенная энтропия ST^2 — убывает. Кроме того, остается неясным, в каких процессах и в каких системах в стационарном режиме достигает минимума производство настоящей энтропии S и в каких — "взвешенной энтропии". Поэтому переход к "взвешенной энтропии" означает, как было указано в [33], фактическое признание неуниверсальности принципа Пригожина, который поэтому не имеет эвристической силы. Однако это не было признано явно, и поэтому до последнего времени все еще широко распространено убеждение в универсальности принципа. Многие исследователи опираются на него и приходят к ошибкам. Так, в работе [37], исходя из этого принципа, выводилось распределение температур при поверхностном эффекте. Вывод недостоверен, поскольку не доказано, что в рассматриваемом случае принцип Пригожина справедлив. Как легко проверить путем исследования интеграла (29), принцип Пригожина неуниверсален даже для линейных систем и даже при малых отклонениях от равновесия.

12.4. Условный экстремум

Во многих случаях экстремум функционала отыскивается не среди произвольных функций (кривых), а в классе функций, удовлетворяющих дополнительным условиям. Подобные задачи называют задачами на условный экстремум, и первые из них были известны еще в Древней Греции. Одна из наиболее знаменитых — это изопериметрическая задача, когда из всех кривых, имеющих одну и ту же длину, один и тот же периметр, — т. е. из всех изопериметрических кривых, — ищут ту, которая ограничивает наибольшую площадь.

Как это часто бывало в Древней Греции, новую задачу сопроводили красивой легендой — рассказывали, что царица Дидона, основывая Карфаген, покупала у местных жителей землю для будущего города. Ей соглашались продать лишь участок земли, который можно охватить бычьей шкурой. Тогда Дидона разрезала шкуру на тонкие полоски, связала из них длинный ремень и расположила его так, чтобы охватить наибольшую площадь — т. е. решала именно изопериметрическую задачу, которую греки называли поэтому также "задачей Дидоны".

Метод решения изопериметрической и ей подобных задач был разработан Эйлером и опубликован в [47]. Эйлер рассматривал изопериметрические задачи общего вида — когда нужно найти функцию $y(x)$, доставляющую экстремум функционалу

$$J_1 = \int_a^b F_1(x; y; \dot{y})dx$$

при условии, что другой функционал,

$$J_2 = \int_a^b F_2(x; y; \dot{y})dx,$$

равен заданному значению J_{20}.

Для решения этой задачи Эйлер предложил и обосновал мнемоническое правило: искомая функция должна удовлетворять уравнению Эйлера для вспомогательного функционала

$$J = J_1 + \lambda_0 J_2,$$

где λ_0 — некоторая постоянная величина, которая потом определяется.

Для "задачи Дидоны" нужно было найти максимум площади, т. е. интеграла

$$J_1=\int_a^b ydx$$

при заданном значении длины кривой

$$J_2=\int_a^b \sqrt{1+\dot{y}^2}dx\,.$$

Составляя и решая уравнение Эйлера для вспомогательного функционала

$$J=\int_a^b (y+\lambda_0\sqrt{1+\dot{y}^2})dx,$$

получим уравнение экстремалей

$$(y-c_1)^2+(x-c_2)^2=\lambda_0^2$$

(оно приведено у Эйлера в [47] на стр. 350), где c_1 и c_2 — постоянные интегрирования, и убедимся, что это уравнение окружности радиуса λ_0. Если длина кривой равна s_0, то наибольшая площадь, охватываемая ею, равна $p=\dfrac{s_0}{4\pi}$ и достигается в том случае, если кривая является окружностью.

Теперь можно оценить, какого размера участок земли могла купить Дидона. Если считать, что площадь шкуры быка равнялась 4 м^2, и Дидона разрезала ее на ремни шириной 0,5 см, то длина ремня составила 800 метров, а площадь купленного участка $p=\dfrac{800^2}{4\pi}=50\,100$ м^2, или, примерно, 5,01 гектара. На такой площади, действительно, можно основать город, так что греческая легенда, во всяком случае, правдоподобна. Если бы Дидона располагала ремень по контуру квадрата, то она получила бы участок площадью 40 000 м^2 или на 21,5% меньше.

Помимо простейшей изопериметрической задачи с одним интегральным условием, Эйлер в [47] рассматривает и задачи, когда задано несколько подобных условий — т. е. когда требуется, чтобы несколько интегралов вида

$$J_i=\int_a^b F_i(x;y;\dot{y})dx$$

сохраняли заданное значение. В этом случае уравнение Эйлера составляется для вспомогательного функционала

$$J = J_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i J_i.$$

Не менее часто, чем интегральные условия, в практических задачах вариационного исчисления встречаются функциональные связи — когда, например, нужно найти две функции $y(x)$ и $z(x)$, доставляющие экстремум функционалу

$$J = \int_a^b F\ (x; y; \dot{y}; z; \dot{z}) dx$$

при условии, что эти функции связаны между собой уравнением:

$$\varphi(x;y;z) = 0,$$

называемым уравнением связи.

В 1788 г. Лагранж в своем трактате "Аналитическая механика" дал мнемоническое правило решения этой задачи: надо составить уравнения Эйлера для вспомогательного функционала

$$J_i = \int_a^b F_i(x; y; \dot{y}; z; \dot{z}) dx + \varphi(x; y; z)\lambda(x), \tag{30}$$

где $\lambda(x)$ — некоторая подлежащая определению функция от x (множитель Лагранжа). Всего для определения трех неизвестных функций $y(x)$, $z(x)$ и $\lambda(x)$ получаются три уравнения — два уравнения Эйлера для функционала (30) и уравнение связи, — позволяющие решить поставленную задачу. В той же работе 1788 г. "Аналитическая механика" Лагранж рассмотрел и обобщения этой задачи — когда задано не одно, а несколько уравнений связи или когда в уравнения связи входят не только сами функции $y(x)$, $z(x)$ и т. п., но и их производные.

Любопытно отметить, что первоначально знаменитое "правило множителей Лагранжа" было сформулировано именно для вариационных задач, и лишь 9 лет спустя, в "Теории аналитических функций" Лагранж формулирует его для задачи отыскания условного экстремума функции n переменных: для отыскания условного экстремума функции n переменных:

$$f_0(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

при условиях:

$$f_i(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0;\ \ i = 1, 2, \ldots m,$$

надо составить вспомогательную функцию:

$$L = f_0 + \lambda_1 f_1 + \ldots \lambda_m f_m ,$$

где λ_1, λ_2, $\ldots\lambda_m$ — числовые множители Лагранжа, и для этой функции решать задачу на безусловный экстремум.

Вот подлинная формулировка Лагранжа из его "Теории аналитических функций": "Можно высказать следующий общий принцип. Если ищется максимум или минимум некоторой функции многих переменных при условии, что между этими переменными имеется связь, задаваемая одним или несколькими уравнениями, то нужно к минимизируемой функции прибавить функции, задающие уравнения связи, умноженные на неопределенные множители, и искать затем максимум или минимум построенной суммы, как если бы переменные были независимы. Полученные уравнения, добавленные к уравнениям связи, послужат для определения всех неизвестных".

"Правило множителей" Лагранжа входит во все курсы математического анализа, широко применялось и применяется для решения самых разнообразных задач оптимизации. И только в начале XX века было замечено, что это знаменитое правило нуждается в уточнении. Рассмотрим простую задачу: найти минимум функции $f_0 = x_1 + x_2$ при условии, что $x_1^2 + x_2^2 = 0$. Здесь сразу видно, что единственным решением является $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. В то же время, составляя вспомогательную функцию:

$$L = x_1 + x_2 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2)$$

и приравнивая нулю производные:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 1 + 2\lambda_1 x_1 = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 1 + 2\lambda_1 x_2 = 0,$$

мы не получим правильного решения ни при каких конечных λ_1.

Причина достаточно ясна: уже само уравнение связи $x_1^2 + x_2^2 = 0$ дает единственное решение $x_1 = x_2 = 0$, и вопрос о минимуме суммы $x_1 + x_2$ теряет смысл.

Для восстановления справедливости "правила множителей" Лагранжа нужно писать вспомогательную функцию в виде:

$$L = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_m f_m$$

и рассматривать случай $\lambda_0 = 0$ как особый, но возможный. То же самое справедливо и относительно изопериметрической задачи: если мы ищем экстремум одного функционала при заданном значении другого, но это заданное значение экстремально для второго функционала, то вариация искомой кривой невозможна, мнемоническое правило в его первоначальном виде теряет смысл, но его можно восстановить, если вспомогательный функционал записывать в виде

$$J = \lambda_0 J_1 + \lambda_1 J_2$$

и не исключать особого случая $\lambda_0 = 0$. На эти обстоятельства указывали Вейерштрасс в 1877 г. и более подробно немецкий математик А. Кнезер (Kneser, 1862—1930) в своем учебнике по вариационному исчислению, вышедшему в 1900 г. Особый случай рассмотрен также авторами книги [1], которые подробно исследовали возникающие при этом трудности.

12.5. Сильный экстремум. Разрывные экстремали и экстремали с вертикальными отрезками

Новый этап развития вариационного исчисления во второй половине XIX века связан с именем Карла Вейерштрасса (Weierstras K., 1815—1897). До Вейерштрасса не различались понятия сильного и слабого экстремумов, хотя фактически обращение в нуль первой вариации являлось необходимым условием слабого относительного экстремума, поскольку значение функционала на экстремали сравнивалось с его значением на кривых, близких к экстремали, в смысле близости первого порядка (близость первого порядка — это малость модуля разности как между самими функциями, так и между их первыми производными; близость нулевого порядка — модуль разности между самими функциями мал, но максимум модуля расстояния между производными может и не быть малым).

Вейерштрасс впервые начал исследовать не только слабый, но и сильный экстремум — экстремум по сравнению с кривыми, находящимися в близости нулевого порядка.

Кроме того, до Вейерштрасса считали очевидным, что если функционал ограничен снизу, и существует экстремаль, доставляющая минимум, то наименьшее значение функционала как раз и достигается на экстремали. Вейерштрасс показал, что если даже функционал ограничен снизу, то его наименьшее значение может достигаться вообще за пределами рассматриваемого класса функций. Вейерштрасс привел простой пример — функционал:

$$J = \int_{-1}^{+1} x^2 \dot{y}^2 dx \tag{31}$$

с условиями на концах: $y(-1) = -1$; $y(1) = 1$.

Этот функционал не отрицателен и ограничен снизу значением нуль. Однако ни на какой непрерывной функции, соединяющей точки $x = -1$; $y = -1$ и $x = 1$; $y = 1$ минимальное значение, равное нулю, не достигается, поскольку на любой непрерывной функции, соединяющей эти точки, будут участки, где при $x \neq 0$ будет $\dot{y} \neq 0$, и поэтому на любой непрерывной функции минимум функционала (31) достигаться не будет. Минимум будет достигаться за пределами класса непрерывных функций, — а именно на разрывной функции: $y = -1$ для $-1 \le x < 0$ и $y = 1$ для $0 \le x \le 1$, т. е. на функции, совершающей скачок при $x = 0$.

Труды Вейерштрасса, продолженные в конце XIX века Д. Гильбертом (Hilbert, 1862—1943), завершили в основном построение здания классического вариационного исчисления. Дальнейшие работы были направлены на уточнение и дополнение отдельных частностей.

Так, например, Дюбуа-Реймон (Du Bois-Reymohd, 1831—1889) уточнил вывод уравнения Эйлера — он показал, что при его выводе нет необходимости делать допущение о непрерывности второй производной экстремали. Используя лемму, доказанную Дюбуа-Реймоном, можно показать, что на тех интервалах, где $F_{\dot{y}\dot{y}}$ сохраняет знак, вторая производная экстремали непрерывна.

В 1958—61 гг. Вадим Федорович Кротов (род. в 1932 г.) уточнил вопрос о классах кривых, на которых может достигаться экстремум простейшего функционала:

$$J = \int_a^b F(x; y; \dot{y}) dx.$$

Пример функционала (31), рассмотренного еще Вейерштрассом, показывает, что экстремум может, вообще говоря, достигаться на разрывных функциях или (если дополнить функцию в точке разрыва вертикальным отрезком) — на кривых с вертикальными отрезками. В. Ф. Кротов поставил вопрос: когда, в каких случаях экстремум функционала $J = \int_a^b F(x; y; \dot{y}) dx$ будет достигаться в классе кусочно-гладких функций и когда — в классе функций кусочно-непрерывных, имеющих разрывы. В. Ф. Кротов показал, что ответ на этот вопрос определяется поведением функции

$$W(x;y)=\lim_{\dot{y}\to\pm\infty}F(x;y;\dot{y})\cdot\frac{1}{\dot{y}},\qquad(32)$$

которую правильно будет назвать критерием Кротова. Возможны следующие случаи:

1. Не существует ни правого, ни левого конечных пределов критерия (32) — т. е. при $\dot{y}\to\infty$ будет $W\to+\infty$, а при $\dot{y}\to-\infty$ — соответственно $W\to-\infty$, или наоборот.

   В этом случае экстремум может достигаться только на кусочно-гладких функциях; вертикальных отрезков у кривых, доставляющих экстремум, быть не может.

2. Правый и левый пределы существуют в конечном числе точек внутри интервала $a\le x\le b$. В этом случае кривая, доставляющая экстремум, может в этих точках — и только в них — иметь вертикальные отрезки. Пример: функционал (31) имеет правый и левый конечные пределы для функции (32) в точке $x=0$, в других точках интервала $-1\le x\le +1$ конечных пределов нет.

3. Правый и левый пределы существуют в любой точке интервала $a\le x\le b$. В этом случае экстремум может достигаться на кривых, имеющих в общем случае любое число вертикальных отрезков. Такие кривые могут иногда носить необычайно причудливый характер (примеры приведены в [33], стр. 94—100).

Основная идея доказательства может быть изложена следующим образом. Предположим, что экстремум функционала $J=\int_a^b F(x;y;\dot{y})dx$ достигается на кривой, имеющей при $x=x_0$ вертикальный отрезок от $y=y_1$ до $y=y_2$; его можно рассматривать, как предел наклонных прямых при $\dot{y}\to\pm\infty$ (рис. 12.3). Для вычисления значения функционала на вертикальном отрезке достаточно поменять ролями x и y, и тогда значение J_1 функционала на вертикальном отрезке будет равно:

$$J_1=\lim_{x_1\to x_2}\int_{x_1}^{x_2}F(x;y;\dot{y})dx=\int_{y_1}^{y_2}\lim_{\dot{y}\to\pm\infty}F\left(x;y;\frac{1}{dx/dy}\right)\frac{dx}{dy}dy=\int_{y_1}^{y_2}W(x;y)dy.\qquad(33)$$

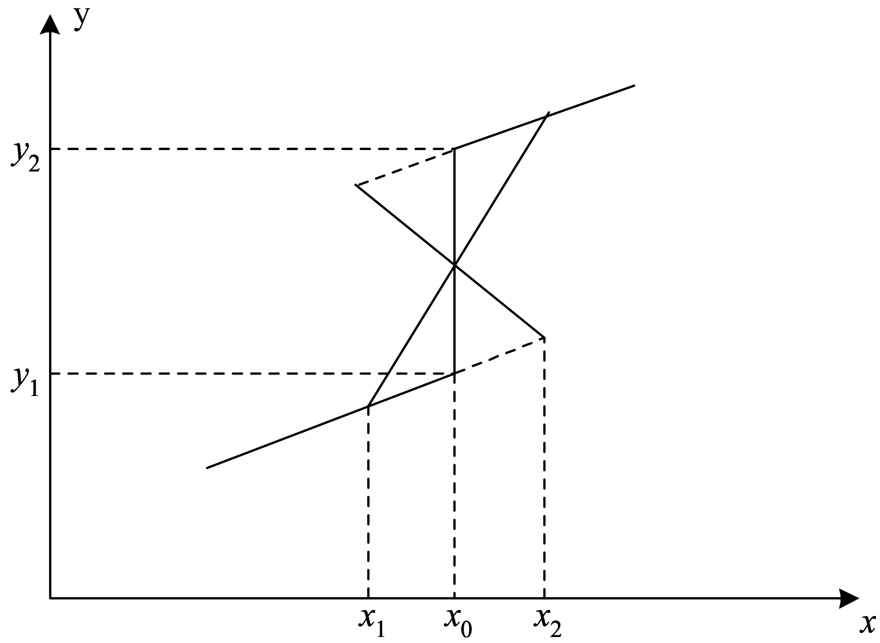


Рис. 12.3. К доказательству критерия Кротова

Теперь сразу видно, что если, например, правый предел критерия Кротова (32) стремится к бесконечности, а левый — к минус бесконечности, мы можем сколь угодно близко от функции с разрывом в точке $x = x_0$ провести кусочно-гладкие кривые (с участком наклонной прямой, круто проходящей вблизи $x = x_0$), на которых значение функционала будет и сколь угодно велико, и сколь угодно мало. Следовательно, если не существует ни правого, ни левого пределов критерия (32), то экстремум функционала может достигаться только в классе кусочно-гладких функций.

Результаты В. Ф. Кротова удачно дополнили известные классические теоремы о простейшем функционале $J = \int_a^b F(x; y; \dot{y})dx$, согласно которым изломы экстремали возможны лишь там, где $F_{\dot{y}\dot{y}} = 0$, а при $F_{\dot{y}\dot{y}} \neq 0$ экстремаль имеет непрерывную вторую производную. Теперь можно дополнительно утверждать, что разрывы на функции, доставляющей экстремум, возможны лишь в точках, где критерий (32) существует. Если же критерий (32) не существует при любых x, лежащих в интервале $a \le x \le b$, а функционал ограничен снизу, то минимум его при $F_{\dot{y}\dot{y}} > 0$ будет достигаться на гладкой функции, имеющей непрерывную вторую производную.

Впервые результаты В. Ф. Кротова были доложены им на Всесоюзном съезде математиков в Ленинграде в 1961 г. Они встретили яростную критику участников съезда, дружно отвергавших их, как нестрогие, недостаточно доказанные, а некоторые даже утверждали, что результаты ошибочны. Благожелательно отнесся к В. Ф. Кротову лишь председатель секции, на которой В. Ф. Кротов делал доклад. "Напрасно вы так яростно нападаете на Кротова, — сказал он, обращаясь к участникам секции, — ведь пройдет несколько лет, и вы сами будете студентам на лекциях рассказывать его результаты. И ведь совсем не так отнеслись бы к нему Эйлер и Лагранж, если они могли бы сегодня присутствовать в нашем зале. Они сказали бы: «Молодец, коллега Кротов, ты нас продолжил»". И действительно, уже в 1965 г. результаты В. Ф. Кротова вошли в преподавание (см. публикацию [33]).

12.6. Экстремумы в замкнутых областях и теория оптимальных процессов

Наиболее существенным из того нового, что внес XX век в развитие вариационного исчисления, был переход к исследованию экстремумов в замкнутых областях, учет ограничений в виде неравенств, которым должны удовлетворять искомые функции и их производные. Без учета подобных ограничений было крайне трудно применять вариационное исчисление к решению прикладных задач, где подобные ограничения встречаются очень часто, можно сказать, на каждом шагу. Практические потребности ставили перед вариационным исчислением новые задачи, требовали разработки новых методов решения — и новые методы были разработаны. Математики XVIII века не рассматривали задач с ограничениями в виде неравенств. Впервые задача с ограничением была исследована в 1831 г. Гольдшмидтом, который рассматривал старую, известную еще Бернулли и Эйлеру, задачу об отыскании кривой $y(x)$ заданной длины с закрепленными концами, которая при вращении вокруг оси абсцисс образовала бы тело вращения с наименьшей поверхностью. В этой старой задаче Гольдшмидт заметил то, что ускользнуло от внимания Эйлера — для того, чтобы задача имела смысл, искомая кривая $y(x)$ не должна заходить ниже оси абсцисс, т. е. при отыскании кривой нужно учитывать ограничение $y \geq 0$. Наличие подобных неравенств резко осложняет задачу отыскания экстремума функционала, приводит к тому, что основной метод решения — сведение к интегрированию уравнения Эйлера — перестает работать.

Действительно, наличие любого дополнительного неравенства $\varphi(x;y) \geq 0$ приводит к тому, что экстремум надо искать теперь в замкнутой области изменения переменной $y(x)$, включающей в себя свою границу $\varphi(x; y) = 0$. Пусть на некотором участке кривая, доставляющая экстремум, проходит по границе. Тогда для нее допустимой будет лишь односторонняя вариация, $\delta y > 0$, а вариация $\delta y < 0$ недопустима, ибо выводит искомую кривую за пределы допустимой области. Первую вариацию функционала δJ еще Эйлер и Лагранж умели приводить к виду:

$$\delta J = \int_a^b \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{\dot{y}} \right) \delta y dx. \tag{34}$$

Если экстремум рассматривается в открытой области, то вариация δy является произвольной функцией, и тогда из условия $\delta J \geq 0$ следует $F_y - \frac{d}{dx} F_{\dot{y}} = 0$ — т. е. выполняется уравнение Эйлера, позволяющее после интегрирования фактически определить искомую функцию $y(x)$. Однако в замкнутой области при $\delta y > 0$ из условия $\delta J \geq 0$ уже не следует уравнение Эйлера, а следует только, что:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{\dot{y}} \geq 0, \tag{35}$$

т. е. получаем вместо уравнения всего лишь неравенство, не позволяющее определить однозначно искомую функцию $y(x)$.

Для того чтобы обойти возникшую трудность, Гольдшмидт заменой переменных преобразовал замкнутую область $y \geq 0$ в открытую. В дальнейшем так же поступали другие математики XIX века, которые время от времени сталкивались с задачами на экстремум с ограничениями. Однако каждый раз преобразовывать замкнутую область в открытую — весьма громоздко, причем трудности возрастают по мере усложнения структуры замкнутой области. Требовался единый алгоритм решения задач с ограничениями и этот алгоритм был разработан Надеждой Николаевной Гернет (1877—1943). Остановимся несколько подробнее на ее биографии, поскольку жизнь Н. Н. Гернет известна гораздо менее, нежели она заслуживает.

Отец Надежды Николаевны, Н. А. Гернет, представитель довольно известного дворянского рода Гернетов, был активным участником революционного движения, привлекался по делу Каракозова в 1866 г., отсидел некоторое время в Петропавловской крепости, затем был выслан сперва в Вологодскую, а затем в Симбирскую губернию. В Симбирске 23 апреля 1877 г. и родилась Надежда Николаевна. По матери, урожденной Филатовой, она была родственницей А. Н. Крылова и А. М. Ляпунова. Возможно, что их пример оказал влияние на выбор Надеждой Николаевной жизненного пути. После окончания Симбирской гимназии в 1894 г. она переезжает в Петербург, где учится на Высших женских курсах, а после окончания их в 1898 г. продолжает образование в Германии, в Геттингенском университете, под руководством Д. Гильберта. В 1901 г. она представила диссертацию, посвященную вариационному исчислению, за которую была удостоена степени доктора философии с "наивысшей похвалой", и в том же году вернулась в Россию, где стала преподавать математику на Высших женских курсах. Именно в докторской диссертации Н. Н. Гернет (тема которой, безусловно, была подсказана ее руководителем, Д. Гильбертом), было начато исследование экстремума для функционалов, заданных в замкнутых областях.

В 1913 г. Н.Н. Гернет опубликовала книгу "Об основной простейшей задаче вариационного исчисления" [10] и представила ее к защите на степень магистра в Московский университет. Защитив в 1915 г. диссертацию, Н. Н. Гернет стала второй в истории России женщиной — магистром математики русского университета.

В 1915 г. Н. Н. Гернет избрали профессором Высших женских курсов, а в 1917 г., после слияния их с университетом, Н. Н. Гернет стала профессором Петроградского (с 1924 г. — Ленинградского) университета. В Ленинградском университете она работала до 1929 г., а с 1930 г. и до самой смерти в блокадном Ленинграде в 1943 г. она преподавала в Ленинградском политехническом институте. Вся жизнь Н. Н. Гернет, женщины одинокой и незамужней, была отдана науке и преподаванию.

Основные научные результаты Н. Н. Гернет (помимо работ по исследованию ряда Лагранжа) относятся к вариационному исчислению. В этой области ей удалось добиться выдающихся результатов, которые не были по достоинству оценены при ее жизни.

В ее уже упоминавшейся книге "Об основной простейшей задаче вариационного исчисления" приведен общий алгоритм решения задач на экстремум в замкнутой области. Н. Н. Гернет рассуждала следующим образом: пусть требуется найти функцию $y(x)$, доставляющую экстремум функционалу

$$J = \int_a^b F(x; y; \dot{y})dx \tag{36}$$

при наличии ограничения:

$$y \geq \varphi(x). \tag{37}$$

Равенство $y = \varphi(x)$ очерчивает границу допустимой области. Для искомой функции $y(x)$ теорема Эйлера несправедлива. Н. Н. Гернет предложила изящную замену переменных — вместо переменной $y(x)$ ввести новую переменную $z(x)$, связанную с прежней равенством

$$z^2 = y - \varphi(x). \tag{38}$$

На новую переменную, $z(x)$, не наложено уже никаких ограничений. Границе области $y = \varphi(x)$ соответствует просто значение $z = 0$; следовательно, для функции $z(x)$, доставляющей экстремум функционалу (36), переписанному к новой переменной z, теорема Эйлера будет уже справедливой. В то же время после элементарных преобразований нетрудно установить, что уравнение Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial \dot{z}} = 0 \tag{39}$$

для функционала (36), переписанного к переменной $z(x)$, принимает вид:

$$z \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) = 0, \tag{40}$$

т. е. распадается на два уравнения: $z = 0$ (граница допустимой области) и уравнение Эйлера для исходного функционала. Из уравнения (40) следует, что для функционалов (36) при наличии ограничения (37) справедлива обобщенная теорема Эйлера, сформулированная Н. Н. Гернет: если экстремум существует и достигается в классе кусочно-гладких функций, то он достигается на составных кривых, составленных из отрезков экстремалей и кусков границы допустимой области (разумеется, в частных случаях длина отрезков экстремалей или кусков границы области может и обращаться в нуль). Эту важную теорему будет справедливо называть (как было предложено в [33]) "теоремой Гернет".

Обобщенная теорема Эйлера была доказана Н. Н. Гернет не только для простейшего неравенства (37), но и неравенств общего вида: $\varphi\,(x;y) \geq 0$, а также — что особенно важно — для дифференциальных неравенств: $\varphi(x;y;\dot{y}) \geq 0$. Н. Н. Гернет установила также условия в точках перехода от экстремали к границе области и показала, что в точке перехода для всех функционалов, кроме вырожденных (т. е. таких, у которых $F_{\dot{y}\dot{y}} = 0$), касательные к экстремали и границе области должны совпадать. Это условие позволяет определить недостающие постоянные интегрирования в уравнениях отрезков экстремалей. Располагая обобщенной теоремой Эйлера и условиями в точках сопряжения, можно уже не преобразовывать в каждой конкретной задаче замкнутую область в открытую — поиск кривой, доставляющей экстремум, сводится теперь в основном к поиску точек сопряжения. Наконец, Н. Н. Гернет на основе преобразования неравенства Эйлера установила важное неравенство (кривизна экстремали, проведенной касательно к границе области, не меньше кривизны границы в точке касания), помогающее определить структуру кривой, доставляющей экстремум, в случае сложной границы области.

Таким образом, Н. Н. Гернет разработала в 1913 г. общий и удобный алгоритм решения задач на экстремум функционалов при наличии простых или дифференциальных неравенств, наложенных на искомые функции и их производные.

Интересна судьба научного наследия Гернет. Наиболее простые из ее результатов (случай конечных неравенств и невырожденных функционалов) вошли в учебники вариационного исчисления; остальные продолжали оставаться малоизвестными. Наиболее подробно проблема экстремума в замкнутых областях с включением многих результатов Н. Н. Гернет была рассмотрена в учебнике Н. М. Гюнтера (1871—1941) [12], но он вышел в свет всего за два месяца до начала страшной войны 1941—1945 гг., в огне которой погибла бóльшая часть тиража учебника. Да и сама книга "Об основной простейшей задаче вариационного исчисления", изданная малым тиражом в 1913 г., быстро стала библиографической редкостью. В 1937 г. некоторые из результатов Н. Н. Гернет были переоткрыты американским математиком Валлентайном (Walentine F. A.), но и работы Валлентайна не пользовались большой известностью до 50-х годов XX века, когда потребности быстро развивающейся теории управления поставили вариационные задачи в замкнутой области в центр внимания математиков.

Только тогда обнаружилось, что такие важные проблемы, как отыскание наилучших законов движения и программ управления для ракет, искусственных спутников Земли и других технических объектов, могут рассматриваться как вариационные задачи, но при обязательном учете ограничений на сами искомые функции и их производные. Что же касается первой половины XX века, то методы вариационного исчисления очень редко использовались в технике. Вариационное исчисление изучалось в университетах в основном для нужд физики, в технических учебных заведениях оно не преподавалось и для задач выбора наилучших конструкций, законов управления и т. п. почти никогда не применялось.

Использование вариационного исчисления, прежде всего, затруднялось тем, что технические задачи почти всегда приводили к необходимости поиска экстремума в замкнутой области; в распространенных учебниках методы решения таких задач почти не излагались, а работы Н. Н. Гернет и Валлентайна были практически неизвестны не только инженерам, но и большинству математиков. Кроме того, существовал и труднопреодолимый психологический барьер, препятствовавший проникновению совершенно новых методов расчета в широкие круги инженеров. Возможно, что барьер этот был связан с тем, что вариационное исчисление излагалось лишь в университетских учебниках на весьма абстрактном уровне; инженерам оно часто казалось непонятной "чистой" математикой. Достаточно сказать, что когда в 1950 г. профессор Борис Львович Давыдов в журнале "Уголь" опубликовал статью [15], в которой он, пользуясь вариационным исчислением и удивительно остроумно преодолев все трудности решения, нашел наивыгоднейшую диаграмму скорости подъема клети в шахте (использование этой диаграммы могло принести существенный экономический эффект), то на следующий год в том же журнале были опубликованы отклики [16] пяти авторов на эту статью, в которых самым непримиримым образом отвергались результаты Б. Л. Давыдова. Исчерпав технические аргументы, оппоненты Б. Л. Давыдова перешли к доводам политическим "Метафизическое отношение проф. Давыдова привело его к надуманной, абстрактной теории, которая применима как будто везде, а в действительности — нигде. Марксизм учит, что абстрактной истины нет, истина всегда конкретна", — так писали они в своем отклике. После опубликования этих резких отзывов Б. Л. Давыдов прекратил дальнейшую работу в области применения вариационных методов.

Позже, в 60-е годы XX века, когда развернулось победное шествие вариационных методов решения технических задач, я спросил Бориса Львовича — не хочет ли он вернуться работать в ту область науки, где он был столь блистательным первопроходцем? Он ответил: "Мне уже поздно. Силы ушли. Да и слишком тяжелые воспоминания связаны у меня с той давней моей статьей".

С трудными психологическими барьерами пришлось столкнуться и автору этих строк в конце 50-х годов прошлого века в ходе работы по применению методов вариационного исчисления для оптимизации работы электрических приводов. Оптимизация позволила найти способы, существенно повышающие быстродействие и производительность электропривода (изложено в монографии [31]), но внедрение этих способов затянулось на много лет и проходило далеко не гладко.

Психологический барьер меньше ощущался в совершенно новых областях техники — таких как ракетная и космическая техника. Не случайно, что именно в этих областях, начиная с 1950-х годов, стали особенно широко применяться новые вариационные методы, разработка которых связана, прежде всего, с именем академика Льва Семеновича Понтрягина (1908—1988). Столкнувшись с необходимостью (характерной для технических задач) отыскания экстремума в замкнутых областях, Л. С. Понтрягин разработал особый метод, получивший в дальнейшем широкую известность под не совсем удачным названием "принцип максимума". Название было связано с тем, что функция $u(t)$, доставляющая экстремум функционалу в замкнутой области, определяется в методике Л. С. Понтрягина из условия максимума гамильтоновой функции H по переменной u.

Отметим, что работы Л. С. Понтрягина по "принципу максимума" выросли в ходе его совместных исследований с выдающимся теоретиком и практиком систем управления Александром Ароновичем Фельдбаумом (1913—1969). А. А. Фельдбаум впервые в 1953—55 гг. обратил внимание на специфику задач оптимизации для линейных систем, подметил, что управление в этом случае проходит целиком по границам допустимой области, скачком переходя от нижней границы к верхней, доказал лежащую в основе приложений теорему о числе переключений ("теорема об *n* интервалах"), и привлек к этой проблеме внимание математиков.

"Принцип максимума" был впервые выдвинут Л. С. Понтрягиным в качестве гипотезы в 1956 г. и сразу же получил широкое применение в решении разнообразных технических задач оптимизации. Доказан "принцип максимума" был несколько позже.

Принципиальных различий между методами вариационного исчисления (с учетом результатов Н. Н. Гернет) и "принципом максимума" нет. Различия заключаются скорее в обозначениях и в методике доказательств, которые в "принципе максимума" много сложней. Теоремы "принципа максимума" относятся к объектам, дифференциальные уравнения которых записаны в нормальной форме Коши:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1;\ldots x_n;u); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1\ldots x_n;u), \end{aligned} \tag{41}$$

где u — функция, которую называют управлением. Ограничения наложены только на управление:

$$|u| \le 1, \tag{42}$$

а функционалом, минимум которого разыскивается, является время перехода объекта (41) из одного заданного состояния в другое. Л. С. Понтрягин предложил ввести промежуточную функцию:

$$H = \sum_{i=1}^{n} \psi_i f_i, \tag{43}$$

где $\psi_I(t)$ — вспомогательные переменные, подчиненные уравнениям:

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \tag{44}$$

и доказал, что минимум времени перехода обеспечит управление, которое доставляет максимум функции H (теорема о максимуме). В общем случае из теоремы о максимуме следует, что внутри допустимой области, очерченной неравенством (42), должно выполняться уравнение:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \tag{45}$$

которое вместе с n уравнениями (41) и n уравнениями (44) позволяет определить $2n + 1$ функций (экстремалей) $x_1 \ldots x_n$, $\psi_1 \ldots \psi_n$ и $u(t)$, доставляющих экстремум внутри допустимой области. Для точек сопряжения экстремали и границы в [36] приведены "условия скачка", аналогичные условиям, найденным ранее Н. Н. Гернет.

Наиболее интересен случай, когда в уравнения (41) управление входит линейно, т. е. они имеют вид:

$$\dot{x}_i = g_i(x_1; \ldots, x_n) + uh_i(x_1; \ldots, x_n). \tag{46}$$

В этом случае очевидно, что при наличии ограничения (42) максимум промежуточной функции H достигается на границе области, а конкретно — на функции:

$$u = sign\sum_{i=1}^{n} \psi_i h_i. \tag{47}$$

Все результаты легко обобщаются и на случай нескольких управляющих воздействий $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Собственно, именно частный случай управлений, входящих в уравнения (41) линейно, как раз и принес известность и популярность "принципу максимума". Этот частный случай часто встречается на практике и в то же время для него "теорема о максимуме" сразу позволяет определить структуру управления (47), а затем и точки переключения от $u = +1$ к $u = -1$ и наоборот.

Что же касается общего случая, когда уравнения (41) не линейны по u, то "принцип максимума" не вносит ничего более удобного, чем использование теоремы Н. Н. Гернет: точки перехода от экстремалей к границе допустимой области $u = \pm 1$ надо находить с помощью "условий скачка", а это сложнее, чем использование условий сопряжения, приведенных в [10] и [33].

Подробный сравнительный анализ достоинств и недостатков методов решения задач оптимизации, основанных на вариационном исчислении и на "принципе максимума" с указаниями, в каких случаях предпочтительнее использовать тот или другой метод, приведен в монографии [33].

Разработка Л. С. Понтрягиным и его сотрудниками "принципа максимума", изложенного в [36], явилась важным и высоко оцененным вкладом в науку. Отрицательную роль сыграло приведенное в [36] на стр. 264—265 утверждение о непригодности методов вариационного исчисления для решения задач оптимизации в замкнутых областях, поскольку диссертация Н. Н. Гернет [10] и учебник Н. М. Гюнтера [12] остались, по-видимому, неизвестными Л. С. Понтрягину. Надо отметить, что Л. С. Понтрягину многие и неоднократно указывали на ошибочность его утверждений о вариационном исчислении, приведенных в [36] на стр. 264—265 (я сам писал об этом Л. С. Понтрягину в 1962 г., но ответа не получил). Однако, несмотря на все эти возражения, утверждение о невозможности для вариационного исчисления решить задачи на экстремум в замкнутой области в неизменном виде повторялось во втором и во всех последующих изданиях монографии [36]. А ведь авторитет Л. С. Понтрягина был велик и вполне заслужен.

Лев Семенович, вообще, был очень своеобразным и интересным человеком. Его жизнь лучше всего описана им самим в большой статье "Краткое жизнеописание Л. С. Понтрягина, составленное им" (журнал "Успехи математических наук", том 33, 1978).

Возникает интересный вопрос — почему Л. С. Понтрягин отказывался исправить свое неверное суждение о возможностях вариационного исчисления, несмотря на то, что многие знающие люди указывали ему на ошибку? Согласно одному из устных рассказов, на предложения исправить ошибку Л. С. Понтрягин отвечал: "Монография [36] — это классика. А классику не исправляют".

В результате в СССР имел место известный перекос — методикой "принципа максимума" пользовались даже при решении тех задач, в которых методы вариационного исчисления вели к цели гораздо быстрее и проще. Так, например, в 1965 г. в журнале "Электричество" была опубликована статья, автор которой для отыскания оптимального управления электроприводами прокатного стана применил сложный аппарат "принципа максимума", не справился с ним и допустил ошибку. Я написал тогда письмо автору статьи, где указывал на ошибку, и показал, как просто и легко можно получить правильный результат, использовав более простой аппарат вариационного исчисления. Автор статьи с негодованием ответил мне: "Но ведь академик Понтрягин доказал, что для задач с ограничениями вариационное исчисление непригодно". Ошибка так и не была исправлена. Таким образом, мы еще раз убеждаемся, что чрезмерное преклонение даже перед самыми заслуженными авторитетами (а авторитет Л. С. Понтрягина вполне заслужен) может приносить вред. Во избежание ошибок нужно внимательнее изучать историю математики.

В США все происходило проще: результаты Н. Н. Гернет, как уже говорилось, были в 1937 г. переоткрыты американским математиком Валлентайном ([33], стр. 271). По-видимому, Валлентайн не был знаком с работами Н. Н. Гернет. Он также ввел замену переменных для преобразования замкнутой области в открытую, использовав подстановку, очень похожую на примененную Н. Н. Гернет. Поэтому американские исследователи с самого начала успешно использовали методы вариационного исчисления для решения задач оптимизации как в открытых областях изменения переменных, так и в замкнутых областях, при учете ограничений в виде неравенств [4, 6, 19], а "принципом максимума" пользовались только там, где он действительно выгоден и удобен.

Несколько позже Л. С. Понтрягина американский математик Ричард Беллман (Bellman, 1920—1984) разработал еще один интересный метод оптимизации в замкнутых областях, получивший название "динамическое программирование". Монография Р. Беллмана под этим названием вышла в свет в 1957 г., а в русском переводе — в 1960 г. [5]. Методы Л. С. Понтрягина, Р. Беллмана и их многочисленные модификации в дальнейшем стали называть "неклассическими вариационными методами", или "теорией оптимального управления", противопоставляя их "классическому вариационному исчислению" [1, 48]. Оснований для такого противопоставления нет — мы убедились, что и в рамках классического вариационного исчисления были разработаны методы, позволяющие решать задачи на экстремум в замкнутой области и другие задачи оптимального управления. Другое дело, что специфика практических задач оптимизации заставила более подробно разработать те разделы вариационного исчисления, на которые до второй половины XX века не обращали большого внимания.

Так, например, в известных учебниках [9, 24] лишь очень коротко и поверхностно рассматривались вырожденные функционалы — те, которые от первой или от второй производной искомой функции зависят линейно — т. е. имеют вид:

$$J=\int_a^b [M(x;y)+\dot{y}N(x;y)]dx \tag{48}$$

или

$$J=\int_a^b [M(x;y;\dot{y})+\ddot{y}N(x;y;\dot{y})]dx, \tag{49}$$

а между тем многие важные практические задачи приводят (рассмотрено подробно в [33]) именно к вырожденным функционалам, обладающим особыми свойствами.

Методы, позволяющие решать практические задачи оптимизации и оптимального управления, дополняющие классическое вариационное исчисление, с наибольшей полнотой изложены в монографии [33] (по инициативе Р. Беллмана был сделан ее перевод на английский язык, опубликованный в США в 1968 г. и в Англии в 1969 г.).

Так, например, там отмечено, что многие задачи оптимизации приводят к функционалам вида:

$$J = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T F(t; x; \dot{x})dt, \tag{50}$$

т. е. к усредняемым функционалам с предельным переходом. Между тем для подобных функционалов несправедлива основная теорема вариационного исчисления, и экстремум может достигаться не на экстремалях. Так, например, для простейшего из функционалов вида (50):

$$J = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x^2 dt \tag{51}$$

уравнение Эйлера принимает вид: $2x = 0$, и ему удовлетворяет единственная экстремаль $x = 0$, на которой функционал достигает своего минимального значения, равного нулю. Однако то же нулевое значение функционал принимает и на многих других функциях — например, на функциях $x = t^k e^{-\alpha t}$ для любых $k \geq 0$, $\alpha > 0$, т. е. на функциях, которые заведомо не удовлетворяют уравнению Эйлера и условиям максимума Понтрягина. Функционалы вида (50) требуют особого подхода, изложенного в [33].

С появлением методов, позволяющих отыскивать экстремумы в замкнутой области и основанных либо на теореме Н. Н. Гернет, либо на "принципе максимума", либо на динамическом программировании, задачи оптимизации оказалось возможным решать на основе вполне адекватного математического аппарата. Для успешного поиска оптимума стало требоваться уже не столько искусство математика, сколько хорошее знание особенностей рассматриваемой технической задачи, понимание того, какими факторами можно пренебречь, к каким последствиям это приведет и т. п.

Оптимальные законы управления были найдены сперва для объектов космической техники [19, 27] и электроприводов постоянного и переменного тока [15, 29, 31, 35, 41, 44, 46], а затем и для очень многих других систем и устройств. Работы [2, 3, 18—20, 23, 26, 27, 32, 38, 45] отражают лишь небольшую часть исследований в этой области.

Каждый раз переход на оптимальное управление позволял повысить эффективность оптимизируемых систем, сократить расход энергии и топлива.

В то же время надо заметить, что вариационные методы сами по себе позволяли найти лишь закон управления, программу изменения его как функции времени, но программа эта весьма чувствительна к помехам, к неизбежным погрешностям измерений, при наличии которых программное управление очень трудно использовать.

Для того чтобы применить оптимальное управление на практике, требовалось создать устройства, автоматически реализующие оптимальное движение при наличии погрешностей измерения, не полностью известных возмущающих сил и т. п. Об истории разработки устройств, реализующих оптимальное управление, будет рассказано в *главе 13*, но перед этим мы расскажем о смежных с оптимальным управлением исследованиях американского математика Р. Калмана (Kalman R.), оказавших большое влияние на развитие теории оптимизации и методов управления.

Как уже говорилось, еще в 1953—1955 гг. А. А. Фельдбаум исследовал поведение линейных систем управления вида:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{52}$$

при управлении $u(t)$, ограниченном неравенством

$$|u| \le C_0. \tag{53}$$

В уравнении (52) x — это n-мерный вектор регулируемых переменных; A — квадратная, размера $n \times m$, матрица коэффициентов объекта управления; u — m-мерный вектор управляющих воздействий; B — прямоугольная, размера $n \times m$, матрица коэффициентов при управляющих воздействиях. Начальное состояние системы, состояние при $t = 0$, определяется вектором $x(0)$, конечное состояние (при $t = T$) характеризуется вектором $x(T)$. Математическая модель (52) хорошо описывала поведение многих линейных систем управления.

Фельдбаум показал, что для быстрейшего перевода системы из одного состояния в другое управление u должно проходить по границе допустимой области, т. е.:

$$u_{\text{опт}} = \pm C_0, \tag{54}$$

а время перехода T для исследованных А. А. Фельдбаумом систем было тем меньше, чем больше C_0. В пределе, когда $C_0 \to \infty$, время $T \to 0$.

Р. Калман поставил важный вопрос: всегда ли, для всех ли систем можно обеспечить перевод из одного состояния в другое в заданное время T, даже если ограничения на управление не являются слишком жесткими и $C_0 \to \infty$? Оказалось, что такой перевод возможен не для всех систем, а только для тех, у которых ранг матрицы

$$G = [A \vdots AB \vdots A^2B \vdots \dots A^{n-1}B], \tag{55}$$

имеющей размер $n \times mn$ и составленной из матриц A и B, входящих в уравнение (52), будет равен n, и только для таких систем задача оптимального управления имеет точный и однозначный смысл для любых C_0 в неравенстве (54).

Вторым вопросом, рассмотренным в исследованиях Р. Калмана, был вопрос о наблюдаемости. На практике чаще всего не удается наблюдать полный вектор состояния $x(t)$ систем управления (52), и наблюдается обычно другой вектор y, размерность которого q меньше, чем размерность n вектора $x(t)$. Векторы x и y связаны между собой матричным уравнением

$$y = Hx, \tag{56}$$

где H — прямоугольная матрица размера $q \times n$, причем $q \le n$. Матрицу H называют матрицей наблюдаемости.

Р. Калман поставил вопрос: всегда ли, наблюдая вектор y, можно восстановить полный вектор x? Оказалось, что это можно сделать только в том случае, если ранг матрицы

$$N = \left[H^T \vdots A^T H^T \vdots (A^T)^2 H^T \vdots \dots (A^T)^{n-1} H^T\right] \tag{57}$$

равен n (индекс T у матриц A и H означает транспонирование). Системы управления, у которых ранг матрицы G из формулы (55) равен n, стали называть "управляемыми по Калману", системы, у которых ранг матрицы N из формулы (57) равен n, стали называть "наблюдаемыми по Калману", а системы, у которых матрица G и матрица N имели ранг n, стали называть "управляемыми и наблюдаемыми по Калману". Если условие (55) не выполнялось, то систему называли "не управляемой по Калману", если не выполнялось условие (57), то ее называли "не наблюдаемой по Калману".

Результаты Р. Калмана были доложены им на первом конгрессе Международной федерации по автоматическому управлению (ИФАК) в 1960 году и быстро получили заслуженное признание. Очень многие публикации по управлению в 60-х годах XX века начинались со слов: "рассмотрим систему $\dot{x} = Ax + Bu$, управляемую и наблюдаемую по Калману".

Матричные условия Калмана (55) и (57) для управляемости и наблюдаемости очень компактны, но понять их физический смысл было трудно, особенно для студентов. Поэтому на лекциях в Санкт-Петербургском, тогда еще Ленинградском, госуниверситете они разъяснялись на примере системы (52), в которой $m = 1$ — т. е. матрица B превращается в вектор-столбец. Обобщение на случай $m > 1$, т. е. для систем с несколькими управляющими воздействиями, затруднений не представляло.

Систему (52), в которой $m = 1$, можно записать в виде следующей системы n дифференциальных уравнений n-го порядка относительно каждой из переменных x_1; x_2; … x_n:

$$\left.\begin{array}{l} A(D)x_1 = B_1(D)u \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A(D)x_n = B_n(D)u \end{array}\right\}. \tag{58}$$

В системе уравнений (58) полином $A(D)$ является определителем матрицы $A - DE$, где E — единичная матрица. Этот полином, имеющий степень n, называют характеристическим полиномом матрицы A. Если $u = 0$ и полином $A(D)$ не имеет кратных корней, то

$$x_1(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda i t}, \tag{59}$$

где λi — корни характеристического полинома; c_i — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий. Такие же равенства справедливы для $x_2(t)$, $x_3(t)$ и других составляющих вектора регулируемых переменных.

Полиномы $B_1(D)$; $B_2(D)$; … $B_n(D)$ могут иметь или не иметь общие корни с полиномом $A(D)$. От этого все и зависит.

Перечислим возможные варианты.

1. Первый вариант. Полином $B_1(D)$ не имеет общих корней с полиномом $A(D)$.

   В этом случае, как известно, нетрудно построить простой линейный регулятор, математической моделью которого служит дифференциальное уравнение вида

   $$W_1(D)u = W_2(D)x_1, \tag{60}$$

   обеспечивающий любое желаемое расположение корней характеристического полинома, а, значит, и любую скорость протекания переходных процессов. Действительно, замкнув регулятором (60) систему (58), т. е. подставив в первом из уравнений (58) вместо *u* его значение из (60), получим уравнение:

$$\left[A(D)W_1(D)-B_1(D)W_2(D)\right]x_1=0, \tag{61}$$

и сразу видно, что за счет выбора W_1 и $W_2(D)$ можно обеспечить любое желаемое расположение корней. В этом случае система (52) является управляемой по Р. Калману. Отсутствие общих корней у полиномов $B_1(D)$ и полинома $A(D)$ равносильно управляемости по Калману и сразу проясняет ее физический смысл.

2. Второй вариант. Полином $B_i(D)$ имеет хотя бы один корень λ_1, общий с полиномом $A(D)$.

   В этом случае уравнение (61) можно привести к виду:

   $$(D-\lambda_1)\,[A_1(D)W_1(D)-B_{11}(D)W_2(D)]x_1=0, \tag{62}$$

   где $A_1(D)=\dfrac{A(D)}{D-\lambda_1}$; $B_{11}(D)=\dfrac{B(D)}{D-\lambda_1}$, и теперь сразу видно, что при любом выборе полиномов W_1 и $W_2(D)$ в регуляторе (60) в переходном процессе сохранится составляющая

   $$c_1e^{\lambda_1 t}, \tag{63}$$

   и поэтому с помощью управления, использующего только переменную x_1, любую скорость затухания переходных процессов обеспечить уже не удастся. Система не является управляемой по Калману по переменной x_1. Однако она может оказаться управляемой по другим переменным, если хотя бы один из полиномов $B_2(D)$; $B_3(D)$; … $B_n(D)$ не имеет общих корней с полиномом $A(D)$.

3. Третий вариант. Все полиномы $B_1(D)$; $B_2(D)$; … $B_n(D)$ имеют хотя бы один единый общий корень, совпадающий с одним из корней λ_i полинома $A(D)$. В этом случае регулятор, использующий любые переменные x_i или их комбинацию, не сможет исключить из переходного процесса составляющую (63). Любую скорость затухания переходного процесса обеспечить уже не удается, система (52) в этом случае будет не управляемой по Калману.

Что касается реального поведения системы, "не управляемой по Калману", то все зависит от корня λ_i. Если он имеет достаточно большую по абсолютной величине отрицательную вещественную часть, то составляющая (63) будет затухать быстро, и система, "не управляемая по Калману", может с практической точки зрения оказаться вполне управляемой. Поэтому, используя критерии Калмана (55) и (57), надо всегда говорить не об

> "управляемых" или "неуправляемых" системах, а о системах "управляемых по Калману", или "не управляемых по Калману". "Управляемость по Калману" и практическая управляемость, практическая пригодность системы — это вещи разные.
>
> Наиболее неприятный случай возникал, если в третьем варианте корень λ_i имел положительную вещественную часть. В этом случае никакое управление не может обеспечить устойчивости, и объект управления нужно переделывать.

Данные разъяснения помогли студентам усвоить достаточно сложные разделы теории управления об управляемости и наблюдаемости. Затем они были включены в учебное пособие: Петров Ю. П. Синтез оптимальных систем управления при неполностью известных возмущающих силах. — Изд-во ЛГУ, 1987.

Там же был рассмотрен принципиальный (и даже несколько философский) вопрос о соотношении математической возможности и реальной осуществимости. На стр. 121—123 указанного учебного пособия приведен пример системы, "управляемой по Калману", но не минимально-фазовой. Согласно теоремам Калмана, отклик системы на любое возмущение при увеличении коэффициентов усиления регулятора должен был затухать все быстрее, и влияние возмущений должно сказываться все меньше и меньше. В то же время для не минимально-фазовых систем было доказано, что при любом управлении интеграл от квадрата отклика на возмущение не может быть меньше постоянной величины, не зависящей от управления. Возникало противоречие, которое разрешалось тем, что на самом деле в системе при увеличении коэффициентов усиления, наряду с увеличением быстроты затухания отклика на возмущающее воздействие возрастали и нежелательные "выбросы", и, в результате, реальное качество управления ухудшалось. Это наглядно видно на рис. 12.4, показывающем отклик системы на приход возмущающего воздействия при разных коэффициентах усиления k в регуляторе.

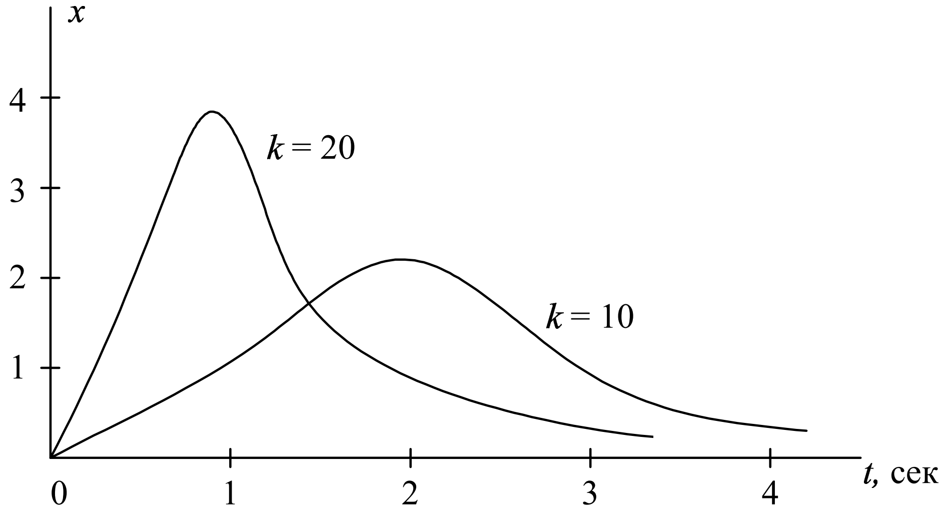


Рис. 12.4. Отклик системы на приход возмущающего воздействия при разных коэффициентах усиления k в регуляторе

Поэтому даже в такой сильно "математизированной" дисциплине, как теория автоматического управления, нужно различать теоретически доказанное утверждение и возможность его практической реализации.

Литература к главе 12

1. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. — М.: Наука. 1979. — 429 с.
2. Андреев Ю. Н., Бутковский А. Г. Оптимальное управление нагревом массивных тел // Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1964, № 5.
3. Арис Т. Оптимальное проектирование химических реакторов. — М.: Издательство иностранной литературы, 1967.
4. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. — М.: Машиностроение. 1968.
5. Беллман Р. Динамическое программирование. — М.: Издательство иностранной литературы, 1960.
6. Брайсон А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. — М.: Мир. 1972. — 544 с.
7. Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1975.

8. Вариационные принципы механики. Сборник статей / Под ред. Л. С. Полака. — М.; Л.: Физматгиз. 1959. — 639 с.
9. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. — М., 1961. — 228 с.
10. Гернет Н. Н. Об основной простейшей задаче вариационного исчисления. — СПб., 1913.
11. Гурман В. И. Вырожденные задачи оптимального управления. — М.: Наука, 1977.
12. Гюнтер Н. М. Курс вариационного исчисления. — Гостехиздат, 1941.
13. Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. — М.: Мир, 1973.
14. Гроот С. Мазур П. Неравновесная термодинамика. — М.: Мир, 1964.
15. Давыдов Б. Л. Перспективы и задачи теории рудничного подъема // Уголь, 1950, № 11.
16. Отклики на статью Б. Л. Давыдова // Уголь, 1951, № 7.
17. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Приближенные методы решения экстремальных задач. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1968. — 179 с.
18. Зубов В. И. Теория оптимального управления судами и другими подвижными объектами. — Л.: Судостроение, 1966. — 352 с.
19. Исследование оптимальных режимов движения ракет. Сборник переводов. — Оборонгиз. 1959.
20. Касумова Т. К., Сутрилина М. И. Оптимизация АРВ синхронных машин. Сборник "Оптимизация режимов работы электроприводов". — Красноярск, 1990. — с. 173—187.
21. Кирин Н. Е. Вычислительные методы теории оптимального управления. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1968. — 143 с.
22. Кротов В. Ф. Разрывные решения вариационных задач // Известия ВУЗ, Математика, 1960, № 5, 1961, № 1.
23. Кротов В. Ф., Букреев В. З. Гурман В. И. Новые методы вариационного исчисления в динамике полета. — М.: Машиностроение, 1969. — 446 с.
24. Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А. Курс вариационного исчисления. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. — 296 с.
25. Моисеев Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем. — М.: Наука. 1971. — 526 с.

26. Олейников В. А. Оптимальное управление технологическими процессами. — Л.: Недра, 1982. — 216 с.
27. Охоцимский Д. Е. Энеев Т. М. Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли // Успехи физических наук. Т. 63, вып. 1, 1957.
28. Панасюк А. И., Панасюк В. И. Асимптотическая оптимизация нелинейных систем. — Минск: Изд-во БГУ. 1977. — 266 с.
29. Панасюк В. И. Оптимальное микропроцессорное управление электроприводом. — Минск: Вышейшая школа, 1991. — 167 с.
30. Панасюк В. И., Ковалевский В. Б., Политыко Э. Д. Оптимальное управление в технических системах. — Минск: Навука и техника, 1990. — 272 с.
31. Петров Ю. П. Оптимальное управление электроприводом. — Л.: Госэнергоиздат, 1961. — 187 с.
32. Петров Ю. П. Оптимальный режим остановки ядерного реактора // Атомная энергия, т. 17, вып. 2, 1964. — с. 144—145.
33. Петров Ю. П. Вариационные методы теории оптимального управления. — Л.: Энергия, 1965, 2-е изд., доп., 1977. — 280 с.
34. Петров Ю. П. К вопросу о принципе минимума скорости возрастания энтропии в стационарном режиме // Биофизика, 1966, т. 11, № 5, с. 926—928.
35. Петров Ю. П. Оптимальное управление электрическим приводом с учетом ограничений по нагреву. — Л.: Энергия, 1971. — 143 с.
36. Понтрягин Л. С. Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
37. Стеблев Ю. И. Условия минимальных потерь в теории поверхностного эффекта // Электричество, 1983. № 6. — с. 62—65.
38. Тарарыкин С. В., Тютиков В. В. Элементы структурной оптимизации электромеханических систем // Известия ВУ, Электромеханика, 1994. № 1—1, с. 25—31.
39. Трухаев Р. И., Хоменюк В. В. Теория неклассических вариационных задач. — Л., 1971.
40. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. — М.: Наука, 1978.

41. Хашимов А. А., Петрушин А. Д. Оптимальные режимы работы частотно-регулируемых асинхронных электропривводов. — Ташкент: Изд-во "ФАН", 1990. — 79 с.

42. Цырлин А. М., Балакирев В. С., Дудников Е. Г. Вариационные методы оптимизации управляемых объектов. — М.: Энергия, 1976.

43. Черноусько Ф. Л., Колмановский В. Б. Оптимальное управление при случайных возмущениях. — М.: Наука, 1978.

44. Чистов В. П., Бондаренко В. И., Святославский В. А. Оптимальное управление электрическими приводами постоянного тока. — М.: Энергия, 1968. — 232 с.

45. Шмыглевский Ю. Д. Вариационные задачи для сверхзвуковых тел вращения и сопел // Прикладная математика и механика, т. 25, 1962, вып. 1.

46. Шумилов В. Ф., Никитин В. К., Шумилова Н. И. Принцип стохастического оптимума в автоматизированном электроприводе // Электричество, 1992, № 1, с. 31—34.

47. Эйлер Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле. — М.; Л., 1934. — 600 с. (перевод трактата Л. Эйлера, изданного в Женеве в 1744 г.).

48. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. — М.: Мир, 1974. — 488 с.

Глава 13

Развитие теории управления

13.1. Устойчивость и инвариантность

Первоначальное развитие теории управления было связано с решением конкретной технической задачи — обеспечить равномерность вращения паровой машины. В XIX веке, который недаром называют "веком пара", эта задача имела первостепенное значение.

Еще великий изобретатель паровой машины Джемс Уатт (Watt, 1736—1819) разработал центробежный регулятор для поддержания постоянства частоты вращения машины. Если нагрузка паровой машины уменьшалась, то при неизменной подаче пара частота вращения вала резко и опасно возрастала. Регулятор Уатта состоял из двух тяжелых шаров на вертикальном валу, связанном с валом машины. Шары были стянуты между собой жесткой пружиной. При вращении вала центробежная сила, преодолевая упругость пружины, поднимала шары, а с шарами была связана заслонка на паропроводе, снижающая доступ пара в машину. Жесткость пружины подбиралась так, что при номинальной нагрузке на валу частота вращения равнялась заданной. При увеличении частоты вращения из-за уменьшения нагрузки возросшая центробежная сила разводила шары, в результате заслонка уменьшала подачу пара, предотвращая большие отклонения частоты вращения от номинального значения. Регулятор Уатта являлся одним из первых регуляторов, работающих на принципе обратной связи по отклонению, поскольку именно отклонение текущей скорости вращения машины от заданной изменяло угол сдвига шаров, а тем самым и подачу пара на входе в цилиндры машины. Регуляторы с обратной связью являются основой автоматического управления до самого последнего времени.

К 70-м годам XIX века в Англии работало уже примерно 75 тысяч регуляторов Уатта. Однако при настройке регуляторов инженеры сталкивались с трудностями — снабженные регуляторами машины часто приобретали необъяснимую склонность к самораскачиванию, а иногда переходили в режим самопроизвольно возрастающих колебаний, неминуемо приводивший к аварии. Изобретатели опытным путем нащупывали средства борьбы с неустойчивостью работы машин, снабженных регуляторами (одним из очень действенных средств оказался так называемый катаракт, т. е. устройство, осуществляющее воздействие, — пользуясь уже современной терминологией, — пропорциональное производной регулируемой величины), но ощущалась, разумеется, нужда в теоретическом исследовании, которое раскрыло и разъяснило бы суть происходящих при регулировании явлений и указало путь к построению хороших регуляторов. Такое исследование было выполнено великим английским физиком Джеймсом Клерком Максвеллом (Maxwell, 1831—1879), который в 1868 г. опубликовал статью "О регуляторах". "Регулятор есть часть машины, посредством которой скорость машины поддерживается почти постоянной, несмотря на изменения движущего момента или момента сопротивления" — так начинается статья Максвелла.

В этой статье Максвелл указывает, что для правильного представления о работе регулятора надо учесть инерционность его элементов и составить уравнение колебаний, возникающих при отклонениях действительной скорости вращения машины от номинальной. При исследовании этого уравнения достаточно, однако, ограничиться случаем малых колебаний, ибо если малые колебания будут затухать, то они не разовьются в большие. Исследование же малых колебаний значительно проще, чем больших, и сводится к исследованию линейных дифференциальных уравнений, решения которых будут устойчивыми, если характеристический полином имеет корни только с отрицательными вещественными частями.

Таким образом, Максвелл показал, что устойчивость или неустойчивость машины, снабженной регулятором, зависит от корней характеристического полинома, и для обеспечения устойчивости инженеру достаточно подобрать такие параметры регулятора, чтобы этот полином имел корни с отрицательными вещественными частями. Для полиномов третьей степени Максвелл непосредственно указал условия, обеспечивающие отрицательность вещественных частей корней, и одновременно поставил перед математиками задачу — найти условия и методы проверки отрицательности вещественных частей корней для полиномов любой степени. Эта задача был решена математиками далеко не сразу. Только в 1877 году английский математик Раут (Routh, 1831—1907) дал метод проверки знака вещественных частей корней, получив за это премию Адамса. Заметим, что английская фамилия Routh на русском языке пишется иногда как "Раут", а иногда как "Раус". Поэтому и критерий отрицательности вещественных частей корней полинома, найденный впервые Раутом и усовершенствованный А. Гурвицем (о котором мы далее расскажем подробнее), называется иногда критерием Раута—Гурвица, а иногда — критерием Рауса—Гурвица; в обоих случаях речь идет об одном и том же критерии.

Работа Максвелла правильно наметила принципиальные пути, по которым в дальнейшем пошло развитие теории автоматического управления. В то же время на работе Максвелла сказалось то, что он был все же физиком, а не инженером. Максвелл не мог учесть специфики тех реальных задач, которые стояли перед техникой того времени, и поэтому его работа не оказалась использованной инженерами ни в самой Англии, ни на континенте.

Так, Максвелл считал единственными настоящими регуляторами только регуляторы астатические (которые при постоянной нагрузке дают, теоретически, нулевую ошибку), а регуляторы, которые мы называем статическими, считал просто "модераторами", т. е. уменьшителями колебаний, а не настоящими регуляторами. В то же время при тех параметрах паровых машин, которые были типичными во времена Максвелла, простые статические регуляторы давали вполне достаточную точность, а регуляторы астатические технически еще не могли быть реализованы. Не удивительно, что работа Максвелла не оказала влияния на современную ему технику. Основателем теории регулирования машин, получившей практическое применение в промышленности, по праву считается Иван Алексеевич Вышнеградский (1831—1895), основная работа которого — "О регуляторах прямого действия" — вышла в 1876 г.

Весьма примечательна биография Вышнеградского. Он родился в 1831 г. в Вышнем Волочке в семье священника, окончил духовную семинарию, а затем физико-математический факультет Педагогического института в Петербурге, после окончания которого в 1851 г. работал учителем математики в кадетском корпусе. Еще в Педагогическом институте Вышнеградский обратил на себя внимание преподававшего в институте академика М.В. Остроградского. Работая учителем, Вышнеградский одновременно глубоко изучал математику и механику под руководством Остроградского и в 1854 г. защитил в Петербургском университете диссертацию на степень магистра математических наук (оппонентами были П. Л. Чебышёв и О. И. Сомов). Крымская война 1854—55 гг., обнаружившая техническую отсталость России — и, особенно, в области артиллерии, — побудила Вышнеградского с особенной энергией заняться техникой артиллерийского дела, производства вооружения и боеприпасов.

Вышнеградский выступает одновременно и как преподаватель, автор популярных учебников, и как инженер-практик. В 1859 г. Артиллерийская академия посылает Вышнеградского в длительную заграничную командировку для знакомства с заводами и постановкой технического образования в Германии, Франции и Англии, а по возвращении из командировки в 1862 г. Вышнеградский становится профессором практической механики Михайловской артиллерийской академии, а вскоре и профессором механики Петербургского технологического института, где читает курсы по машиностроению, машиноведению (грузоподъемные машины, токарные станки, паровые машины) и, одновременно, по прикладной механике, теории упругости, термодинамике. С 1875 по 1884 г. Вышнеградский был директором Петербургского технологического института. Преподавание Вышнеградский совмещает с интенсивной деятельностью по перевооружению русской артиллерии. К этому же времени (1876—1878) относятся основоположные работы Вышнеградского по теории регулирования.

Однако, начиная с 80-х годов XIX века, жизненные устремления Вышнеградского начинают меняться. Он принимает участие в управлении рядом железных дорог и промышленных предприятий, занимаясь уже не только технической стороной дела, но и финансами, входит в тесное общение с капиталистами — владельцами предприятий. Общение с ними постепенно меняет его личность и взгляды, он отходит от преподавания, передает свои курсы ученикам и все более и более погружается в финансовую и биржевую деятельность. С 1888 г. Вышнеградский назначается министром финансов Российской империи и окончательно покидает науку. Умер Вышнеградский в 1895 г.

Биография Вышнеградского дает нам очень редкий пример ученого, одаренного творческими способностями и все же изменившего научной работе ради богатства и власти; пример очень редкий, поскольку удовлетворение, получаемое от научной работы, обычно несравнимо с соблазнами богатства или политической власти. И тем не менее, как показывает пример И. А. Вышнеградского, соблазны эти иногда оказываются сильнее и отвлекают от науки.

Рассмотрим теперь основную работу Вышнеградского — статью "О регуляторах прямого действия". По своему содержанию она во многом схожа с рассмотренной нами работой Максвелла "О регуляторах". Независимо друг от друга и Максвелл, и Вышнеградский пришли к выводу, что исследование устойчивости работы машины, снабженной регулятором, можно свести к исследованию корней характеристического уравнения ее малых колебаний.

Однако работа Максвелла, как мы уже указывали, не оказала влияние на практику проектирования реальных регуляторов, тогда как идеи И. А. Вышнеградского получили широкое практическое использование. Поэтому на примере классической работы Вышнеградского полезно рассмотреть те особенности, которые характерны для хороших работ по прикладной математике — таких, которые не "ложатся на полку" для того, чтобы мирно на ней пылиться, а широко применяются в практике.

- ❒ Во-первых, И. А. Вышнеградский, в отличие от Максвелла, исходил из хорошо ему известных параметров паровых машин того времени, поэтому его выводы и рекомендации подтверждались на практике и вызывали тем самым доверие инженеров.
- ❒ Во-вторых, И. А. Вышнеградский не только провел теоретическое исследование работы регуляторов, но и сумел придать результатам своего исследования яркую, четкую, запоминающуюся форму.

Вышнеградский прекрасно понимал, что исследование по прикладной математике только тогда имеет смысл, когда оно доходит до потребителя, до инженера, а инженер может уделить любым работам по прикладной математике лишь очень небольшую долю своего времени. Инженерная деятельность необычайно многообразна, поэтому на работу по прикладной математике инженер сможет обратить внимание только тогда, когда в работе будут четкие, ясные, недвусмысленные рекомендации, допускающие непосредственную проверку. Вышнеградский это знал, и поэтому основные зависимости он выразил наглядным графиком — знаменитой "диаграммой Вышнеградского", а в конце статьи главные выводы своей работы сформулировал в виде лапидарных тезисов, которые и вошли в практику конструирования центробежных регуляторов под названием "тезисов Вышнеградского". Их обычно записывают в следующем кратком виде:

1. Без катаракта нет регулятора.
2. Без неравномерности нет регулятора.

Раскрывая содержание этих тезисов, Вышнеградский показывает, каким образом, используя катаракт и неравномерность, можно синтезировать хорошо работающий регулятор. Заметим, что хотя Вышнеградский в своих исследованиях в целом исходил из параметров существовавших тогда регуляторов, выводы его статьи относились не только к уже работающим регуляторам, но и указывали тенденции их развития. Так, во времена Вышнеградского еще работало немало регуляторов без катаракта; устойчивость таких регуляторов обеспечивалась за счет сил сухого трения между его элементами. Вышнеградский показал, что сухое трение, помогая устойчивости, в то же время очень плохо влияет на качество регулирования, его нужно всемерно уменьшать — и, действительно, в последующих конструкциях регуляторов сухое трение уменьшали. Но тогда необходимым условием устойчивости сделалось наличие катаракта — в полном согласии со знаменитым первым тезисом Вышнеградского: "без катаракта нет регулятора".

Продолжил и развил работы Ивана Алексеевича Вышнеградского выдающийся словацкий ученый и инженер Аурель Стодола (Stodola, 1859—1942). Стодола родился в Словакии, входившей тогда в состав Австро-Венгерской монархии, в 1881 г. он закончил Цюрихский политехникум с дипломом инженера-механика и ряд лет работал инженером на заводах, занимаясь расчетом и конструированием паровых машин, гидротурбин, вентиляторов и воздуходувок. В 1892 г. ему было предложено возглавить кафедру машиностроения в Цюрихском политехникуме, и он возглавлял ее 37 лет до 1929 г., когда, по достижении предельного тогда 70-летнего возраста, вышел в отставку.

Основные работы А. Стодолы по автоматическому регулированию опубликованы в период 1893—1899 гг. В них А. Стодола распространил результаты И. А. Вышнеградского на регуляторы непрямого действия, где передвижение исполнительного механизма регулятора осуществляет не сам чувствительный элемент, а особый двигатель-сервомотор, имеющий самостоятельный источник энергии. Использование сервомоторов позволяло успешно решать задачи регулирования мощных машин и установок, но исследование устойчивости регуляторов непрямого действия приводило к необходимости анализа знака вещественных частей корней характеристических полиномов дифференциальных уравнений высоких порядков.

Полином произвольной степени можно записать в виде:

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots a_0. \qquad (1)$$

Стодола нашел очень простое необходимое условие того, что все корни полинома (1) имеют отрицательные вещественные части: если $a_n > 0$, то для всех остальных коэффициентов должны выполняться условия $a_i > 0$, т. е. среди коэффициентов не должно быть равных нулю или отрицательных (необходимое условие Стодолы).

Основные работы Д. Максвелла и А. Стодолы по автоматическому управлению переведены на русский язык и вместе с работой И. А. Вышнеградского опубликованы в книге [33][*].

По просьбе Стодолы его товарищ и коллега по Цюрихскому политехникуму математик Адольф Гурвиц (Hurwitz, 1859—1919) нашел более сложные необходимые и достаточные условия — должны быть положительными все диагональные определители матрицы:

---

[*] Список литературы приведен в конце главы. Цифры в квадратных скобках обозначают номер в этом списке.

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 & 0 \\ \hline
a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 & 0 \\
0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 & 0 \\ \hline
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline
0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_0
\end{array}\right|,$$

составляемой по следующему правилу: по главной диагонали снизу вверх выписываются последовательно коэффициенты от a_0 до a_{n-1}. Каждый столбец потом дополняется так, чтобы индексы возрастали на единицу сверху вниз от строки к строке. Коэффициенты с индексами больше n, где n — степень полинома (1), и меньше нуля заменяются нулями. Для полинома третьей степени

$$a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 \tag{2}$$

условия Гурвица выглядят так:

1. Все a_i — положительны.
2. $a_2 a_1 > a_3 a_0$ — т. е. произведение средних коэффициентов больше произведения крайних.

В честь А. Гурвица полиномы с отрицательными вещественными частями всех корней называют теперь гурвицевыми полиномами.

Вернемся к рассмотрению динамики паровой машины, снабженной регулятором Уатта. Обозначим через x отклонение частоты вращения от номинальной, а через u — управляющее воздействие, т. е. отклонение заслонки на паропроводе, связанной с шарами, от положения ее при номинальном режиме. Тогда уравнения динамики паровой машины и регулятора в линейном приближении примут вид:

$$J\frac{dx}{dt} + k_1 x = u + \varphi(t); \tag{3}$$

$$m\frac{d^2u}{dt^2} + k_2\frac{du}{dt} + k_3 u = x, \tag{4}$$

где J — момент инерции на валу машины; $\varphi(t)$ — отклонение момента сопротивления на валу машины от номинального; m — масса шаров и связанной с ними заслонки; k_1, k_2 и k_3 — постоянные коэффициенты, из них k_2 — это коэффициент вязкого трения ("катаракта" по старой терминологии) в регуляторе.

В дальнейшем в теории автоматического управления утвердилась следующая терминология — уравнения вида (3), описывающие объект, назывались уравнениями объекта управления, уравнения вида (4), связывающие x и u, показывающие, как и каким образом управление формируется на основе измерений x, измерений выхода, назывались уравнениями регулятора или уравнениями цепи обратной связи, уравнения (3) и (4), рассматриваемые совместно, назывались уравнениями замкнутой системы. Исключая из (3) и (4) переменную u, получим дифференциальное уравнение третьего порядка для x (где $D = \frac{d}{dt}$):

$$[JmD^3 + (Jk_2 + mk_1)D^2 + (Jk_3 + k_2k_1)D + k_1k_3]x = \varphi(t). \tag{5}$$

Из уравнений (3) и (5) следует, что если момент сопротивления изменился на величину $\Delta\varphi$, то при отсутствии регулятора частота вращения изменится (после затухания переходных процессов) на величину

$$\Delta x = \frac{\Delta\varphi}{k_1},$$

где $\frac{1}{k_1}$ — коэффициент неравномерности машины без регулятора, а с учетом регулятора будет:

$$\Delta x = \frac{\Delta\varphi}{k_1k_3},$$

где $\frac{1}{k_3}$ — коэффициент неравномерности регулятора. Для того чтобы машина работала устойчиво, необходимо, чтобы характеристический полином уравнения (5) был гурвицевым, а для этого нужно, чтобы произведение средних коэффициентов было больше произведения крайних; но это возможно лишь если $k_1 > 0$; $k_3 > 0$ и $k_2 > 0$, откуда сразу и следуют уже упоминавшиеся знаменитые "тезисы Вышнеградского": "без неравномерности нет регулятора", "без катаракта нет регулятора".

И. А. Вышнеградский предложил также ввести простую диаграмму — уже упоминавшуюся нами "диаграмму Вышнеградского", на которой наглядно изображались все варианты переходных процессов систем управления, описываемых дифференциальными уравнениями третьего порядка. Характеристический полином таких уравнений имеет вид (2) и содержит четыре коэффициента. Однако И. А. Вышнеградский заметил, что если ввести новые единицы измерения для x и для времени, т. е. ввести новое время τ, исходя из соотношения

$$\tau = \frac{t}{\sqrt[3]{a_3}}, \tag{6}$$

то первый и четвертый коэффициенты в полиноме (2) станут равными единице и полином можно записать в виде:

$$\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + 1, \tag{7}$$

где A и B — параметры Вышнеградского. Если по оси ординат откладывать значения параметра A, а по оси абсцисс — параметра B, то мы получим знаменитую "диаграмму Вышнеградского" (рис. 13.1) для корней характеристического полинома (7). Корни с отрицательными вещественными частями будут лежать выше гиперболы MN, описываемой уравнением $AB = 1$ (действительно, только при $AB > 1$ полином (7) будет гурвицевым). Важное значение имеет клиновидная область ECF на диаграмме Вышнеградского. Для значений A и B, находящихся внутри этой области, все три корня характеристического полинома будут вещественными отрицательными, и поэтому переходный процесс в замкнутой системе не будет колебательным.

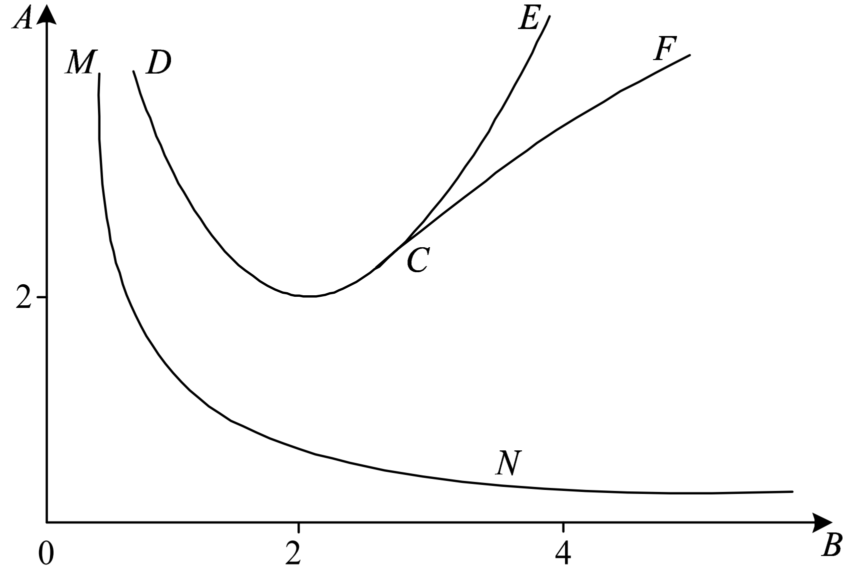


Рис. 13.1. Диаграмма Вышнеградского

С помощью диаграммы Вышнеградского можно выбрать параметры линейного регулятора, обеспечивающего любой желаемый характер переходного процесса, поэтому она широко использовалась при расчетах систем управления и в XIX, и в XX веке.

Более сложные проблемы возникали при анализе устойчивости нелинейных систем, коэффициенты которых зависят от величины исследуемой переменной. Для нелинейных систем, как известно, решения, удовлетворяющие разным начальным условиям, могут различаться по устойчивости.

С этим пришлось столкнуться кораблестроителям при анализе устойчивости корабля по углу крена (ввиду ее важности для корабля устойчивость по углу крена имеет собственное название и называется "остойчивостью" корабля). Первые исследования остойчивости в линейном приближении проводил еще Леонард Эйлер. Он установил, что остойчивость зависит от взаимного положения двух точек корабля — его центра масс и точки пересечения направления выталкивающей силы воды с плоскостью симметрии корабля. Эту точку называют метацентром, а расстояние между центром масс и метацентром — метацентрической высотой. Если метацентр расположен выше центра масс, то метацентрическая высота положительна, и корабль остойчив. Это означает, что если начальный угол крена $\theta \neq 0$, то при положительной метацентрической высоте корабль вернется "на ровный киль", к значению $\theta = 0$. Если же метацентрическая высота отрицательна, то произойдет "оверкиль", корабль опрокинется и утонет.

До середины XIX века военные корабли строились из дерева, имели высокие борта, метацентрическая высота мало зависела от угла крена, поэтому расчеты остойчивости "по Л. Эйлеру" вполне соответствовали реальному поведению судов и стали привычными.

Опыт боевых столкновений военных кораблей во время Гражданской войны в США в 1861—1865 годах заставил перейти к постройке броненосных судов с низкими бортами. Для таких судов при $\theta \neq 0$ палуба могла уходить под воду, метацентрическая высота начинала существенно зависеть от крена, и прежний расчет ее величины при $\theta = 0$ уже не мог дать надежного ответа об остойчивости, поскольку система уравнений, описывающих изменения крена в функции времени, становилась нелинейной.

Весной 1869 года главный кораблестроитель английского флота Рид сделал доклад об остойчивости с учетом нелинейных эффектов в Английском обществе корабельных инженеров. Он указал на опасность опрокидывания строившихся тогда судов типа "Captain" и настаивал на изменении их конструкции. Тогдашние "лорды Адмиралтейства", решавшие вопрос о конструкции и постройке судов, пренебрегли предостережениями науки, доклад Рида был ими проигнорирован, первый корабль типа "Captain" построили, ввели в строй, и уже 7 сентября 1870 года во время пробного плавания эскадры он был опрокинут налетевшим шквалом, который не нанес никакого вреда остальным десяти кораблям эскадры, в составе которой "Captain" плавал. Из 550 человек его экипажа спаслось только 17.

В память об этой трагедии в главном и самом большом храме Лондона, в соборе святого Павла, была вделана в стену бронзовая доска, на которой крупными буквами выгравировали приговор суда, выражавший жесткое порицание "невежественному упрямству" тогдашних лордов адмиралтейства.

Этот случай, а также суровый приговор суда, ставший хорошо известным благодаря доске, помещенной в главном храме Лондона "в назидание потомкам", повлияли на отношение английского общества к предостережениям науки. В России, к сожалению, не было такого, тем более, известного всем приговора суда. Вот результат — в 50-х годах XX века английские ученые предупредили правительство, что использование торпед с перекисью водорода на подводных лодках очень опасно. Предупреждение ученых было услышано, и торпеды с перекисью водорода были сняты с вооружения английского флота. В Советском Союзе и в России ученые также делали такие же предупреждения, но их не слушали, торпеды с перекисью водорода оставались на вооружении, и в 2003 году произошло то, что рано или поздно должно было случиться: одна из опасных торпед взорвалась и повлекла за собой катастрофу, потрясшую всю Россию, — подводная лодка "Курск" после взрыва этой торпеды затонула вместе со всем своим экипажем. Такова цена неуважения к предостережениям науки.

Помимо проблемы остойчивости судов, задачи исследования устойчивости нелинейных систем появлялись и в других областях приложений. Возникла необходимость в общих методах расчета устойчивости, и они вскоре были созданы.

Для линейных систем проблему анализа устойчивости решили условия Раута—Гурвица. Значительно более сложная проблема устойчивости нелинейных систем получила решающий сдвиг в результате исследований великого русского математика Александра Михайловича Ляпунова (1857—1918).

А. М. Ляпунов родился в 1857 г. в Ярославле, где его отец был в те годы директором Демидовского лицея; после окончания в 1876 г. гимназии в Нижнем Новгороде он учился до 1880 г. на математическом отделении физико-математического факультета Петербургского университета, где наибольшее влияние оказал на него П. Л. Чебышёв. По окончании университета в 1880 г. А. М. Ляпунов был оставлен при университете (на кафедре механики) для подготовки к преподавательской деятельности, успешно сдал к 1882 г. магистерские экзамены, и перед ним встал важнейший для молодого ученого вопрос — о выборе направления дальнейшей научной работы. Вот что рассказывал об этом сам А. М. Ляпунов: "В 1882 г., желая подыскать подходящую тему для магистерской диссертации, я не раз беседовал с Чебышёвым по поводу различных математических вопросов, причем Чебышёв всегда высказывал мнение, что заниматься легкими, хотя бы и новыми вопросами, которые можно разрешать общеизвестными методами, не стоит; всякий молодой ученый, если он уже приобрел некоторый навык в решении математических вопросов, должен попробовать свои силы на каком-нибудь серьезном вопросе, представляющем известные теоретические трудности. При этом он предложил мне следующий вопрос: «Известно, что при некоторой величине угловой скорости эллипсоидальные формы перестают служить формами равновесия вращающейся жидкости. Не переходят ли они при этом в какие-либо новые формы? …Вот если бы Вы разрешили этот вопрос, на Вашу работу сразу обратили бы внимание»". "Впоследствии я узнал, — продолжал Ляпунов, — что этот же вопрос предлагал и другим математикам, как например, Золотареву, молодому тогда ученому, блестящие лекции которого я слушал в университете, и Софье Ковалевской. Не знаю, пробовали ли решать этот вопрос Золотарев и Ковалевская. Я же сильно заинтересовался этим вопросом, тем более, что Чебышёв не дал никаких указаний для его решения, и я тотчас же принялся за работу".

Так вошла в жизнь А. М. Ляпунова проблема устойчивости — основная тема его научной работы на все последующие годы. В 1885 г. он защитил магистерскую диссертацию "Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости", был утвержден в звании приват-доцента и переехал в Харьков, где возглавил кафедру механики в Харьковском университете. В Харькове А. М. Ляпунов работал до 1902 г., когда после избрания действительным членом Российской Академии наук он переехал в Петербург. В Петербурге Ляпунов уже не занимался преподаванием, а целиком сосредоточился на научной работе, посвященной проблемам равновесия и устойчивости фигур небесных тел. В июне 1917 г. А. М. Ляпунов переехал в Одессу и там же, 3 ноября 1918 г. скончался.

К харьковскому периоду жизни А. М. Ляпунова относится и его наиболее знаменитая работа — докторская диссертация "Общая задача об устойчивости движения", опубликованная в 1892 г. в Харькове и защищенная в том же году в Московском университете.

Академик Владимир Андреевич Стеклов (1863—1926), хорошо знавший А. М. Ляпунова, так характеризовал его: "Воспитанный сначала своим отцом, сотоварищем Н. И. Лобачевского по Казанскому университету, затем в кругу лиц, близких к нашему физиологу И. М. Сеченову, проведший всю юность в среде наиболее просвещенной части нашего тогдашнего общества, на умы которого еще продолжали влиять Н. А. Добролюбов и Н. Г. Чернышевский, А. М. Ляпунов олицетворял собою лучший тип идеалиста 60-х годов..."

"Все из ряда вон выходящие силы свои он отдавал на беззаветное служение науке, ею одной жил, в ней одной видел смысл жизни и часто говорил, что без научного творчества и сама жизнь для него ничего не стоит".

"С самого начала своей ученой деятельности он работал изо дня в день до четырех-пяти часов ночи, а иногда являлся на лекции (в Харьковском университете) не спав всю ночь".

"Он не позволял себе никаких развлечений, и если появлялся иногда (раз или два в год) в театре или на концерте, то лишь в самых исключительных случаях, как, например, на редких концертах своего брата, известного композитора С. М. Ляпунова".

"Круг знакомств А. М. Ляпунова был крайне ограничен и состоял из ближайших его родственников и небольшого числа ученых, по преимуществу математиков, причем редкие товарищеские собрания, на которых бывал А. М. Ляпунов, преимущественно сводились, особенно в Харьковский период его жизни, к высшей степени поучительным собеседованиям по текущим вопросам науки".

"Отчасти потому и производил он иногда на лиц, мало его знавших, впечатление молчаливо-хмурого, замкнутого человека, что зачастую настолько был поглощен своими научными размышлениями, что смотрел и не видел, слушал — и не слышал..."

В лице А. М. Ляпунова мы сталкиваемся с примером ученого, не занимавшегося непосредственно практической деятельностью или прикладными задачами, но чьи труды, тем не менее, оказали большое влияние на практику управления. А. М. Ляпунов не интересовался конкретными прикладными задачами, но он прекрасно понимал, насколько важную роль играет проблема устойчивости в понимании всего окружающего нас мира — как мира природы, так и мира техники. Это понимание центральной роли проблемы устойчивости, ее философского смысла и значения вдохновляло А. М. Ляпунова на многолетние усилия по решению труднейших задач из этой области. И хотя сам Ляпунов никогда не интересовался техническими вопросами, техника управления использовала результаты его работ. Правда, это произошло не сразу. Оригинальные работы А. М. Ляпунова написаны трудно, и мало кому были доступны. Рассказывают, что когда А. М. Ляпунов послал перевод своей докторской диссертации "Общая задача об устойчивости движения" одному из известных французских математиков, тот ответил: "Наверное, это прекрасная работа; к сожалению, моей жизни не хватит для того, чтобы понять ее".

Однако в дальнейшем, после изложения идей А. М. Ляпунова его последователями, продолжателями и популяризаторами, выяснилось, что по существу своему эти идеи вовсе не столь уж сложны. Именно методы Ляпунова (с учетом модификации их, проведенной его последователями) легли в основу анализа устойчивости нелинейных систем автоматического управления. Судьба исследований А. М. Ляпунова еще раз подчеркивает важность для общего развития науки работ тех многочисленных ученых, которые, может быть, и не попадают на страницы истории математики, но без которых эта история не была бы столь блестящей и столь плодотворной. В нашей книге мы по необходимости смогли упомянуть имена лишь очень небольшой доли ученых, развивавших математику как науку и постепенно придавших ей ее современный облик. Мы упоминали, в основном, лишь наиболее крупные и выдающиеся имена. Их роль велика. Они отмечают собой поворотные точки, важнейшие этапы в развитии науки. Но наука не могла бы развиваться, если бы работы гениев не были поняты, подхвачены, продолжены теми многочисленными научными работниками, которые, в большинстве своем, не оставили своих имен на страницах истории науки, но без которых эта история не могла бы сложиться. Наука — дело коллективное.

Вот как выглядит, для примера, метод расчета "по Ляпунову" устойчивости нулевого решения следующей системы нелинейных дифференциальных автономных уравнений (система эта, как известно, служит хорошей математической моделью для описания поведения очень многих объектов в физике, в технике и в других областях приложений математики):

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1;\ \dots\ x_n); \\ \dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(x_1;\ \dots\ x_n). \end{cases} \tag{8}$$

Введем в рассмотрение функцию V переменных $x_1;\ \dots\ x_n$, которая равна нулю тогда, когда все переменные равны нулю, и положительна для всех других значений переменной. Примером такой функции может служить:

$$V = x_1^2 + \dots + x_n^2. \tag{9}$$

Вычислим теперь полную производную по времени функции V на решениях системы (8). Такую производную называют "производной в силу системы (8)". Используем известную формулу для полной производной:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial V}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} \tag{10}$$

и подставим вместо каждой из производных $\frac{dx_i}{dt}$ их значения из уравнений (8). Получим для "производной в силу системы" формулу:

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial x_1}f_1(x_1;\dots x_n)+\cdots+\frac{\partial V}{\partial x_n}f_n(x_1;\dots x_n). \qquad (11)$$

Пусть теперь функция V такова, что производная (11) для всех $x_{\text{i}}\neq 0$ отрицательна. Такую функцию называют функцией Ляпунова, поскольку еще в 1892 г. А. М. Ляпунов доказал, что если такая функция существует, то нулевое решение системы (8) (т. е. решение $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$) асимптотически устойчиво [32].

Доказательство А. М. Ляпунова допускает наглядную интерпретацию — если производная функции V отрицательна, то функция будет только убывать, стремясь к своему наименьшему значению, к нулю, а поскольку $V = 0$ достигается лишь при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, то и все переменные $x_i(t)$ будут стремиться к нулю, и нулевое решение устойчиво.

Мы изложили наиболее простую часть теории Ляпунова. Несколько более сложными будут те случаи, когда исследуемые дифференциальные уравнения не автономны, когда производные функций Ляпунова не обязательно отрицательны, а только не положительны и т. п. Однако в целом теория Ляпунова — в том виде, который она приняла в руках его продолжателей, — вполне доступна.

Подчеркнем главное — если найдена та или иная функция Ляпунова, то вопрос об устойчивости нулевого решения нелинейной системы решен, а вопрос об устойчивости любого решения несложно свести к исследованию устойчивости нулевого решения. Поэтому несмотря на то, что отыскать функцию Ляпунова нелегко, а общих методов нахождения таких функций на сегодня не существует, построением функций Ляпунова занимались многие исследователи: В. И. Зубов [11, 13, 14], Е. А. Барбашин [3], Ла-Салль, Лефшец [23], А. И. Лурье [30, 31], И. Г. Малкин [34], Н. Д. Моисеев [35] и многие другие.

После того как в работах И. А. Вышнеградского, А. Стодолы, А. М. Ляпунова и других ученых была решена важнейшая проблема обеспечения устойчивости, автоматическое управление и регулирование стали быстро развиваться, охватывая все новые и новые области приложений.

В XX веке вслед за регулированием частоты вращения паровых машин регуляторы с обратной связью стали поддерживать частоту вращения паровых и газовых турбин, двигателей внутреннего сгорания, электродвигателей и т. п. Регуляторы постоянства частоты (и других параметров) самых различных устройств и механизмов теперь исчислялись уже не десятками тысяч, как в

XIX веке, а миллионами. Затем начали переходить к более сложным задачам управления, когда ставилось целью не просто поддержание постоянства какой-либо регулируемой величины, а изменение ее по желаемому закону, по заранее заданной программе. Появились многочисленные системы программного управления и следящие системы.

Программы управления могли передаваться на большие расстояния — например, посредством радиосигналов — и тогда получались системы дистанционного управления, управления на расстоянии. Подобные системы называли еще "системами телемеханики", и ими особенно увлекались в 30-х годах XX века.

С точки зрения теории и методов расчета эти новые области приложений не влекли за собой чего-либо принципиально нового. Те же самые регуляторы с обратной связью, которые обеспечивали малость отклонения регулируемой величины $x(t)$ от постоянного значения x_0, могли обеспечить и малость отклонения той же величины $x(t)$ от требуемого программой или отслеживаемого в следящей системе значения $y(t)$. Для этого в канал обратной связи достаточно было подавать не разность $\varepsilon = x(t) - x_0$, а разность $\varepsilon = x(t) - y(t)$, и регулятор с обратной связью с большими коэффициентами усиления легко обеспечивал малость разности ε и близость движения объекта управления к заданному программному или отслеживаемому. Необходимо было обеспечить лишь устойчивость замкнутой системы при больших коэффициентах усиления в цепи обратной связи.

Для расчетов устойчивости Найквистом (Nyquist H.) в 1932 году и А. В. Михайловым в 1938 году были предложены частотные методы. Вместо того чтобы проверять, является ли характеристический полином замкнутой системы

$$a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_0 \tag{12}$$

гурвицевым или нет (что для больших степеней n требовало громоздких вычислений, затруднительных для вычислительной техники 30-х годов XX века), стали строить на комплексной плоскости годограф функции

$$F(j\omega) = a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \ldots + a_0$$

(т. е. оператор дифференцирования $D = \frac{d}{dt}$ в полиноме (12) заменяли на число $j\omega$, где $j = \sqrt{-1}$) и на основании поведения годографа функции $F(j\omega)$ на комплексной плоскости выносили суждение об устойчивости.

В дальнейшем именно на основе частотных методов теория автоматического управления начала формироваться как научная дисциплина, преподаваемая в высших учебных заведениях.

На основе частотных методов были написаны и первые учебники — одним из них был опубликованный в 1950 г. учебник Авенира Аркадьевича Воронова, впоследствии — академика АН СССР, автора многих работ по управлению.

Постоянно растущие роль и значение автоматического управления привели к организации в 1939 году в Москве Научно-исследовательского института автоматики и телемеханики Академии наук СССР (переименованного позднее в Институт проблем управления). Первым директором института был академик Виктор Сергеевич Кулебакин (1891—1970). Еще ранее, в 1936 году, стал выходить журнал "Автоматика и телемеханика", в названии которого отразилось увлечение телемеханикой в 30-х годах XX века.

Этот журнал регулярно выходит со дня основания, и до последних лет оставался наиболее авторитетным изданием в области теории управления, которая в последние десятилетия так сильно "математизировалась", что ее уже можно рассматривать как один из разделов прикладной математики.

В журнале "Автоматика и телемеханика" была в 1939 году опубликована статья [59] профессора Георгия Владимировича Щипанова (1903—1953), основателя первой в Советском Союзе кафедры автоматики в Московском авиационном институте. Статья была посвящена новому принципу управления — не управлению по принципу обратной связи, не управлению "по отклонению" $\varepsilon = x(t) - x_0$ действительного движения от желаемого, а управлению "по возмущению", когда управляющее воздействие непосредственно компенсирует те возмущающие воздействия $\varphi(t)$, которые являются причиной появления отклонения $\varepsilon = x(t) - x_0$. При правильно подобранной величине компенсации регулируемая величина при управлении "по возмущению" становится "инвариантной" (т. е. — неизменной) по отношению к возмущающему воздействию.

Теория "управления по возмущению" возникла из анализа давно применяемых в технике остроумных решений по компенсации возмущений. Характерным примером были генераторы постоянного тока, для которых возмущающим воздействием был ток нагрузки, приводящий к колебаниям напряжения генератора. Для их уменьшения еще в XIX веке было предложено пропускать ток нагрузки через дополнительную последовательную (называемую еще сериесной) обмотку возбуждения. Эта обмотка создавала дополнительную электродвижущую силу, компенсирующую колебания напряжения генератора при изменении нагрузки. При правильном выборе числа витков дополнительной последовательной обмотки напряжение генератора становилось инвариантным (неизменным) по отношению к колебаниям нагрузки.

Конечно, в случае с генератором постоянного тока достижение инвариантности облегчалось тем, что ток нагрузки было легко направить в обмотку возбуждения, и тогда он непосредственно, без преобразования, компенсировал свое возмущающее воздействие на величину напряжения. Г. В. Щипанов показал, что и для многих других технических объектов возмущающий фактор — но только соответствующим образом преобразованный — может обеспечить инвариантность регулируемой величины.

Однако публикация статьи Г. В. Щипанова [59] была встречена злобной и несправедливой критикой (см. "Известия АН СССР", отделение технических наук, 1940, № 3), результатом которой стала многолетняя задержка в практическом использовании теории инвариантности. Г. В. Щипанов на страницах того же журнала ("Известия АН СССР") убедительно ответил на критику, но это не помогло — его оппоненты сумели перевести спор из научной сферы в политическую. Критика Г. В. Щипанова появилась в журнале "Большевик", а затем в газете "Правда" — в центральном органе правящей партии ВКП(б). В результате в апреле 1941 года Президиум Академии наук СССР утвердил выводы специальной комиссии, признавшей результаты Щипанова неверными и ошибочными. Академики Н. Н. Лузин и В. С. Кулебакин письменно выразили свое решительное несогласие с решением Президиума, но следствием этого стало увольнение В. С. Кулебакина с поста директора Института автоматики и телемеханики, а Г. В. Щипанова уволили с работы. Лишенный доступа к любимой науке, он скончался в 1953 году, не дожив и до 50 лет.

Только через 7 лет после его кончины, в 1960 году, отменили решение Президиума АН СССР 1941 года, осудившее работы Г. В. Щипанова, — и только тогда, с большим опозданием, теория инвариантности была признана и стала широко использоваться в автоматическом управлении. В "реабилитации" теории инвариантности сыграли большую роль исследования академика Бориса Николаевича Петрова (1913—1986) и разработанный им "принцип двухканальности", позволивший окончательно рассеять недопонимание условий реализуемости инвариантных систем.

По отношению к теории инвариантности повторилась ситуация, которая многократно встречалась и еще не раз будет встречаться в истории науки — работы первооткрывателя натыкаются на несправедливую критику, отвергаются и не используются. Проходит время, приходят новые исследователи, повторяют (иногда совершенствуют) его результаты. И вот после появления новых исследований работы первооткрывателя получают (хотя и с большой и очень досадной задержкой) практическое применение и восторженное признание. С Г. В. Щипановым все произошло именно так.

На втором Всесоюзном совещании по теории автоматического регулирования академик Кулебакин, вспоминая о судьбе исследований Щипанова, с сожалением говорил: "Его надо было своевременно поправить, поддержать — и тогда принцип инвариантности получил бы более широкое развитие и применение".

Завершая тему устойчивости, расскажем об интересной судьбе так называемой "гипотезы Айзермана". Еще в 40-е годы XX века внимание исследователей привлекли часто встречающиеся системы, состоящие из линейного объекта управления и регулятора, в котором зависимость управляющего воздействия u от сигнала рассогласования ε в цепи обратной связи является нелинейной, т. е. $u = k(\varepsilon)$, причем $0 \leq k(\varepsilon) \leq k_0\varepsilon$ — т. е., как показано на рис. 13.2, функция $f(\varepsilon)$ лежит внутри сектора, ограниченного прямыми $u = 0$ и $u = k_0\varepsilon$. В 1949 году профессор М. А. Айзерман (1913—1992) высказал и опубликовал очень правдоподобную гипотезу: необходимым и достаточным условием устойчивости данной нелинейной системы является устойчивость всех линейных систем, в которых $u = k\varepsilon$ для всех k, заключенных в пределах $0 \leq k \leq k_0$.

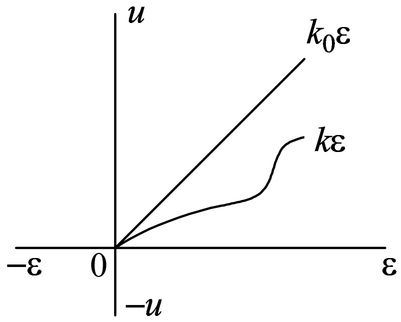


Рис. 13.2. Иллюстрация гипотезы Айзермана

Гипотеза Айзермана оказалась очень заманчива. В ее пользу говорило и существование большого числа систем, для которых она была проверена и оказалась справедливой. Однако в 1958 году В. А. Плисс нашел и опубликовал контрпример — т. е. пример системы, для которой гипотеза Айзермана несправедлива. После опубликования контрпримера простая и заманчивая гипотеза Айзермана, как и полагается в науке, была отвергнута. Она оказалась лишь необходимым, но недостаточным условием устойчивости рассматриваемых систем. Значительно более сложное достаточное условие в 1961 году было найдено румынским математиком В. М. По́повым (ударение на первом слоге), сформулировавшим известный "критерий В. М. По́пова" в теории устойчивости нелинейных систем.

Отметим еще, что удобный и эффективный метод проверки устойчивости был предложен в работе [14] Владимира Ивановича Зубова (1930—2000).

С течением времени все больше выходила на первый план задача оптимизации управления — т. е. построения такого регулятора, который обеспечивал бы не только устойчивость замкнутой системы, но и минимальные отклонения регулируемой величины от желаемого значения — при наличии колебаний нагрузки, возмущающих сил и т. п. Основная сложность заключалась в том, что указанные возмущающие воздействия являлись случайными функциями времени, и поэтому теория построения (или, как часто говорят, — синтеза) оптимальных регуляторов стала успешно развиваться лишь после того, как была разработана теория случайных функций, случайных процессов.

13.2. Случайные процессы

Теория случайных функций, случайных процессов является одной из глав современной теории вероятностей. В этой книге мы не рассматривали историческое развитие теории вероятностей до XX века, поскольку оно хорошо отражено во многих монографиях и учебных пособиях, посвященных истории математики.

Что же касается теории случайных функций, то она выросла из запросов практики, приложений, в частности — из необходимости расчета качки судов на нерегулярном волнении, а затем была применена к расчету систем автоматического управления, но произошло это уже во второй половине XX века.

Качка при регулярном волнении рассчитывалась еще в XIX веке, и расчет этот был не очень сложен. Для простейшего случая бортовой качки, когда ширина корабля много меньше длины волны, угол крена θ удовлетворяет уравнению

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2}+k\frac{d\theta}{dt}+\theta=\varphi(t), \tag{13}$$

где $\varphi(t)$ — возмущающее воздействие, угол волнового склона; J — момент инерции корпуса корабля; k — коэффициент демпфирования, определяемый вязкостью воды и всегда положительный. Решение уравнения (13), как и любого линейного уравнения, является, как известно, суммой общего решения однородного уравнения и частного решения. Если считать $\varphi(t)$ гармонической функцией: $\varphi(t) = A \sin\omega_0 t$, где $2\pi/\omega_0$ — период волны, то через некоторое время общее решение однородного уравнения

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2}+k\frac{d\theta}{dt}+\theta=0 \tag{14}$$

затухнет и останется только частное решение уравнения (13), решение

$$\theta(t)=\frac{A}{\left|J(j\omega_0)^2+k(j\omega_0)+1\right|}\sin(\omega_0 t+\psi_0), \tag{15}$$

т. е. синусоида той же частоты ω_0, но с другой амплитудой и фазой. Таким образом, изменение угла крена судна θ в функции времени t будет при регулярном волнении гармонической функцией, и крен может быть легко вычислен по простой формуле (15).

То же самое имеет место и для линейных дифференциальных уравнений любого порядка вида:

$$A(D)x=\varphi(t), \tag{16}$$

где $A(D)=a_nD^n+a_{n-1}D^{n-1}+\ldots+a_0$ — гурвицев полином от оператора дифференцирования $D=\frac{d}{dt}$, а $\varphi(t)=M\sin(\omega_0 t)$. В этом случае общее решение однородного уравнения $A(D)x = 0$ также затухает с течением времени и остается простое частное решение:

$$x(t)=\frac{M}{\left|A(j\omega_0)\right|}\sin(\omega_0 t+\psi_0). \tag{17}$$

Мы убеждаемся, что для вычисления амплитуды частного решения достаточно в полином $A(D)$ подставить вместо D число $j\omega_0$ и вычислить модуль $\left|A(j\omega_0)\right|$.

Простота формулы (15) позволила А. Н. Крылову в 1896 году дать полную теорию более сложных видов качки, где нужно было учитывать соизмеримость размеров корпуса корабля с длиной волны, взаимодействие килевой и бортовой качки, влияние скорости хода корабля и т. п. В основе теории лежало выделение частных решений. А. Н. Крылов понимал (и писал об этом), что основание теории качки — шаткое, что для реального морского волнения истинный угол крена $\theta(t)$ не стремится с течением времени к частному решению (15), поскольку $\varphi(t)$ является не гармоническим колебанием, не синусоидой, а случайной функцией, принципиально полностью непредсказуемой. Однако для полного решения проблемы математика того времени еще не давала достаточных средств.

Эти средства появились намного позже, в ходе исследования стационарных случайных процессов. Над проблемой частичного предсказания будущих значений процесса по прошлым измерениям работали такие выдающиеся математики, как Андрей Николаевич Колмогоров (1903—1987), работа которого [19] была опубликована в 1941 г., и Норберт Винер (Wiener, 1894—1964).

Н. Винер получил существенные результаты в теории предсказания позже А. Н. Колмогорова, в 1942—43 годах, когда США вели войну против Германии и Японии, и результаты Винера могли быть использованы для улучшения точности зенитной стрельбы (поскольку позволяли частично предсказывать будущее движение неприятельского самолета). Н. Винер оформил свои результаты как секретный отчет, который был напечатан небольшим тиражом в виде книги в желтой обложке и разослан по многим организациям США, занимающимся приборами управления зенитным огнем.

Этим организациям книга Н. Винера принесла большой вред: с одной стороны, нельзя было отказаться от ее изучения, поскольку было ясно, что если в ней досконально разобраться, то эффективность зенитной стрельбы можно существенно повысить. С другой стороны, несмотря на большие затраты времени и труда, отвлекавшие от других важных работ военного значения, никому не удавалось понять и использовать результаты Н. Винера. Поэтому принесшую тогда много вреда книгу Винера в желтой обложке ученые прозвали "желтой опасностью" и даже вносили предложение: подкинуть ее в Германию, чтобы и немецкие ученые во время напрасных попыток понять ее содержание не могли бы выполнять другие военные разработки.

В дальнейшем Винер упростил изложение своих результатов и включил их в изданную в 1948 г. и переведенную потом на многие языки известную его книгу "Кибернетика" [9]. В русском переводе [9] раздел о предсказании временных рядов занимает страницы 91—110, и читатель этих страниц быстро убедится, что и после упрощений, введенных Н. Винером в 1948 г., усвоить его рассуждения не очень легко. Только несколько позже уже другие ученые коренным образом улучшили изложение результатов теории случайных процессов.

В ее основе лежит понятие корреляционной функции $k_\varphi(\tau)$ стационарного случайного процесса $\varphi(t)$, определяемой равенством

$$k_\varphi(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \varphi(t)\varphi(t+\tau)dt. \tag{18}$$

Корреляционная функция отражает тесноту связи между значениями $\varphi(t)$, разделенными временем τ. При $\tau = 0$ получаем средний квадрат $\varphi(t)$, обозначаемый обычно угловыми скобками

$$\langle\varphi^2\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \varphi^2(t)dt = k_\varphi(0). \tag{19}$$

В приложениях очень часто встречаются корреляционные функции, близкие к экспоненте

$$k_{\varphi}(\tau)=\langle\varphi^{2}\rangle e^{-\alpha\tau}. \tag{20}$$

(Так, например, выражение (20) хорошо аппроксимирует корреляционную функцию "телеграфного сигнала", рассмотренного в *главе 11* и показанного на рис. 11.6, а также хорошо аппроксимирует корреляционную функцию совсем другого случайного процесса — напряжения в телефонном аппарате, показанного на рис. 11.7. Корреляционные функции этих процессов различаются лишь величиной коэффициента затухания α). Вообще разнообразие корреляционных функций много меньше разнообразия самих случайных процессов, поскольку корреляционная функция не является полной, исчерпывающей характеристикой случайного процесса, не заключает в себе полной информации о нем.

Заметим, что хотя в формулу (18) входит интегрирование по бесконечному промежутку, в действительности хорошее приближение к корреляционной функции можно получить, интегрируя измеренные значения $\varphi(t)$ и $\varphi(t+\tau)$ на совсем умеренном интервале $[-T; +T]$. Корреляционная функция, таким образом, вычисляется несложно, а затем к ней применяют косинус-преобразование Фурье — т. е. $k_{\varphi}(\tau)$ умножают на $\cos\omega\tau$, интегрируют по τ и получают функцию $S_{\varphi}(\omega)$, которую называют спектром (или спектральной плотностью мощности) процесса $\varphi(t)$:

$$S_{\varphi}(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}k_{\varphi}(\tau)\cos\omega\tau d\tau. \tag{21}$$

Если, например, $k_{\varphi}(\tau)=e^{-\alpha\tau}$, то, вычисляя интеграл (21), получаем:

$$S_{\varphi}(\omega)=\frac{2}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^{2}+\omega^{2}}. \tag{22}$$

Для линейных дифференциальных уравнений вида (16), где $A(D)$ — гурвицев полином, имеет место простая формула:

$$\langle x^{2}\rangle=\int_{0}^{\infty}S_{\varphi}(\omega)\frac{d\omega}{|A(j\omega)|^{2}}. \tag{23}$$

Таким образом, если $\varphi(t)$ — случайный процесс, то вычислить само решение $x(t)$ уравнения (16) невозможно, но зато средний квадрат решения вычисляется по формуле (23) очень просто. В то же время знание среднего квадрата говорит весьма много о решении $x(t)$. Значения случайного процесса чаще всего распределены по нормальному закону, и тогда имеет место простое соотношение — вероятность P того, что значение $|x(t)|$ не превысит величины $k\sigma_x$ (где $\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle}$), зависит только от k и выражается формулой

$$P(|x| \le k\sigma_x) = \Phi(k), \tag{24}$$

где P — вероятность, а $\Phi(k)$ — известный "интеграл вероятностей" (называемый еще интегралом Лапласа):

$$\Phi(k) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^k e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \tag{25}$$

для которого были давно составлены подробные таблицы.

В частности, если $k = 3$, то $\Phi(k) = 0,9973$. Это означает, что с вероятностью 0,9973 — т. е. с практической достоверностью — модуль функции $x(t)$ не превысит трех среднеквадратичных отклонений.

Данное соотношение позволяет легко производить практические расчеты.

Пример: пусть мы для конкретного судна вычислили, пользуясь формулами (18), (21) и (23), что среднеквадратичный угол крена $\sigma_\theta = 5°$, а опасность опрокидывания для данного судна начинается с крена $\theta = 20°$. Тогда на основе формулы (25) мы делаем достоверное заключение: максимальное значение угла крена не превышает $3 \times 5° = 15°$, и поэтому данная качка — не опасна, к опрокидыванию судна она не приведет.

Начиная с 50-х годов XX века простая формула (23) лежит в основе расчета качки судов на реальном, нерегулярном волнении [4], расчета следящих систем и систем управления [27, 40] и многих других расчетов.

Что касается расчета оптимального регулятора, обеспечивающего наилучшее качество управления, то эти расчеты сложнее. Дело в том, что поиск оптимального регулятора — это, фактически, поиск оптимального оператора, наилучшим образом преобразующего функцию $x(t)$ на входе регулятора в функцию $u(t)$ (где u — управляющее воздействие) на его выходе. В свое время Н. Винер предложил следующую классификацию математических объектов в порядке их возрастающей сложности:

1. Функция. Она ставит в соответствие числу (аргументу функции) другое число — значение функции. Дифференциальное исчисление позволяет найти аргумент, доставляющий максимум (или минимум) функции.

2. Функционал (например, определенный интеграл). Он ставит в соответствие функции число — значение функционала. Вариационное исчисление позволяет найти функции, доставляющие максимум (или минимум) функционалам.
3. Оператор (например, оператор дифференцирования). Он функции ставит в соответствие другую функцию. Пока не существует математического аппарата, позволяющего систематически находить операторы, оптимальные в том или другом смысле.

В последнее время термин "оператор" получил другие определения; однако классификация Н. Винера наиболее наглядна и подчеркивает трудность задачи поиска оптимального оператора.

13.3. Синтез оптимальных регуляторов

Оптимальные регуляторы для систем управления, в которых возмущающие воздействия являлись случайными процессами, были впервые получены на основе распространения результатов теории оптимальной фильтрации А. Н. Колмогорова и Н. Винера [19, 9] на системы автоматического управления с обратной связью. Сперва определялись характеристики эквивалентной разомкнутой системы, обеспечивающей минимум среднеквадратичной ошибки, затем — параметры оптимальной обратной связи. К 1973 г. утвердился следующий алгоритм построения оптимального регулятора вида:

$$W_1(D)x = W_2(D)u, \qquad (26)$$

(где $W_1(D)$ и $W_2(D)$ — полиномы от оператора дифференцирования $D = \frac{d}{dt}$), доставляющего минимум критерию качества

$$J = m^2\langle x^2\rangle + \langle u^2\rangle \qquad (27)$$

для объекта управления вида:

$$A(D)x = u + \varphi(t). \qquad (28)$$

1. В основу расчета кладется аналитическая аппроксимация экспериментальных данных о спектральной плотности возмущающего воздействия $\varphi(t)$, которая аппроксимируется дробно-рациональной четной функцией:

$$S_\varphi(s) = \frac{a_p s^{2p} + a_{p-1}s^{2p-2} + \ldots + a_0}{b_q s^{2q} + b_{q-1}s^{2q-1} + \ldots + b_0}. \qquad (29)$$

Далее эта спектральная плотность факторизуется

$$S_\varphi(s) = S_1(s)S_1(-s), \tag{30}$$

т. е. представляется как произведение двух симметричных множителей $S_1(s)$ и $S_1(-s)$, один из которых зависит от s, другой от $-s$. Поскольку числитель и знаменатель дроби (29) — функции четные, то они имеют соответственно $2p$ и $2q$ симметричных корней: λ_1 и $-\lambda_1$; λ_2 и $-\lambda_2$ и т. д. В множитель $S_1(s)$ войдут все корни с отрицательными вещественными частями, в множитель $S_1(-s)$ войдут все корни с положительными вещественными частями. Таким образом,

$$S_1(s) = \frac{\sqrt{a_p}\,(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_p)}{\sqrt{b_q}\,(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_q)}; \tag{31}$$

и числитель, и знаменатель функции $S_1(s)$ являются гурвицевыми полиномами.

Заметим еще, что величину среднего квадрата возмущающего воздействия удобно нормировать, т. е. принять раз и навсегда, что $\langle\varphi^2\rangle = 1$. Поскольку оптимальный регулятор линеен, то на его расчет нормировка не повлияет.

2. На втором шаге алгоритма точно так же факторизуется полином

$$A(s)A(-s) + m^2 = G(s)G(-s) \tag{32}$$

с целью вычисления полиномов $G(s)$ и $G(-s)$. При этом $G(s)$ — гурвицев полином (т. е. у всех его корней вещественные части отрицательны), а $G(-s)$ — не гурвицев.

3. Выполняется разложение на дроби (сепарация):

$$\frac{A(-s)}{G(-s)}S_1(s) = M_0 + M_+ + M_-, \tag{33}$$

где M_0 — целый полином; M_+ — правильная дробь с полюсами в левой полуплоскости комплексного переменного s; M_- — правильная дробь с полюсами в правой полуплоскости.

4. Строится функция

$$\frac{\Phi_1(s)}{\Phi_2(s)} = \frac{M_0 + M_+}{G(s)S_1(s)}, \tag{34}$$

с помощью которой уже непосредственно находятся полиномы $W_1(D)$ и $W_2(D)$ в оптимальном регуляторе (26):

$$\frac{W_1(D)}{W_2(D)} = A(D) - \frac{\Phi_2(D)}{\Phi_1(D)}. \tag{35}$$

Подставив (26) в (28), получим уравнение замкнутой системы:

$$\Phi_2(s)x = \Phi_1(s)\varphi. \tag{36}$$

Поскольку, как это следует из формулы (34), полином $\Phi_2(s)$ будет иметь все корни в левой полуплоскости, то замкнутая система будет устойчивой. Мы убеждаемся, что параметры оптимального регулятора вычисляются по довольно сложному алгоритму. Для объектов управления вида $\mathrm{A(D)}x = B(D)u + \varphi$ (где $B(D) \neq 1$) при учете погрешностей измерения и для многомерных систем алгоритм синтеза оптимальных регуляторов еще намного сложнее.

Интересно отметить, что для синтеза оптимального регулятора, обеспечивающего минимум среднеквадратичного критерия качества (27), оказалось достаточно располагать информацией о корреляционной функции возмущающего воздействия $\varphi(t)$. Хотя корреляционная функция не несет в себе полной информации о процессе $\varphi(t)$ и далеко не полным образом его характеризует, но более полная информация о процессе $\varphi(t)$ сверх его корреляционной функции уже не может улучшить регулятор и бесполезна с точки зрения дальнейшего уменьшения критерия качества (27) при необходимости обеспечения устойчивости замкнутой системы.

Заметим, что если не учитывать требования устойчивости, а непосредственно методами вариационного исчисления искать регулятор, доставляющий абсолютный минимум функционалу (18) при учете уравнения связи (19), то мы придем к регулятору:

$$m^2 x = -A(-D)u. \tag{37}$$

Подставив (37) в (28), получим уравнение замкнутой системы:

$$[A(D)A(-D) + m^2]x = A(-D)\varphi(t). \tag{38}$$

Характеристический полином уравнения (38) при любом $A(D)$ будет иметь корни с положительными вещественными частями, и поэтому замкнутая система будет неустойчива.

Отметим, что это не является непреодолимым препятствием к реализации оптимального движения объекта управления, описываемого уравнением (38): если возмущающее воздействие $\varphi(t)$ полностью известно на интересующем нас интервале времени, то мы можем, решая уравнение (38), найти оптимальное движение $x(t)$, а затем и реализовать его средствами программного управления. При этом мы получим абсолютный минимум критерия качества (27). Если же мы замкнем объект управления (28) регулятором (26), где $W_1(D)$ и $W_2(D)$ соответствуют формуле (35), то мы получим другое значение функционала (критерия качества) (27). Оно окажется больше абсолютного минимума и будет минимальным значением, совместимым с требованием устойчивости замкнутой системы.

Все эти обстоятельства полностью выяснились позже и в наиболее полном виде были опубликованы в [46] и [47]. В первых работах по оптимизации линейных систем [38, 52, 53], регулятор (37) считался (и назывался) "не удовлетворяющим условию физической реализуемости", хотя это не так. Например, для $A(D) = D$ регулятор (37) принимает вид:

$$u = -\frac{m^2}{D}x = -\int_0^t m^2 dx, \tag{39}$$

т. е. является хорошо реализуемым интегрирующим звеном. Таким образом, дело не в физической реализуемости, как думали до 70-х годов XX века, а в устойчивости. Методы вариационного исчисления позволяют найти регуляторы, реализующие движение по экстремалям, но это движение почти всегда неустойчиво, требует для реализации полной информации о возмущающих силах, и любая неточность в этой информации может привести к резкому ухудшению качества управления. В то же время управление, полученное на основе распространения методов оптимальной фильтрации А. Н. Колмогорова и Н. Винера на системы управления, требовало для реализации только очень скромной информации о корреляционных функциях возмущающих воздействий и не было чувствительно к погрешностям в этой информации.

Однако и методы вариационного исчисления при соответствующей их модификации также позволяли (как было показано в 1973 г. в [44]) получить устойчивые оптимальные регуляторы. Так, минимум критерия качества (27) при наличии уравнения связи (28) достигается на решениях уравнения Эйлера—Пуассона (38), общее решение которого зависит от $2n$ постоянных интегрирования c_i и имеет вид:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} + \sum_{i=1}^{n} c_{n+i} e^{-\lambda_i t} + x_{\text{частн}}, \tag{40}$$

где λ_i — корни гурвицева полинома $G(s)$, определяемого из формулы (32). Все эти корни имеют отрицательные вещественные части. Во вторую сумму

$\sum_{i=1}^{n} c_{n+i} e^{-\lambda_i t}$ входят экспоненты, показатели которых обратны по знаку корням полинома $G(s)$ или (что то же самое) являются корнями полинома $G(-s)$, входящего в формулу (32). Неустойчивость движения определяется именно этими экспонентами. Но из $2n$ параметрического семейства экстремалей (40) можно выделить устойчивое подсемейство

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} + x_{\text{частн}}, \tag{41}$$

где $x_{\text{частн}}$ должно быть тем же, что и в семействе (40). Уравнение, которому должно удовлетворять устойчивое подсемейство (41), можно записать в виде

$$G(D)x = \psi(t), \tag{42}$$

где $\psi(t)$ — это частное решение уравнения

$$G(-D)\psi = A(-D)\varphi(t). \tag{43}$$

Теперь достаточно исключить две функции: $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ из трех уравнений (28), (42) и (43). Получим уравнение регулятора, который обеспечит устойчивость замкнутой системы и минимум критерия качества, совместимый с устойчивостью. В общем случае, для произвольной корреляционной функции процесса $\varphi(t)$ исключение громоздко, однако для важных частных случаев — для корреляционных функций

$$k_{\varphi_1} = \langle \varphi^2 \rangle e^{-\alpha\tau} \tag{44}$$

и

$$k_{\varphi_2} = \langle \varphi^2 \rangle e^{-\alpha\tau}(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta\tau) \tag{45}$$

(которая хорошо характеризует процессы, связанные с морским волнением) оптимальные регуляторы получаются сразу; для корреляционной функции (44) будет:

$$u_{\text{опт}} = -[kG(D) - A(D)]x, \tag{46}$$

где $k = \dfrac{G(\alpha)}{A(\alpha)}$, а для корреляционной функции (45) имеем:

$$u_{\text{опт}} = -[\frac{G(D)}{a + bD} - A(D)]x, \tag{47}$$

где коэффициенты a и b вычисляются через вещественную и мнимую части комплексного числа:

$$k_1 + jk_2 = \frac{A(\alpha - j\beta)}{G(\alpha - j\beta)} \tag{48}$$

по формулам: $a = k_1 + \frac{\alpha}{\beta} k_2; \quad b = \frac{k_2}{\beta}$.

Наличие конечных формул (46) и (47) для оптимальных регуляторов позволило в 1973 году справиться с проблемой сохранения устойчивости при вариациях параметров, которая надолго затормозила практические приложения теории оптимального управления.

13.4. Встреча с проблемой сохранения устойчивости при вариациях параметров

К 1973 году сформировалась уже целая библиотека книг, посвященных различным аспектам теории оптимизации линейных систем по среднеквадратичным критериям качества, различным алгоритмам вычисления оптимальных регуляторов ([24, 25, 36, 38, 39, 52, 53, 56, 57, 62] и др.). Разумеется, алгоритмы, описанные в них, были много сложнее простейшего алгоритма, приведенного нами ранее для объектов вида (28).

И все же, несмотря на большое число книг, посвященных теории оптимизации линейных систем по среднеквадратичным критериям качества, за период 1956—1973 гг. практических применений теории было немного. Мешал довольно быстро обнаружившийся очень серьезный недостаток — замкнутые системы управления, построенные по всем теоретическим рекомендациям, приведенным в книгах, упомянутых в предыдущем абзаце, часто обладали неприятным и опасным свойством: они теряли устойчивость при малых отклонениях некоторых параметров объекта управления или регулятора от расчетных значений.

При значениях параметров, точно совпадающих с расчетными, устойчивость, разумеется, обеспечивалась (как это следовало из уравнения (36)), но уже при очень малых, неизбежных на практике, вариациях параметров устойчивость нарушалась и замкнутая система "шла в разнос". Разумеется, обнаружение этого опасного свойства полностью перекрывало дорогу практическому приложению теории, тем более что причины его долгое время оставались нераскрытыми. Первоначально считали, что причина заложена в каких-то недостатках алгоритма синтеза (что, кстати, и способствовало в 1961—1973 годах появлению столь большого числа упомянутых книг, посвященных теории оптимизации по среднеквадратичным критериям качества и различным алгоритмам синтеза оптимальных регуляторов). Каждый автор надеялся, что ему удалось предложить такой алгоритм синтеза, который не приведет к потере устойчивости при малых вариациях, и каждый раз в ходе критического обсуждения выяснялось, что эта цель не достигнута.

Перелом произошел в 1973 году. В начале года, в статье [37] Петр Владимирович Надеждин показал, что очередной алгоритм синтеза, незадолго до того предложенный в [24], не обеспечивает сохранения устойчивости при вариациях параметров, и считал это преодолимым недостатком, который можно устранить, разработав другой алгоритм, но в том же 1973 году в [44] было показано, что алгоритмов синтеза, свободных от этого недостатка, существовать не может, поскольку для ряда объектов управления и спектральных плотностей возмущающих воздействий минимум критерия качества (27) лежит как раз на границе устойчивости по некоторым параметрам объекта. Отсюда следует, что если какой-либо регулятор для такого объекта управления обеспечит минимум критерия качества, совместимый с устойчивостью, то эта устойчивость в данном случае обязательно потеряется при сколь угодно малых отклонениях параметров объекта управления или регулятора от расчетных значений (причем обязательно только при отклонениях определенного знака — на формировании безопасных знаков и был основан первый, еще недостаточно совершенный, метод борьбы с данным недостатком, также предложенный в [44]).

Пример: для объекта управления (28) и корреляционной функции возмущающего воздействии (45) оптимальный регулятор имеет вид (47). Если этим регулятором мы замкнем объект (28), то характеристическим полиномом замкнутой системы будет гурвицев полином $G(D)$. Замкнутая система устойчива. Однако, если регулятором (47) замкнуть объект управления

$$A_1(D)x = u + \varphi(t), \tag{49}$$

где старший член полинома $A_1(D)$ равен $a_n(1+\varepsilon)D^n$ и отличается от старшего члена полинома $A(D)$, равного a_nD^n, на сколь угодно малое число ε, то характеристический полином замкнутой системы примет вид

$$G(D) + \varepsilon b D^{n+1}, \tag{50}$$

и уже при сколь угодно малых ε устойчивость может потеряться, поскольку может нарушиться необходимое условие устойчивости Стодолы. Все это стало очевидным, когда в [44] появились простые формулы (46) и (47) для оптимальных регуляторов. Ранее, когда регулятор вычислялся только по длинному алгоритму, потеря устойчивости при вариациях параметров "испортила немало крови" и разработчикам систем управления, и практикам, поскольку причины потери устойчивости были не ясны, и разобраться в них было трудно.

Появление публикации [44] направило развитие теории оптимизации по среднеквадратичным критериям качества на другой путь — прекратились поиски несуществующего алгоритма синтеза, обеспечивающего для любых объектов управления одновременно и минимум среднеквадратичного критерия качества, и сохранение устойчивости при вариациях параметров. Там, где сохранение устойчивости при вариациях параметров автоматически не обеспечивалось, его стали вводить как дополнительное требование к системе, за реализацию которого приходилось платить некоторым ухудшением критерия качества (27).

В монографии [46] был приведен простой критерий различения: для каких объектов управления и спектральных плотностей возмущающего воздействия регулятор (26) обеспечивает сохранение устойчивости при малых отклонениях параметров объекта управления или регулятора от расчетных значений и для каких — не обеспечивает. Если в математической модели объекта управления общего вида

$$A(D)x = B(D)u + \varphi(t) \tag{51}$$

степень операторного полинома $A(D)$ равна n, а степень операторного полинома $B(D)$ равна m, то с учетом степеней p и q в аналитической аппроксимации спектральной плотности (29) возмущающего воздействия $\varphi(t)$ этот критерий примет вид неравенства:

$$p \geq m + q - 1. \tag{52}$$

Если неравенство (52) выполнено, то замкнутая оптимальным регулятором система управления сохраняет устойчивость при вариациях своих параметров. Если неравенство (52) не выполнено, то устойчивость может не сохраняться. За критерием (52) в дальнейшем закрепилось название "критерия Ю. П. Петрова".

Неравенство (52) служит основой для синтеза регуляторов, обеспечивающих сохранение устойчивости при вариациях параметров. Действительно, аналитическая аппроксимация спектральной плотности возмущающего воздействия $\varphi(t)$ до некоторой степени произвольна — в основу аппроксимации берется полученная из эксперимента кривая $S_\varphi(\omega)$, которую затем аппроксимируют аналитическим выражением (29), подбирая (обычно методом наименьших квадратов) коэффициенты a_i и b_i и степени p и q так, чтобы аналитическая аппроксимация наиболее точно отражала экспериментальную кривую. Если при такой наиболее естественной аппроксимации оказывается, что неравенство (52) не выполняется, то аппроксимацию можно изменить, можно те же экспериментальные точки аппроксимировать в классе таких дробно-рациональных функций (29), для которых неравенство (52) выполнено. Поскольку точность аппроксимации с учетом дополнительного условия (52) будет ниже, чем без него, значение критерия качества увеличится, но это увеличение (плата за реализацию дополнительного требования к системе) будет небольшим. Примеры расчета, приведенные в [46], показывают, что увеличение критерия качества не превышало нескольких процентов, поскольку изменение аналитической аппроксимации можно проводить за пределами полосы частот, существенных для данной системы управления ([46], стр. 218—226).

Несколько позже был предложен другой метод обеспечения сохранения устойчивости при вариациях параметров: вместо критерия качества (27) вводился функционал:

$$J = m^2 < x^2 > + < u^2 > + k_1 < \dot{u}^2 > + \ldots + k_n < \left[u^{(n)} \right]^2 >, \tag{53}$$

в котором первый и второй члены отражают реальные физические требования к системе управления, а остальные члены вводятся только для обеспечения сохранения устойчивости при вариациях параметров и действительно обеспечивают ее, хотя и за счет некоторого увеличения основного критерия качества (27).

Метод, основанный на введении функционала (53), ввиду своей простоты получил наиболее широкое распространение, хотя методика, предложенная в [46], за счет использования полосы частот, существенных для каждой конкретной системы, позволяет получать несколько лучшее значение критерия качества. Еще одна методика, основанная на построении минимизирующей последовательности, была предложена в [60].

Американские исследователи часто используют другой прием — при расчете замкнутых систем в каналах обратной связи ими вводятся дополнительные "белые шумы" малой интенсивности. Эти "шумы" — фиктивные, они вводятся только в расчет регулятора. Введение в расчет подобных шумов также обеспечивает сохранение устойчивости системы за счет жертвы частью критерия качества.

Гарантированное обеспечение сохранения устойчивости при вариациях параметров позволило после 1973 г. перейти к использованию теории оптимизации линейных систем при среднеквадратичных критериях качества для решения непосредственных практических задач (работы [1, 6, 7, 8, 46, 47] и многие другие).

Некоторые примеры:

- ☐ для танкеров типа "Казбек" оптимальное, приводящее к минимуму потери скорости, управление рулем имело вид:

$$u = -\left[43{,}6D + 2{,}5 + \frac{0{,}005}{D}\right]x,$$

и оно легко реализуется с помощью обычных дифференцирующих, пропорциональных и интегрирующих звеньев (монографии [44], стр. 136—145 и [1], стр. 215—221);

- ❐ для системы рулей-успокоителей качки судна "Академик Курчатов" оптимальное управление имело вид:

$$u = -\left(118x_1 - \frac{90x_1 - 6{,}15x_2 - 3{,}35x_3}{0{,}035D + 0{,}85}\right),$$

где x_1, x_2, x_3 — соответственно сигналы от гироакселерометра, гиротахометра и кренометра. Оптимальное управление легко реализуется и обеспечивает дисперсию остаточной качки в 2,7 раза меньшую, чем ранее используемые законы управления ([1], стр. 227—232);

- ❐ для синхронного генератора, подающего питание на Азербайджанский трубопрокатный завод, оптимальный регулятор, рассчитанный Н. Д. Абдуллаевым в 1983—84 годах, имел вид:

$$u = -\left(11{,}8 + \frac{0{,}274}{2{,}78D + 1} - \frac{19{,}3D + 10{,}3}{8{,}82D^2 + 3{,}97D + 1}\right)x,$$

(где x — отклонение напряжения от номинального), легко реализовывался на основе простого усилительного, апериодического и колебательного звеньев и обеспечивал существенное увеличение качества напряжения в заводской сети ([1], стр. 209—215).

Самое важное свойство оптимальных регуляторов, синтезированных по методике, предложенной в [46, 47], заключается в том, что замкнутые ими системы не меняют существенно своих свойств (устойчивости, величины критерия качества и т. п.) при отклонениях параметров объекта управления, регулятора и возмущающих сил от расчетных значений. Это важное свойство оптимального управления не случайно. Оно связано с тем, что на экстремали обращается в нуль главная, линейная часть приращения функционала — его первая вариация. Поэтому при отклонении реального движения системы управления от точной экстремали увеличение критерия качества будет величиной, не менее чем второго порядка малости. Отсюда возникают два следствия:

1. При неизбежном малом "дрейфе" параметров оптимального регулятора изменения критерия качества будут очень малы.

2. При сознательном отступлении от точного минимума для обеспечения комплекса требований к системе управления (о котором будет рассказано в *разд. 13.5*) ухудшение основного критерия качества будет небольшим.

13.5. Обеспечение комплекса требований к системе управления

Появление практических приложений теории оптимизации линейных систем поставило в повестку дня следующий вопрос: функционал (27) не может быть единственным критерием качества проектируемой системы. Реальная система всегда должна удовлетворять комплексу критериев, в том числе и таких, которые трудно поддаются математической формализации, но без выполнения которых реальная система не может быть признана хорошей.

Полное решение задачи о синтезе систем управления, оптимальных по комплексному критерию качества, пока еще не получено. Однако в работах [1, 46, 47] сделаны первые шаги в этом направлении. Были получены формулы, связывающие степени операторных полиномов $W_1(D)$ и $W_2(D)$ в регуляторе (26), обеспечивающем минимум критерия (27), со степенью n полинома $A(D)$ в математической модели объекта управления (51), со степенью m полинома $B(D)$ в уравнении (51) и со степенями p и q в аналитической аппроксимации спектральной плотности возмущающего воздействия (29). Оказалось, что если:

$$p \le m + q - 1,$$

то для степени f полинома $W_1(D)$ и степени g полинома $W_2(D)$ в регуляторе (26) выполняются неравенства:

$$\begin{cases} f \le n + q - 1; \\ g \le m + q - 1, \end{cases} \tag{54}$$

если же

$$m + q - 1 < p \le 2n - m + q - 1, \tag{55}$$

то, соответственно,

$$\begin{cases} f \le n + q - 1; \\ g \le p, \end{cases} \tag{56}$$

и, наконец, если

$$p > 2n - m + q - 1, \tag{57}$$

то в этом случае

$$\begin{cases} f \le m + p - n; \\ g \le p. \end{cases} \tag{58}$$

Заметим, что в формулах (54, 56, 58) чаще всего имеет место знак равенства. Знак строгого неравенства возникает только тогда, когда в полиномах $W_1(D)$ и $W_2(D)$ имеются одинаковые множители, допускающие сокращение. С учетом этого замечания, формулы (54, 56, 58) позволяют, во-первых, оценить структуру будущего оптимального регулятора еще до начала синтеза, а во-вторых, позволяют варьировать структуру регулятора за счет того, что экспериментальные данные по спектральной плотности возмущающего воздействия $\varphi(t)$ могут быть аппроксимированы различными формулами вида (29) с различными значениями степеней p и q (особенно с учетом того, что точность аппроксимации важна лишь в полосе частот, существенных для данной системы). Варьируя p и q, а с ними и всю структуру регулятора, мы получаем возможность удовлетворить дополнительным требованиям. Так, например, как было показано в [1], для обеспечения важного для практики условия непосредственной реализуемости регулятора достаточно выбрать p и q так, чтобы выполнялось неравенство:

$$p \ge n + q - 1, \tag{59}$$

Непосредственная реализуемость означает, что степень полинома $W_2(D)$ в уравнении (26) не меньше, чем степень $W_1(D)$; при этом не возникает паразитных параметров, ухудшающих работу системы. Другие примеры реализации некоторых важных дополнительных требований были приведены в [7, 8, 46, 47].

13.6. Учет реальных ограничений на управляющие воздействия

Только в редких случаях коэффициент m^2 в критерии качества (27) четко определен физическим смыслом задачи оптимизации. Так, например, при синтезе авторулевого для морских судов, оптимального по минимуму потери скорости, коэффициент m^2 задан формой корпуса судна, что и определяет оптимальный регулятор, как это более подробно показано в [44].

Однако в большинстве случаев нам нужно обеспечить наилучшую точность стабилизации или слежения, которая оценивается функционалом

$$J_1 = \langle x^2 \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x^2 dt, \tag{60}$$

а не функционалом (27). Но при этом нужно учитывать ограничения на управляющие воздействия, которые обычно являются двусторонними, и при соответствующем выборе единиц измерения их можно записать в виде ограничения на модуль $u(t)$:

$$|u| \le 1. \tag{61}$$

Разумеется, задачу оптимального управления можно ставить непосредственно, как задачу об управлении, доставляющем для объекта управления (28) минимум функционала (60) при ограничении (61). Эта задача рассматривалась, например, в [44]. Общую структуру решения установить нетрудно; если максимальные (по модулю) значения возмущающего воздействия $\varphi(t)$ много больше единицы, то оптимальное управление состоит из участков $u = -\varphi$ и участков "выхода управления на упоры", когда $u = +1$ или $u = -1$. При этом переход от $u = -\varphi$ к $u = \pm 1$ должен происходить заранее, "с упреждением", причем с правильно выбранным "упреждением" (более подробно это обосновано в [44]), а иначе управление оптимальным не будет. Пример управления "с упреждением" показан на рис. 13.3.

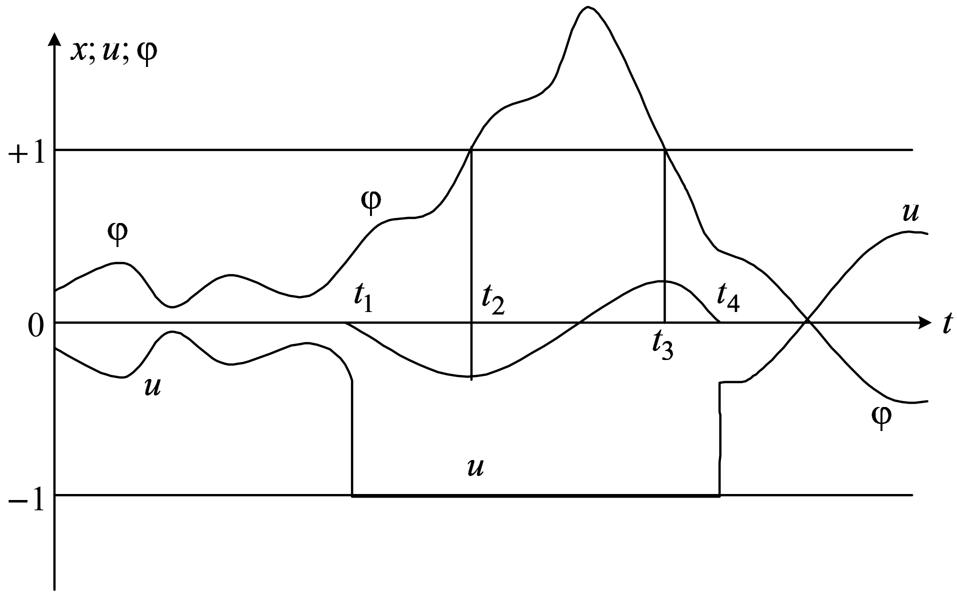


Рис. 13.3. Управление "с упреждением"

Таким образом, для обеспечения минимума функционала (60) при ограничении (61) необходима точная информация о возмущающем воздействии. Без полной информации точной величины упреждения не установить. Если мы — как это почти всегда бывает на практике — полной информацией о возмущающем воздействии не располагаем, то значение критерия качества (60) сразу ухудшается, и знание спектральной плотности возмущающего воздействия не помогает. Совсем другое дело, когда ограничения накладываются не на модуль управляющего воздействия, а на его средний квадрат, т. е. когда вместо ограничения (61) имеет место ограничение:

$$<u^2> \le \frac{1}{k^2}. \tag{62}$$

Задача об управлении, доставляющем для объекта управления (28) минимум функционала (60) при ограничении (62), имеет простое решение: согласно известным теоремам вариационного исчисления, она эквивалентна задаче о минимуме функционала (27), в котором m^2 является множителем Лагранжа и определяется из условия (62), в котором знак неравенства заменяется на знак равенства. Поэтому оптимальным является линейный регулятор (26), а для синтеза этого регулятора, определения коэффициентов полиномов $W_1(D)$ и $W_2(D)$ достаточно располагать только информацией о спектральной плотности мощности возмущающего воздействия $\varphi(t)$. Эта информация легкодоступна.

Именно это удобство и однозначность получаемого решения обеспечили теории оптимизации по среднеквадратичным критериям — типа критерия (27) — и аналогичным более сложным критериям для многомерных систем такую популярность и такое изобилие работ и книг, этой теории посвященных.

При этом долгое время считалось, что члены с квадратами управляющих воздействий в критерии качества "косвенно учитывают" реальные ограничения на управление и позволяют получить решение практической задачи синтеза наилучшего (оптимального) регулятора. На самом деле это совсем не так. Конечно, если в неравенстве (62) выбрать $k = 3$ (как это было рекомендовано, например, в авторитетном учебнике [40]), то при нормальном законе распределения возмущающего воздействия $\varphi(t)$ функция $u(t)$ также будет распределена по нормальному закону, и поэтому при $k = 3$ с практической достоверностью будет выполнено неравенство (61). Теоретически все будет правильно, система управления будет линейной, ограничение (61) будет учтено, но практика давно показала, что при уменьшении величины k в неравенстве (62), при выборе вместо $k = 3$ значений $k = 2$ или $k = 1,5$ точность управления резко возрастала, величина функционала (60) существенно, в несколько раз, уменьшалась. В то же время при $k < 3$ и, особенно, при $k < 2$ управляющее воздействие заметную часть времени принимало предельные значения: $u = \pm 1$. Линейность системы при этом нарушалась, и применимость линейной теории, на которой основан синтез регуляторов вида (26), тем самым ставилась под серьезное сомнение.

В работе [1] для разрешения этого противоречия был предложен новый подход — знак неравенства в (62) заменялся на знак равенства, выбиралось начальное значение числа k (обычно $k = 2$), затем на основе традиционной линейной теории строился оптимальный регулятор вида (26), но он дополнялся "упорами", не позволявшими управлению выходить за пределы $u = \pm 1$ (т. е. в целом регулятор был уже нелинейным). Далее методами статистической линеаризации (уже с учетом "упоров") уточнялось значение числа k, соответствующее минимуму функционала (60). Расчеты показали, что наилучшее значение числа k чаще всего оказывалось близко к $k = 1{,}645$, которое много ранее, в [38], рекомендовалось на основе эмпирических соображений, но потом было забыто. При $k = 1{,}645$ регулятор 10% всего времени находится "на упорах", а 90% времени работает как линейный. При таком соотношении "времени пребывания на упорах" к общему времени работы системы для расчета регулятора можно пользоваться формулами линейной теории, которые дают в этом случае хорошее приближение. В то же время выбор значения $k = 1{,}645$ обеспечивает качество управления в 2—3 раза лучшее, чем при $k = 3$. Таким образом, методика, предложенная в [1], позволила правильно учесть реальные ограничения на управление и синтезировать оптимальные регуляторы, учитывающие эти ограничения.

13.7. Проблема гарантирующего управления

Методика синтеза оптимального управления, разработанная в 50—60 годах XX века [17, 24, 36, 38, 52, 53], предполагала, что известна спектральная плотность возмущающего воздействия на объект управления. Однако на практике спектральная плотность часто не известна, или же может существенно изменяться с течением времени. Поэтому значительный интерес представляет проблема синтеза оптимального управления при неизвестной или переменной спектральной плотности возмущающего воздействия. Эта проблема была впервые поставлена и частично решена в 1973 г., в [44], где она формулировалась как проблема гарантирующего управления — если относительно возмущающего воздействия известен только его средний квадрат (напомним, что он всегда и обоснованно нормируется условием $<\varphi^2> = \sigma_\varphi^2 = 1$), а управляющее воздействие ограничено неравенством (62), то какую точность управления (измеряемую величиной σ_x), можно гарантировать для любой спектральной плотности возмущающего воздействия, и какой регулятор может эту гарантию реализовать?

В монографии [44] было установлено, что среди всех спектральных плотностей наихудшей является вырожденная, вырождающаяся в обобщенную δ-функцию Дирака[18], а конкретно — спектральная плотность $S_\varphi(\omega) = \delta(\omega - \beta)$, где β — частота, при которой достигает минимума функция

$$M = |A(j\omega)|^2 + m^2 |B(j\omega)|^2. \tag{63}$$

Таким образом, наихудшая спектральная плотность $S_\varphi(\omega)$, в соответствии с определением δ-функции Дирака, равна нулю при $\omega \neq \beta$, стремится к бесконечности при $\omega \to \beta$, и при этом соблюдается равенство

$$\sigma_\varphi^2 = \int_0^\infty S_\varphi(\omega) d\omega = 1.$$

Хорошо известно, что такому спектру соответствует функция $\varphi(t)$ в виде гармонического колебания с частотой $\omega = \beta$, и поэтому наихудшим возмущающим воздействием является гармоническое

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sin(\beta t + \theta) \tag{64}$$

(где θ — произвольная фаза), а в частном случае, при $\beta = 0$ — постоянная сила, т. е. $\varphi(t) = 1$.

Для объектов управления вида (28) при гурвицевом полиноме $A(D)$ в монографии [44] был найден и регулятор, реализующий гарантию. Он имел вид:

$$u = -\frac{1}{k-1} A(D) x \tag{65}$$

и гарантировал, что

$$\sigma_x \leq 1 - \frac{1}{k}.$$

Все эти результаты были установлены на основе вариационного исчисления.

Несколько позже, в 1974 г., в [45] было установлено, что при вырожденной спектральной плотности возмущающего воздействия (в отличие от обычной непрерывной) оптимальный регулятор не единственен, и поэтому гарантирующих регуляторов может быть много. Простейшим из них является известный пропорциональный регулятор

$$u = -k_0 x. \tag{66}$$

Интересно отметить, что широкое распространение пропорционального регулятора (66) связано именно с его гарантирующими свойствами. Хотя было давно известно, что для заданного спектра $S_\varphi(\omega)$ можно построить регулятор, обеспечивающий гораздо лучшее значение критерия качества, чем обеспечиваемое регулятором (66), инженеры не спешили от него отказываться. На практике спектры возмущающих воздействий часто оказываются самыми разнообразными, и в этих условиях регулятор (66) может оказаться наиболее предпочтительным. Более подробно об этом рассказано в [50].

Результат, полученный в [45], оказался неожиданным потому, что ранее всем казалось очевидным — при изменении регулятора, а значит, и его частотной характеристики, величина критерия качества (27), зависящая от нее, не может не измениться. Однако при вырожденной спектральной плотности возмущающего воздействия величина критерия качества (27) целиком определяется единственным значением частотной характеристики регулятора, ее значением при $\omega = \beta$. Поэтому различные регуляторы, частотные характеристики которых совпадают только в одной точке, при $\omega = \beta$, могут доставлять критерию (27) одно и то же значение.

Несколько позже проблемой гарантирующего управления серьезно заинтересовались американские исследователи — первой считается статья Зеймса (Zames), опубликованная в 1981 году; ее обзор вместе с обзором ряда других работ был дан в большой обзорной статье [41]. Американские исследователи пошли по совершенно другому пути (работа [44] за пределами России, по-видимому, осталась неизвестной). Вместо вариационного исчисления они стали широко использовать методы, основанные на теории "H^∞-оптимизации". Новый подход позволил разработать вычислительные алгоритмы, но не привел к сколько-нибудь обозримым результатам общего характера.

Между тем вариационные методы, на основе подхода, ранее использованного в [44], позволили получить исключительно простые результаты, приведенные в [49], а более подробно в [50]. Предельно простое решение получила там проблема гарантии, формулируемая следующим образом — для объектов управления вида (51), для $\sigma_\varphi=1$ и ограничении на управление (62) ставится вопрос: какое качество управления, оцениваемое по критерию σ_x при заданном ресурсе управления σ_u, можно гарантировать для любой спектральной плотности возмущающего воздействия?

Ответ — гарантировать можно значения σ_x, лежащие не ниже разделительной линии, параметрические уравнения которой на плоскости, где по оси абсцисс отложены значения σ_u, а по оси ординат — значения σ_x, имеют вид:

$$\sigma_x = \frac{|A(j\beta)|}{|A(j\beta)|^2 + m^2 |B(j\beta)|^2}; \qquad (67)$$

$$\sigma_u = \frac{m^2 |B(j\beta)|}{|A(j\beta)|^2 + m^2 |B(j\beta)|^2}. \tag{68}$$

В уравнениях (67) и (68) величина m^2 играет роль параметра и пробегает значения от $m^2 = 0$ до $m^2 \to \infty$, а β — та частота, при которой достигает максимума функция (63). Значений σ_x, лежащих ниже разделяющей кривой, гарантировать уже нельзя.

Мы убеждаемся, что общее суждение о возможностях оптимального управления при произвольной спектральной плотности возмущающего воздействия формулируется даже проще, чем в том случае, когда спектральная плотность воздействия известна и задана, но оптимальный регулятор и значения σ_x и σ_u при оптимальном управлении приходится вычислять по достаточно сложным алгоритмам.

Формулы (67) и (68) очень удобны, позволяя еще на стадии эскизного проектирования сразу установить — какая точность управления достижима при том или ином ресурсе управляющего воздействия σ_u, и наоборот — какой ресурс управления σ_u необходим для того, чтобы гарантировать заданную точность σ_x.

До появления уравнений разделяющих кривых (впервые опубликованных в 1995 году в [49]) проектировщикам приходилось для каждого объекта управления проводить целую серию громоздких расчетов оптимального управления для различных спектров возмущающих воздействий, стараясь выделить среди них спектр, наиболее опасный. При этом не было гарантии, что, действительно, удалось выделить наихудший, наиболее опасный спектр, поэтому приходилось брать запас в расчете, снижающий реальную точность управления.

Появление разделяющих кривых сразу все облегчило. Многочисленные примеры построения этих кривых для различных объектов управления приведены в монографии [50].

Если оба полинома $A(D)$ и $B(D)$ в математической модели объекта управления гурвицевы, то физический смысл имеет вся разделительная кривая (67)—(68) от $m^2 = 0$ до $m^2 \to \infty$. Если полином $A(D)$ не гурвицев и имеет положительный корень, равный α_1, (т. е. объект управления без обратной связи неустойчив), то разделительная кривая начинается только справа от точки с абсциссой

$$\sigma_{u\min} = \frac{1}{|B(\alpha_1)|}. \tag{69}$$

Если располагаемый ресурс управления σ_u меньше, чем $\sigma_{u\,\min}$, то ничего гарантировать нельзя — даже устойчивости замкнутой системы.

Если полином $B(D)$ не гурвицев и имеет положительный корень β_1, то в этом случае разделяющая кривая заканчивается в своей крайней правой точке с ординатой

$$\sigma_{x\min} = \frac{1}{|A(\beta_1)|}. \tag{70}$$

Значений критерия качества σ_x, меньших чем $\sigma_{x\,\min}$, нельзя гарантировать при любом ресурсе управления.

Примеры разделяющих кривых для объектов управления с негурвицевыми полиномами $A(D)$ или $B(D)$ приведены в монографии [50]. Одна из таких кривых воспроизведена на рис. 13.4. Она была рассчитана и построена в [50] для объекта управления

$$(D^2 - 3D - 2)x = (D - 1)u + \varphi(t)$$

при условии, что средний квадрат возмущающего воздействия $\varphi(t)$ принят за единицу, а его спектр может быть любым. Для данного объекта $\sigma_{u\,\min} = 0{,}3904$. При $\sigma_u < 0{,}3904$ нельзя гарантировать даже устойчивости замкнутой системы. Если $\sigma_u > 0{,}3904$, то можно немного уменьшить значение σ_x, но получить $\sigma_x < 0{,}25$ гарантированно для любого спектра возмущающего воздействия нельзя ни при каком управлении.

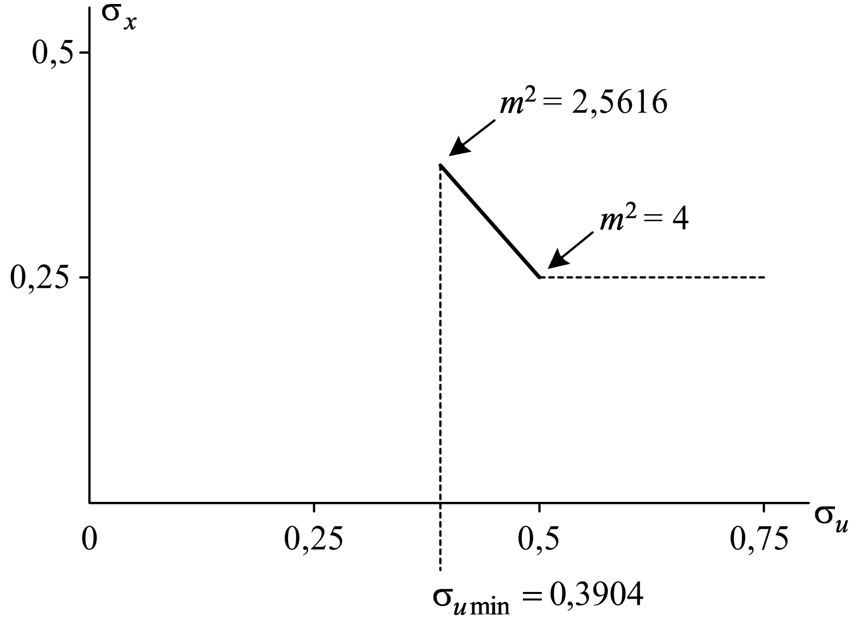


Рис. 13.4. Пример разделяющей кривой

В [50] (стр. 61—64) показано также, что для данного объекта управления методы, основанные на "H^∞-оптимизации", не приводят к верному результату. Простые формулы (67—70) полностью исчерпывают вопрос о гарантируемых значениях качества управления.

В работах [49, 50] приведен также алгоритм синтеза регуляторов, реализующих гарантию, а, кроме того, показано, что для обширного круга объектов управления гарантирующим является давно известный простейший пропорциональный регулятор (66).

Отметим, что проблему гарантирующего управления можно рассматривать и как игровую задачу, как "игру" конструктора регулятора против природы, которая распоряжается спектральной плотностью возмущающего воздействия и может "выбрать" ее наиболее неблагоприятный вариант. Формулы (67—68) дают нам "цену игры" для каждого ресурса управления σ_u.

В монографии [46] (а более подробно в [49] и [50]) для объектов управления вида (28) при гурвицевом полиноме $A(D)$ дано решение еще одной проблемы гарантирующего управления, когда выход $x(t)$ объекта управления (28) измеряется со случайной погрешностью $\psi(t)$, причем средний квадрат погрешности, величина σ_ψ^2, известна нам, но ее спектральная плотность может быть любой. Ставится вопрос — какую точность управления, какую величину критерия σ_x можно гарантировать при $\sigma_\varphi = 1$ и любых сочетаниях спектральных плотностей возмущающего воздействия $\varphi(t)$ и погрешностей измерения $\psi(t)$?

Ответ на вопрос дается замечательной по своей простоте формулой — гарантировать можно, что

$$\sigma_x^2 \le \frac{\sigma_p^2 \sigma_\psi^2}{\sigma_p^2 + \sigma_\psi^2}, \tag{71}$$

где величина

$$\sigma_p^2 = \int_0^\infty S_\varphi(\omega) \frac{d\omega}{|A(j\omega)|^2} \tag{72}$$

является значением σ_x^2 для объекта управления (68) при $u = 0$, т. е. в "разомкнутой системе". Гарантия (71) может быть реализована регулятором

$$u = -\frac{\sigma_p^2}{\sigma_\psi^2} A(D)(x+\psi). \tag{73}$$

Проблему гарантирующего управления в данном случае можно рассматривать как дифференциальную игру трех "игроков" — конструктора регулятора против двух "игроков", распоряжающихся спектрами возмущающего воздействия $\varphi(t)$ и погрешности измерений $\psi(t)$, причем оба "игрока" могут вступать в коалицию против конструктора. Формула (71) дает цену этой дифференциальной игры.

Хорошо известно, что для дифференциальных игр только в редких случаях удавалось получить решение в общем виде, в виде аналитических формул. Для задачи гарантирующего управления такое решение (формулы (71) и (73)) все же было получено.

13.8. Аналитическое конструирование регуляторов

Рассказывая об аналитическом конструировании, мы хронологически отступаем немного назад, поскольку под названием "аналитическое конструирование" получила известность разработанная Александром Михайловичем Лётовым (1911—1974) и опубликованная впервые в 1960 г. в [28] теория оптимизации линейных систем по квадратичным (а не среднеквадратичным) критериям качества. Применительно к односвязным объектам управления задача "аналитического конструирования" выглядит так — рассматривается объект управления, аналогичный объекту (28), но без возмущающего воздействия,

т. е. объект

$$A(D)x = u, \tag{74}$$

и ставится задача: "аналитически сконструировать регулятор" (т. е., собственно, найти математическую модель регулятора), который обеспечил бы устойчивость замкнутой системы и минимум критерия качества:

$$J = \int_0^\infty (m^2x^2 + u^2)dt. \tag{75}$$

В данном случае легко применяются (и были использованы А. М. Лётовым) традиционные методы вариационного исчисления — подставив (74) в (75), приведем его к виду:

$$J = \int_0^\infty \{m^2x^2 + [A(D)x]^2\}dt. \tag{76}$$

Минимум функционала (76) может достигаться только на решениях уравнения Эйлера—Пуассона, которое в данном случае имеет вид:

$$[A(D)A(-D) + m^2]x = 0, \tag{77}$$

т. е. является линейным дифференциальным уравнением порядка $2n$. Его решение состоит из $2n$ экспонент:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} + \sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j t}. \tag{78}$$

С учетом ранее приводившейся формулы (32) можно утверждать, что показатели первых n экспонент являются корнями уравнения

$$G(\lambda) = 0, \tag{79}$$

и поэтому имеют отрицательные вещественные части, а у следующих n экспонент показатели будут иметь положительные вещественные части, и поэтому эти экспоненты будут возрастающими. Интеграл (75) будет иметь конечное значение только тогда, когда все постоянные интегрирования c_j в решении (78) (постоянные перед возрастающими экспонентами) будут равны нулю, т. е. когда решение (78) перейдет в решение:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t}. \tag{80}$$

Но решение (80) является решением дифференциального уравнения n-го порядка

$$G(D)x = 0. \tag{81}$$

Таким образом, минимум критерию (75) обеспечит тот регулятор, в котором решения замкнутой системы удовлетворяют уравнению (81). Но сразу видно, что такой регулятор имеет вид:

$$u = [A(D) - G(D)]x. \tag{82}$$

Действительно, замкнув регулятором (82) объект управления (74), убедимся, что уравнение замкнутой системы совпадет с (81) и будет уравнением устойчивого подмножества решений уравнения Эйлера—Пуассона (77).

Решение проблемы аналитического конструирования легко обобщается и на многомерные объекты управления. Действительно, рассмотрим объект управления

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{83}$$

где x — n-мерная вектор-функция; A — квадратная размера $n \times n$ матрица коэффициентов; B — вектор-столбец; u — управление, скаляр. Если критерием качества является интеграл от квадратичной формы переменных x и u, подобный интегралу (75), то минимум критерия, как было показано в [29], доставляет очень простой регулятор

$$u = kx, \tag{84}$$

где k — матрица-строка постоянных коэффициентов усиления. Для вычисления этих коэффициентов были разработаны удобные численные методы.

Хотя исследования А. М. Лётова относились к идеализированным объектам управления вида (74) или (83), на которые не действуют возмущающие силы (т. е. принималось, что $\varphi(t) = 0$), но методы аналитического конструирования регуляторов стали сразу (и не без успеха) применяться и к реальным объектам управления, подверженным действию возмущающих сил случайного характера. Это заставило проанализировать — в чем заключается различие между тремя управлениями:

1. Оптимальным программным управлением, доставляющим абсолютный минимум критерия качества и которое теоретически мог бы реализовать регулятор (37).
2. Оптимальным управлением с учетом устойчивости замкнутой системы, синтезируемым по алгоритму, учитывающему спектральную плотность возмущающего воздействия.
3. Управлением, оптимальным в смысле аналитического конструирования.

Этот анализ был проведен в [44, 46]. Выяснилось, что оптимальное программное управление требует полной информации о возмущающем воздействии, в том числе информации "вперед" (т. е. уже при $t = 0$ нужно располагать информацией о функции $\varphi(t)$ для $0 \le t \le T$). Если возмущающее воздействие состоит из редко расположенных воздействий импульсного типа, то в оптимальной системе нарушается поверхностно понимаемый "принцип физической реализуемости" — импульс возмущающего воздействия еще не пришел, а управление, как бы "готовящее" систему к его приходу, уже действует (см. рис. 13.5, приводившийся в [44], где показано оптимальное программное управление для одного из объектов вида (28)). Однако в неустойчивых системах такие явления возможны и "принципа физической реализуемости" не нарушают. Это и позволило доказать, что регуляторы (37) на самом деле реализуемы, и в особых случаях (например, при синтезе гарантирующего управления) они были в дальнейшем успешно использованы.

Управление, доставляющее минимум среднеквадратичному критерию качества с учетом дополнительного условия устойчивости — уже вследствие наличия дополнительного условия — обеспечивает критерию качества значение, в общем случае меньшее, чем абсолютный минимум. Насколько меньшее — зависит от скорости затухания корреляционной функции. Чем медленнее она затухает, тем лучше она предсказывает будущие значения $\varphi(t)$, тем ближе минимум, достигаемый в устойчивой системе, к минимуму абсолютному. На рис. 13.6, ранее опубликованном в [44], показаны значения критерия качества для объекта управления $\dot{x} = u + \varphi$ при корреляционной функции $k_\varphi(\tau) = e^{-\alpha\tau}$ в функции от α. Нижняя кривая — абсолютный минимум, верхняя — минимум с учетом дополнительного условия устойчивости.

Хорошо известно, что чем быстрее затухает корреляционная функция, тем меньше интервал удовлетворительного предсказания. Если $k_\varphi(\tau) = e^{-\alpha\tau}$, то при $\alpha \to \infty$ процесс $\varphi(t)$ становится полностью непредсказуемым. Сравнивая формулы (46) и (82) и учитывая, что при $\alpha \to \infty$ будет $k \to 1$, мы убеждаемся, что при $\alpha \to \infty$ регуляторы (46) и (82) — совпадают, а при больших α они близки.

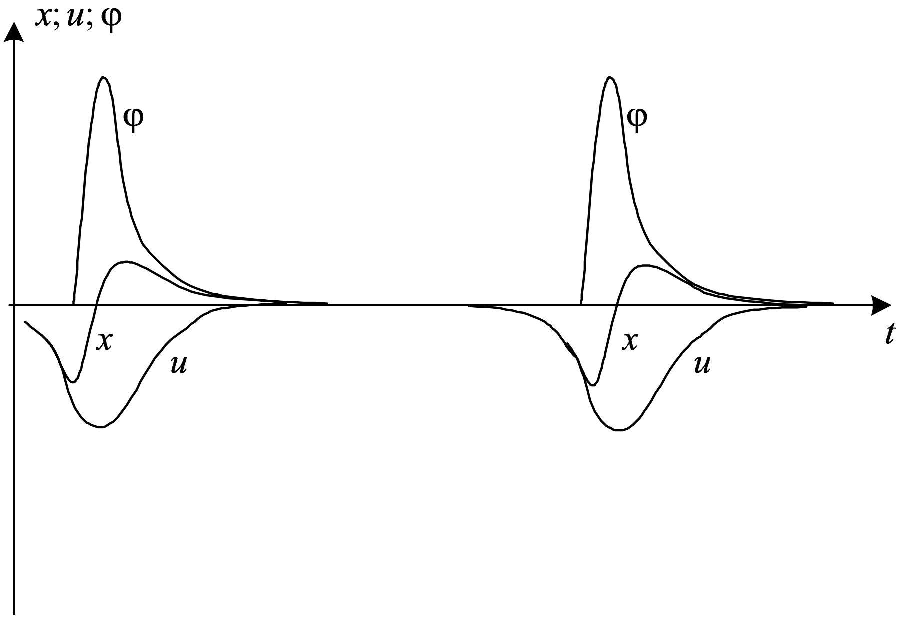


Рис. 13.5. Оптимальное программное управление для одного из объектов вида (28)

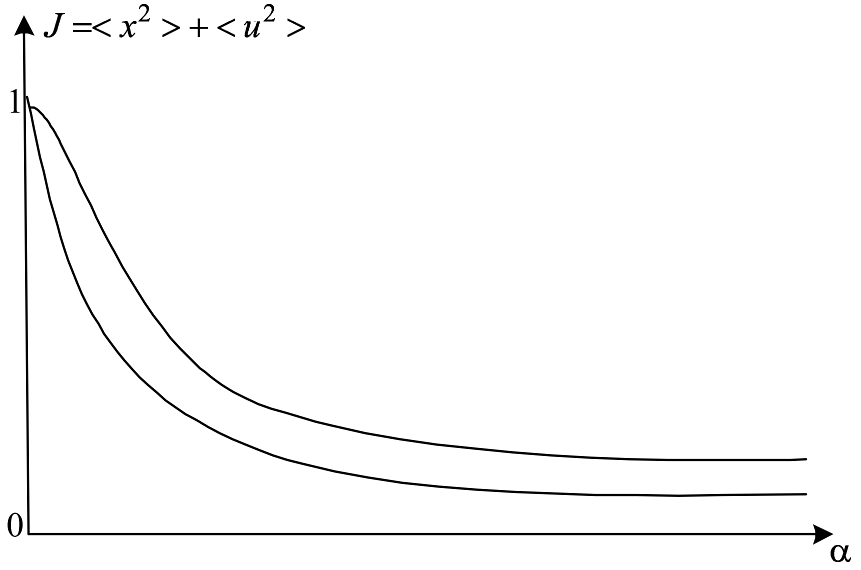


Рис. 13.6. Значения критерия качества

Поэтому регуляторы, оптимальные в смысле аналитического конструирования, будут приближенно-оптимальными для объектов, испытывающих воздействие возмущающих сил с быстро затухающей корреляционной функцией (точнее — затухающей много быстрее, чем затухают переходные процессы в замкнутой системе). Такие корреляционные функции часто встречаются на практике.

Простота и самих регуляторов (84), и методов их расчета, в сочетании с возможностью практического применения способствовали в 60-е годы XX века всплеску интереса к аналитическому конструированию. В одном из обзоров тех лет было подсчитано, что количество журнальных статей на эту тему к 1968 году перевалило за тысячу. Выходили и монографии [20, 21, 29]. Затем интерес к аналитическому конструированию быстро угас. Аналитическое конструирование подкосила встреча с потерей устойчивости при вариациях параметров.

Заметим, что если измерим и может быть непосредственно использован в канале обратной связи весь полный вектор состояния объекта управления (т. е. регулятор имеет вид (84), где k — матрица-строка без нулевых элементов), то все в порядке: регулятор (84) обеспечивает и устойчивость замкнутой системы, и сохранение устойчивости при неизбежных на практике вариациях параметров объекта управления и регулятора. Однако очень часто некоторые из составляющих полного вектора состояния недоступны для измерения и непосредственного использования в канале обратной связи. Вообще-то в этом особого затруднения нет — недоступные составляющие полного вектора регулируемых переменных на выходе объекта управления можно путем эквивалентных преобразований заменить на комбинации из доступных переменных и их производных. Характер переходных процессов и значение критериев качества при этом не должны меняться, и, действительно, как легко проверить, не меняются. Однако, используя этот метод на практике, столкнулись с опасной неожиданностью — замкнутые системы стали терять устойчивость при вариациях параметров объекта управления или регулятора. Причем — что самое опасное — только при вариациях определенного знака. Такой малый запас устойчивости часто не выявлялся на испытаниях, и это в дальнейшем приводило к авариям, подрывавшим всякое доверие к методам аналитического конструирования. Поэтому аналитическое конструирование не получило развернутого практического применения, и интерес к нему в последующие годы быстро угас, тем более, что объяснения опасных явлений теория управления тогда еще не давала[19].

Понять возникающие парадоксы проще на примере, вызвавшем оживленную дискуссию после его опубликования в 1973 году в статье [37]. Рассмотрим объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 0,75u; \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_3; \\ \dot{x}_3 = -x_1 + x_2 + 0,5u \end{cases} \qquad (85)$$

с критерием качества типа (75):

$$J = \int_0^\infty (4x_3^2 + u^2)dt. \qquad (86)$$

Минимум критерия (86) ыобеспечивает, как нетрудно вычислить, регулятор

$$u = -0,16x_1 + 0,36x_2 + 0,88x_3. \qquad (87)$$

Этот регулятор обеспечивает как устойчивость замкнутой им системы, так и сохранение устойчивости при вариациях любых коэффициентов в уравнениях (85) и (87).

Пусть теперь переменные x_1 и x_2 непосредственно не измеримы. Тогда мы можем заменить их, пользуясь уравнениями (85) и эквивалентными преобразованиями, на переменную x_3 и ее производные. После преобразований в работе [25] был получен регулятор

$$(0,1D - 0,87)u = (0,2D^2 + 0,56D + 1,08)x_3. \qquad (88)$$

Подчеркнем, что регулятор (88) получен из регулятора (87) с помощью эквивалентных преобразований. Он обеспечивает те же переходные процессы. И в то же время, как легко проверить, устойчивость замкнутой системы может теперь исчезнуть при сколь угодно малых положительных вариациях некоторых коэффициентов регулятора (88). В этом и заключался парадокс — замкнутые системы (85)—(87) и (85)—(88) эквивалентны, имеют одни и те же корни характеристического полинома, одни и те же решения, одинаковые переходные процессы. И в то же время, по такому важному свойству, как сохранение устойчивости при вариациях параметров, они различаются разительно. Это долго казалось непонятным; даже дискуссия, вспыхнувшая сразу после публикации [37] тогда, в 1973 году, еще ничего не прояснила, и только много позже, в [47], парадокс был разъяснен.

Оказалось, что причины парадокса лежат очень глубоко, что они связаны и необходимостью уточнения таких важных понятий, как эквивалентные преобразования математических моделей, корректность математического решения задач физики и техники, возможность изменения корректности при эквивалентных преобразованиях. Об этих важных вещах мы расскажем в отдельной главе *(главе 14)*. Там будет рассказано о том, что аварии, вызванные недостаточно продуманным использованием методики аналитического конструирования, удалось прекратить сравнительно быстро, но аварии, связанные с поздно открытыми новыми свойствами эквивалентных преобразований, продолжались долго, исследование их причин оказалось трудным делом, не законченным и до настоящего времени. Здесь открыто большое поле для интересной и плодотворной исследовательской работы.

Что касается оптимизации многомерных систем, в которых часть переменных не измеряема, то, после разъяснивших многое работ Р. Калмана [15, 16], для восстановления не измеряемых переменных стали использовать фильтры Калмана, наблюдатели Люенбергера и т. п. Данный круг вопросов был наиболее подробно освещен в монографии [18].

13.9. Оптимальные регуляторы в нелинейных системах управления

В работах А. М. Лётова [28, 29] для линейных систем и квадратичных критериев качества были установлены три важных факта:

1. Движение по экстремали в общем случае неустойчиво.
2. Из семейства экстремалей можно выделить устойчивое подсемейство меньшей размерности.

3. Если удается построить уравнение, которому удовлетворяет устойчивое подсемейство экстремалей, то можно построить регулятор, обеспечивающий устойчивость замкнутой системы и минимум критерия качества, совместимый с устойчивостью.

Естественно, что уже в 60-е годы XX века начались исследования по проблеме обобщения результатов А. М. Лётова, по синтезу регуляторов, реализующих движение по экстремалям из устойчивого их подсемейства для нелинейных объектов управления или для критериев качества более общего вида, не обязательно квадратичных. Но для таких критериев, как и для нелинейных объектов управления, уравнения Эйлера—Пуассона нелинейны, и построение уравнения устойчивого подсемейства экстремалей эквивалентно понижению порядка нелинейного дифференциального уравнения вдвое. Понятно, что задача эта очень трудна и до сего дня полного решения не получила.

На помощь пришла теория вырожденных функционалов. Она позволила синтезировать управление, обеспечивающее минимум расхода энергии и топлива для многих транспортных средств, для ряда электроприводов и некоторых других объектов управления [42, 43, 44, 47].

Действительно, для большинства транспортных средств интенсивность расхода топлива q зависит от того, в какой точке своего пути $s(t)$ находится транспортное средство, существенно зависит от скорости $\dot{s}$, а от ускорения $\ddot{s}$ либо не зависит вовсе, либо зависит линейно (если нет точной линейной зависимости, то все же обычно справедлива с хорошей степенью точности приближенная линейность). Поэтому полный расход топлива Q за время T будет равен интегралу

$$Q = \int_0^T q\,dt = \int_0^T [A(t;s;\dot{s}) + \ddot{s}B(t;s;\dot{s})]dt. \qquad (89)$$

Поскольку функционал (89) зависит от второй производной искомой функции $s(t)$, то для него уравнение Эйлера—Пуассона должно иметь четвертый порядок, а уравнение устойчивого подсемейства экстремалей — второй порядок. Однако благодаря тому, что вторая производная входит в функционал линейно, уравнение Эйлера-Пуассона, как нетрудно проверить, принимает вид:

$$A_s - A_{t\dot{s}} + B_{tt} + (2B_{ts} - A_{s\dot{s}})\dot{s} + B_{ss}\dot{s}^2 + (B_{t\dot{s}} + B_{s\ddot{s}}\dot{s} - A_{\dot{s}\ddot{s}})\ddot{s} = 0, \qquad (90)$$

т. е. вырождается в уравнение второго порядка, в уравнение устойчивого подсемейства экстремалей. Поэтому для вырожденных функционалов отпадает наиболее сложная часть решения — построение уравнения устойчивого подсемейства — и это позволяет синтезировать оптимальный регулятор непосредственно по уравнению Эйлера. Подобные регуляторы, синтезируемые непосредственно по уравнению Эйлера, было в [46] предложено назвать эйлеровскими регуляторами. Они позволили реализовать оптимальное управление для судов [42]; электровозов и тепловозов [43]; многих классов электроприводов [43, 46]. Эйлеровские регуляторы часто оказывались очень простыми и удобными в реализации. Так, проблему оптимального управления электровозами и тепловозами удалось в [43] свести к минимизации вырожденного функционала

$$J=\int_0^T(\ddot{s}\dot{s}+\omega(s)\dot{s}+k_1\dot{s}^2+k_2\dot{s}^2)dt, \tag{91}$$

где $\omega(s)$ — сложная функция от s, отражающая распределение подъемов и спусков на перегоне; k_1 и k_2 — постоянные. Уравнение Эйлера—Пуассона для функционала (91) сводится к уравнению

$$\ddot{s}(2k_1+6k_2\dot{s})=0 \tag{92}$$

и имеет простое решение: $\dot{s}=\text{const},$ которое легко реализуется элементарно простым регулятором. Дополнительные трудности вносят участки с достаточно крутыми подъемами и спусками, где управление выходит на ограничение по мощности, но и эти трудности вполне преодолимы (см. [43]). Столь же просты и удобны эйлеровские регуляторы для ряда электроприводов, описанные в монографии [46].

Для транспортных средств, движущихся с малыми ускорениями, расход топлива не зависит от $\ddot{s}$ и может быть сведен к функционалу

$$Q=\int_0^T q(s;\dot{s})dt, \tag{93}$$

в который время в явном виде, но входит. Для таких функционалов уравнение устойчивого подмножества решений уравнения Эйлера (которое является уравнением второго порядка) вырождается в следующее уравнение первого порядка:

$$\frac{dq}{d\dot{s}}\dot{s}-q=c, \tag{94}$$

(его называют также первым интегралом), которое тоже позволяет синтезировать простой эйлеровский регулятор для реализации оптимального управления. Этот регулятор может работать как адаптивный, и в этом случае не требует конкретной информации о зависимости q от s и $\dot{s}$. Технические решения, позволяющие реализовать минимум расхода топлива, приведены в книге [43]. На важность решения этой проблемы было еще раз обращено внимание в [54].

Разумеется, при оптимизации любого конкретного объекта возникают связанные с ним конкретные трудности, которые надо преодолевать. Так, например, в проблеме оптимизации управления силовыми установками судов главной трудностью было то, что сложная зависимость интенсивности расхода топлива $q(s;\dot{s})$ от распределения глубин по фарватеру, от пропульсивного коэффициента винта и т. д. не имела аналитических выражений и записывалась лишь в виде сложного комплекса графиков. Пришлось разработать графические методы решения уравнения Эйлера.

Поскольку графические методы решения были описаны в малодоступной сейчас монографии [42], полезно напомнить их основные положения, которые могут быть использованы для решения новых задач оптимизации. На рис. 13.7 показаны в сокращенном виде кривые зависимости интенсивности расхода топлива q от скорости движения $\dot{s}$ и глубины фарватера h для одного из судов (реально кривых много больше; на рис. 13.7 показана лишь небольшая их часть).

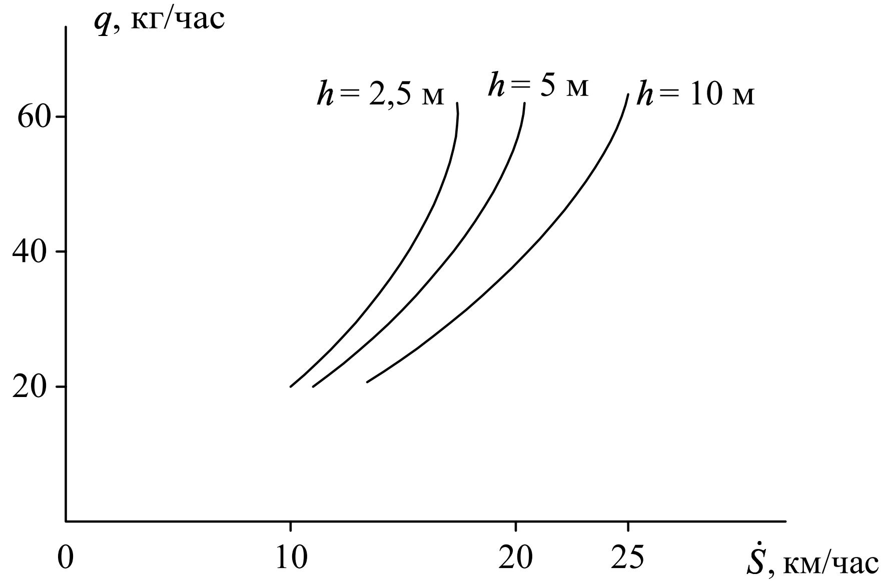


Рис. 13.7. Кривые зависимости интенсивности расхода топлива от скорости движения и глубины фарватера

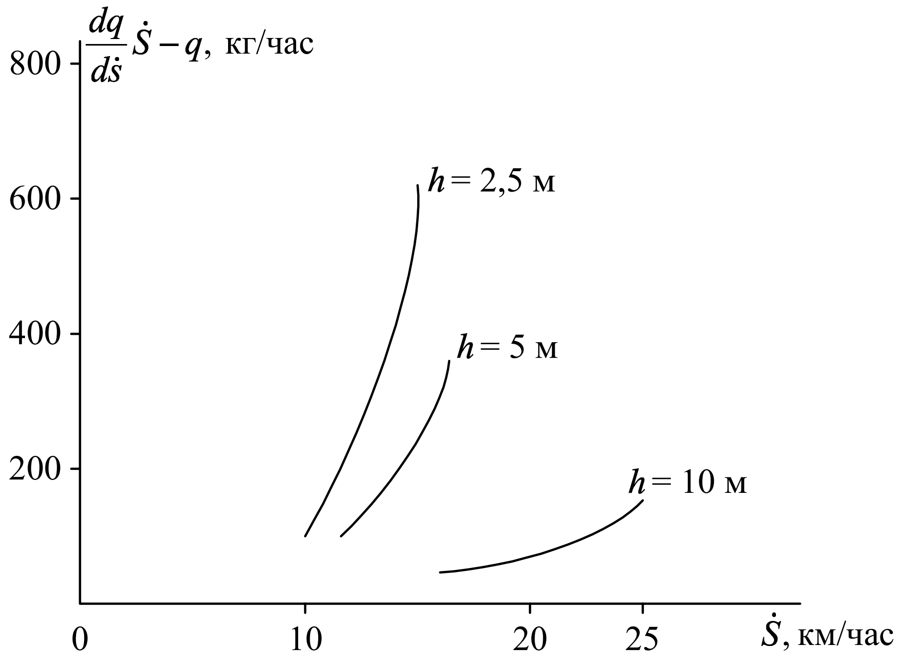


Рис. 13.8. Кривые зависимости от скорости движения величины левой части первого интеграла уравнения Эйлера

Поскольку глубина фарватера h является функцией текущего значения пути s, пройденного судном от пристани отправления, то после построения графика производной $\frac{dq}{d\dot{s}}$ на следующем этапе строятся кривые зависимости от $\dot{s}$ величины $\frac{dq}{d\dot{s}}\dot{s}-q$ — т. е. левой части первого интеграла уравнения Эйлера $\frac{dq}{d\dot{s}}\dot{s}-q=C.$

Эти кривые показаны на рис. 13.8. Пересекая их прямыми, параллельными оси абсцисс, получаем в точках пересечения оптимальные значения скорости движения судна $\dot{s}$ в зависимости от глубины фарватера h и величины C, которая в данном случае является "коэффициентом срочности" (чем больше C, тем выше средняя скорость движения судна).

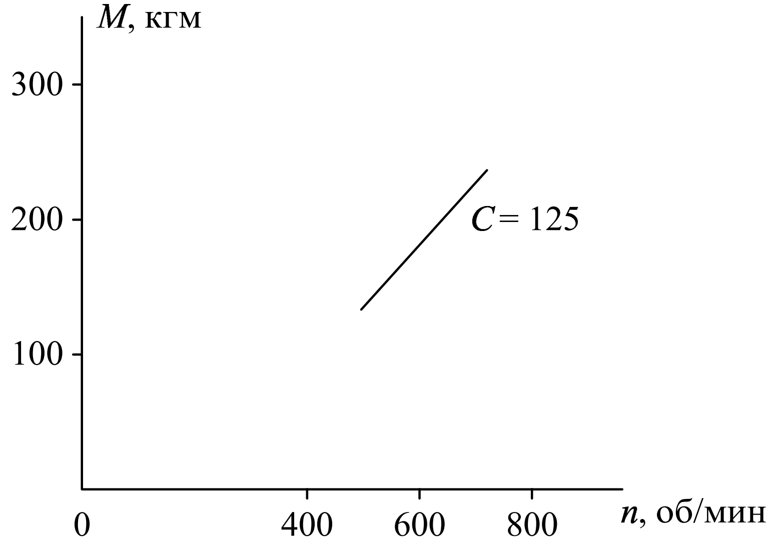


Рис. 13.9. Оптимальные зависимости момента на валу дизеля от его частоты вращения

На следующем этапе с рис. 13.8 снимаются оптимальные значения скорости движения судна $\dot{s}$, соответствующие выбранному значению "коэффициента срочности" C, а с рис. 13.7 — соответствующие им интенсивности расхода топлива q. Сопоставление их позволяет построить оптимальные зависимости момента на валу дизеля от его частоты вращения. Они показаны на рис. 13.9, и на их основе уже непосредственно настраивается регулятор дизеля, не требующий для своей работы информации о глубине фарватера. При этом оптимальная характеристика дизеля оказалась практически линейной — т. е. очень простой и удобной для реализации. Тем самым графические методы, предложенные в [42], позволили синтезировать исключительно простой эйлеровский регулятор, который потом, в 1969—1973 годах, выпускался серийно, был установлен более чем на 400 судах Волжского и Камского пароходств, позволил сократить расход топлива на 10—15% (более подробно все это изложено в монографии [44]) и принес более сорока миллионов (в тогдашних полноценных рублях) дополнительной прибыли. Особенности господствовавшей в те годы командно-административной системы привели к тому, что даже этот, исключительно простой и эффективный регулятор, не получил массового распространения. Его приходилось "внедрять", поскольку непосредственно обслуживающие его команды судов от всей многомиллионной экономии не получали ничего, ни копейки. В результате при очередном ремонте оптимальный регулятор, как правило, незаметно "исчезал" с корабля, и к 1990 г. оптимальные регуляторы, столь успешно "внедренные" в 1968—1973 гг., почти все исчезли.

Будем надеяться, что в новых экономических условиях этот эйлеровский регулятор, как и оптимальное управление в целом, будет, наконец, востребован. Научные результаты, лежащие в основе синтеза оптимального управления, оптимальных эйлеровских регуляторов, опубликованы в [42, 43, 44, 46, 47] и вполне доступны.

Главная их суть заключается в следующем — даже если (как это чаще всего бывает) нам неизвестны заранее и полностью все силы, действующие на управляемый объект, что исключает возможность использовать программное управление, мы можем использовать эйлеровские регуляторы, для которых необходима только легкодоступная информация о средних значениях или корреляционных функциях воздействующих сил.

До настоящего времени известны только два класса объектов управления, для которых реализуемо оптимальное управление при неполной информации о возмущающих воздействиях:

1. Линейные системы с квадратичными (или среднеквадратичными) критериями качества. Для синтеза оптимального управления в таких системах достаточна информация о корреляционных функциях (или спектрах) возмущающих воздействий.

   Теория подобных систем разрабатывается еще с 50-х годов XX века, и этой теории (и практическим ее приложениям) посвящено огромное количество литературы. В предыдущем изложении рассмотрена лишь небольшая часть истории этих исследований; автор старался выделить только главные, узловые моменты развития теории.

2. Значительно менее известен второй класс — системы с вырожденными функционалами, для которых можно построить уравнение, описывающее устойчивое подсемейство экстремалей, и синтезировать эйлеровский регулятор. Для синтеза его достаточна информация о среднем значении действующих сил. Несмотря на свою меньшую известность, теория эйлеровских регуляторов позволила найти и реализовать оптимальное управление для многих важных объектов управления.

   Теория оптимального управления и синтеза оптимальных регуляторов для этого (второго) класса объектов управления исследовалась (начиная с 1968 г.) на факультете прикладной математики — процессов управления Ленинградского государственного университета (переименованного потом в Санкт-Петербургский).

До настоящего времени только для этих двух классов управляемых объектов решена задача синтеза оптимального управления при не полностью известных возмущающих силах случайного характера.

Вполне возможно, что можно найти и другие классы объектов управления, для которых можно реализовать оптимальное управление при возмущающих силах, которые не полностью известны, и получить на этой основе значительный экономический эффект. Здесь открыто большое поле для интересной и нужной исследовательской работы.

Отметим, что в этой главе не ставилась цель представить исчерпывающее изложение истории автоматического управления. Цель главы — дать соискателю объем сведений, достаточный для сдачи кандидатского экзамена по истории и философии науки для специальностей, смежных с управлением. Читатели, желающие получить более полные знания по истории вопроса, могут ознакомиться, например, с монографией: Петров Ю. П. Очерк истории автоматического управления. — СПб., 2004. — 270 с.

Поскольку настоящая книга написана на основе лекций, прочитанных автором на факультете прикладной математики — процессов управления (ПМ-ПУ) Санкт-Петербургского государственного университета (СПбГУ), то в ней особое внимание уделено исследованиям, выполненным сотрудниками ПМ-ПУ. Это ни в коей мере не принижает значимости исследований, выполненных в других научных учреждениях и учебных заведениях, но и на факультете ПМ-ПУ сделано немало:

- разработаны методы удовлетворения комплекса требований к системе управления;
- обеспечен правильный учет реальных нелинейных ограничений на управляющие воздействия;
- построены гарантирующие управления при неизвестных спектрах возмущающих воздействий и погрешностей измерения;
- разработана теория синтеза и построены реально работающие регуляторы для нелинейных систем, критерии качества которых являются вырожденными функционалами;
- обнаружены интереснейшие явления изменения параметрической устойчивости и корректности при эквивалентных (равносильных) преобразованиях математических моделей систем управления. О них более подробно будет рассказано в *главе 14*.

Напомним, что основателем и первым руководителем факультета ПМ-ПУ СПбГУ был Владимир Иванович Зубов. Впоследствии много лет подряд деканом факультета являлся Леон Аганесович Петросян.

Литература к главе 13

1. Абдуллаев Н. Д., Петров Ю. П. Теория и методы проектирования оптимальных регуляторов. — Л.: Энергоатомиздат, 1985. — 240 с.
2. Александров А. Г. Синтез регуляторов многомерных систем. — М.: Машиностроение, 1986. — 272 с.
3. Барбашин Е. А. Функции Ляпунова. — М.: Наука, 1970. — 239 с.
4. Бородай И. К., Нецветаев Ю. А. Качка судов на морском волнении. — Л.: Судостроение, 1969.
5. Ван-Трис Г. Синтез оптимальных нелинейных систем управления. — М.: Мир, 1969. — 167 с.
6. Велин Н. В., Рассказов Ф. Н. Анализ оптимальных стохастических систем управления электроприводами. — Самара, 1996.
7. Веремей Е. И., Галактионов М. А., Петров Ю. П. Закон управления рулевой установкой судна, обеспечивающий стабилизацию на курсе при малом числе перекладок руля. Материалы по обмену опытом. — НТО им. Крылова. Л., 1977, вып. 267.
8. Веремей Е. И., Корчанов В. М. Фильтрация волновых помех в системе стабилизации движения судов // Вопросы судостроения, серия "Судовая автоматика", 1983, вып. 28.
9. Винер Н. Кибернетика. — М.: Советское радио, 1958. — 215 с.
10. Волгин Л. Н. Оптимальное дискретное управление динамическими системами. — М.: Наука, 1986. — 239 с.
11. Зубов В. И. Методы А. М Ляпунова и их применение. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1957. — 241 с.
12. Зубов В. И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования. — Л.: Машиностроение, 1974. — 335 с.
13. Зубов В. И. Устойчивость движения. — М.: Высшая школа, 1973. — 271 с.
14. Зубов В. И. Лекции по теории управления. — М.: Наука, 1975. — 495 с.
15. Калман Р. Е. Когда линейная система является оптимальной? // Труды американского общества инженеров-механиков. Серия Д. № 1. — М.: Мир, 1964.
16. Калман Р. Е., Бьюси Р. С. Новые результаты в линейной фильтрации и теории предсказания // Труды американского общества инженеров-механиков. Серия: техническая механика. — 1964. — с. 95—107.

17. Катковник В. Я., Полуэктов Р. Л. Многомерные дискретные системы управления. — М.: Мир, 1966. — 416 с.
18. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. — М.: Мир, 1977. — 650 с.
19. Колмогоров А. Н. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей // Известия АН СССР, 1941, Серия математическая, № 1, с. 3—14.
20. Красовский А. А. Аналитическое конструирование контуров управления летательными аппаратами. — М., 1969.
21. Красовский А. А. Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. — М.: Наука, 1973. — 558 с.
22. Крутько П. Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. — М.: Наука, 1987. — 304 с.
23. Ла-Салль Ж. Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. — М.: Мир, 1964.
24. Ларин В. Б., Науменко К. И., Сунцев В. Н. Спектральные методы синтеза линейных систем с обратной связью. — Киев: Наукова думка, 1971. — 106 с.
25. Ларин В. Б., Науменко К. И., Сунцев В. Н. Синтез оптимальных линейных систем с обратной связью. — Киев: Наукова думка, 1973. — 150 с.
26. Ларин В. Б., Науменко К. И., Сунцев В Н., Алиев Ф. А. Оптимизация линейных инвариантных во времени систем управления. — Киев: Наукова думка, 1978. — 327 с.
27. Ленинг Дж. Х., Беттин Р. Г. Случайные процессы в задачах автоматического управления. М.: Издательство иностранной литературы, 1958. — 368 с.
28. Лётов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов // Автоматика и телемеханика, 1960, № 4, с. 436—446, № 5, с. 561—570, № 6, с. 661—669.
29. Лётов А. М. Динамика полета и управление. — М.: Наука, 1969. — 359 с.
30. Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. — Гостехиздат, 1951.
31. Лурье А. И., Розенвассер Е. Н. О методах построения функции Ляпунова в теории нелинейных регулируемых систем. — Изд-во АН СССР, 1960.
32. Ляпунова. М. Общая задача об устойчивости движения. — Физматгиз, 1959.

33. Максвелл Д. К., Вышнеградский И. А. Стодола А. Теория автоматического регулирования (линеаризованная задача). — М.: Изд-во АН СССР, 1949.
34. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. — М.: Наука, 1966.
35. Моисеев Н. Д. Очерки развития теории устойчивости. — Гостехиздат, 1949.
36. Меррием К. Теория оптимизации и расчет систем управления с обратной связью. — М.: Мир, 1967. — 549 с.
37. Надеждин П. В. О потере грубости при элементарных преобразованиях дифференциальных уравнений управляемых систем // Автоматика и телемеханика, 1973, № 1, с. 185—187.
38. Ньютон Д., Гулд Л., Кайзер Д. Теория линейных следящих систем. — Физматгиз, 1961. — 407 с.
39. Острем К. Введение в стохастическую теорию управления. — М.: Мир, 1973. — 320 с.
40. Первозванский А. А. Курс теории автоматического управления. — М.: Наука, 1986. — 615 с.
41. Первозванский А. А., Барабанов А. Е. Оптимизация по равномерно частотным показателям (H^{∞}-теория). Обзорная статья // Автоматика и телемеханика, 1992, № 9.
42. Петров Ю. П. Оптимальные регуляторы судовых силовых установок. — Л.: Судостроение, 1966. — 121 с.
43. Петров Ю. П. Оптимальное управление движением транспортных средств. — Л.: Энергия, 1969. — 95 с.
44. Петров Ю. П. Оптимизация управляемых систем, испытывающих воздействие ветра и морского волнения. — Л.: Судостроение, 1973. — 214 с.
45. Петров Ю. П. О неединственности решения задачи синтеза оптимального регулятора // Известия ВУЗ. Электромеханика, 1974, № 2, с. 221—223.
46. Петров Ю. П. Вариационные методы теории оптимального управления. 2-е изд. — Л.: Энергия, 1977. — 280 с.
47. Петров Ю. П. Синтез оптимальных систем управления при не полностью известных возмущающих силах. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1987. — 289 с.
48. Петров Ю. П., Червяков В. В. Системы стабилизации буровых судов. — СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1985. — 261 с.; 2-е изд., доп., 1997. — Л.: Судостроение. — 215 с.

49. Петров Ю. П. Вариационные методы синтеза гарантирующих управлений. — СПб.: Изд-во СПбГУ, 1995. — 54 с.

50. Петров Ю. П. Новые главы теории управления. — СПб.: Изд-во СПбГУ, 2000. — 156 с. — Расширенное и дополненное издание: Петров Ю. П. Новые главы теории управления и компьютерных вычислений. 2-е изд., перераб. и доп. — БХВ-Петербург, 2004. — 192 с.

51. Садомцев Ю. В. Аналитический синтез регуляторов при случайных возмущениях. Сборник "Аналитические методы синтеза регуляторов". — Саратов, 1978. — с. 39—57.

52. Солодовников В. В. Введение в статистическую динамику систем автоматического управления. — ГИТТЛ, 1952.

53. Солодовников В. В. Статистическая динамика линейных систем управления. — М., 1960.

54. Уржумцев Ю. С., Пантелеев В. П. Об автоматической минимизации энергоемкости транспортных перемещений // Доклады АН СССР, 1983.

55. Фомин В. Н. , Фрадков А. Л. , Якубович В. А. Адаптивное управление динамическими объектами. — М.: Наука, 1981. — 448 с.

56. Цейтлин Я. М. Проектирование оптимальных линейных систем. — М.: Машиностроение, 1973. — 240 с.

57. Чанг Ш. Синтез оптимальных систем автоматического регулирования. — М.: Машиностроение, 1964. — 440 с.

58. Честнов В. Н. О возможной неустойчивости управляемых систем с учетом параметрических возмущений. Межвузовский сборник "Аналитические методы синтеза регуляторов". — Саратов, 1984. — с. 26—35.

59. Щипанов Г. В. Теория и методы проектирования автоматических регуляторов // Автоматика и телемеханика, 1939, № 1, с. 48—64.

60. Якубович В. А. Оптимизация и инвариантность линейных стационарных систем управления // Автоматика и телемеханика, 1984, № 8, с. 5—45.

61. Якубович В. А. Линейно-квадратичная задача оптимального гашения вынужденных колебаний // Доклады РАН. 1993. т. 333. № 2.

62. Янушевский Р. Т. Теория линейных оптимальных многосвязных систем управления. — М.: Наука, 1973. — 464 с.

Глава 14

Проблема обеспечения надежности вычислений при ограниченной точности исходных данных. Корректные, некорректные и промежуточные задачи

В этой главе будет рассказана история исследования одной из важнейших практических проблем — обеспечения надежности результатов расчета с учетом неизбежной ограниченной точности исходных данных и погрешностей округления при вычислениях. В математике разработаны прекрасные методы расчета при заданных, номинальных значениях коэффициентов, параметров, начальных и граничных условий. Однако на практике все исходные для расчета данные измеряют с неизбежной погрешностью, не равной нулю. Возникал законный вопрос — не могут ли эти погрешности, пусть даже малые, существенно изменить результаты вычислений, привести к коренному и опасному расхождению между результатами расчета и реальностью? Примеры таких расхождений были давно известны — если один камень лежит на другом так, что центр масс верхнего расположен над гранью нижнего (как показано на рис. 14.1), то даже малая неточность в задании положения центра масс все меняет: по расчету верхний камень лежит, а на деле он падает. Конечно, в подобных простых примерах все ясно, и на протяжении очень долгого времени в математике исследовались задачи, где малым погрешностям исходных данных соответствовали малые погрешности конечного результата (и для решения таких задач с учетом погрешностей исходных данных была разработана, например, теория чувствительности), а примеры типа показанных на рис. 14.1 исключались из рассмотрения, как не имеющие практического смысла.

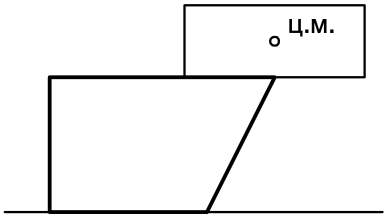


Рис. 14.1. Центр масс верхнего камня расположен над гранью нижнего

В XX веке произошли события, заставившие во многом пересмотреть прежние подходы:

- в начале века, в 1902 году, Адамар открыл существование целого класса некорректных задач;
- в конце века в Санкт-Петербургском государственном университете (СПбГУ) был открыт класс задач, меняющих корректность при эквивалентных преобразованиях. Оказалось, что привычные, повседневно и повсеместно используемые эквивалентные (равносильные) преобразования — такие, как перенос членов уравнения из левой части в правую с изменением знака, умножение всех членов на число, не равное нулю, подстановки и т. п. — далеко не безобидны. Не меняя самих решений как таковых, они могут изменять важные свойства решений, могут изменять корректность решаемой задачи и приводить к опасным ошибкам в расчетах.

Эти открытия оказали (и, несомненно, окажут в дальнейшем) большое влияние как на математику в целом, так и на практику компьютерных вычислений в особенности, поэтому имеет смысл рассмотреть их историю подробнее — тем более, что наиболее значимые события происходили в этой области совсем недавно — в самом конце XX века. Так что читатель может познакомиться не только с новой, но и с новейшей историей науки. Начнем с истории открытия и исследования некорректных задач.

14.1. Некорректные задачи

Понятие о некорректных задачах математики, разделение задач на корректные и некорректные, было введено в 1902 году выдающимся французским математиком Жаком Адамаром (Hadamard, 1865—1963). Ж. Адамар прожил долгую и плодотворную жизнь, преподавал во многих высших учебных заведениях Франции, сделал немало научных открытий; исследование некорректных задач является наиболее значительным из его научных достижений. Адамар назвал некорректными те математические задачи, решения которых существенно изменяются при сколь угодно малых изменениях коэффициентов, параметров, начальных или граничных условий.

Поскольку на практике измерить и задать для расчета идеально точно величину коэффициентов, параметров и т. п. почти всегда невозможно, то практический смысл имеют, разумеется, только корректные задачи — те, решения которых не меняются существенно при неизбежных малых погрешностях в задании параметров, при малых изменениях (вариациях) их. Фактически математика на протяжении всех трех тысяч лет своего существования решала корректные задачи, и лишь Адамар в 1902 году доказал существование целого класса задач некорректных. Ситуация в математике до 1902 года напоминает известную пьесу Мольера, герой которой всю жизнь говорил прозой, но не подозревал об этом, поскольку не знал разницы между прозой и стихами. На необходимость различения корректных и некорректных задач впервые указал Адамар в своей публикации 1902 года.

Вот знаменитый пример Адамара, относящийся к решению задачи Коши для уравнения Лапласа, — т. е. уравнения в частных производных:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0, \tag{1}$$

где U — функция двух переменных x и y, у которой заданы граничные условия, т. е. заданы значения самой функции $U(x; y)$ при $y = 0$ — эти значения равны некоторой функции $f(x)$ аргумента x, и заданы значения производной $\frac{\partial U}{\partial y}$ при $y = 0$ — эти значения также будут некоторой функцией $\psi(x)$ того же аргумента x, где $-\infty < x < +\infty$. Решения уравнения (1) — т. е. функции $U(x; y)$, удовлетворяющие самому уравнению (1) и граничным условиям, — зависят от граничных условий и определяются ими.

Уравнение (1) описывает, например, распределение тепла в пластине, расположенной выше оси $y = 0$.

Если $f(x) = f_1(x) = 0$ и $\psi(x) = \psi_1(x) = 0$, то, решая уравнение (1), найдем, что:

$$U_1(x; y) = 0. \tag{2}$$

Если же функция $f(x) = f_2(x) = 0$, но функция $\psi(x)=\psi_2(x)=\frac{1}{a}\sin ax$, где $a>0$, то решением уравнения (1) будет в этом случае функция двух переменных:

$$U_2(x; y)=\frac{1}{a^2}\sin ax\cdot\operatorname{sh} ay. \tag{3}$$

Поскольку модуль разности функций $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ не превышает $\frac{1}{a}$:

$$|\psi_1(x) - \psi_2(x)| = \left|0 - \frac{1}{a}\sin ax\right| \le \frac{1}{a}, \tag{4}$$

то за счет выбора большого значения a он может быть сделан сколь угодно малым. В то же время модуль разности решений

$$|U_1(x;y) - U_2(x;y)| = \left|\frac{1}{a^2}\sin ax \cdot sh\, ay\right| \tag{5}$$

для любого $y > 0$ при больших a велик. Действительно, при больших значениях аргумента ay гиперболический синус очень велик, и поэтому дробь $\frac{sh\, ay}{a^2}$ быстро возрастает. Так, при $y = 1$ имеем (с точностью до трех знаков) следующие значения этой дроби (табл. 14.1).

Таблица 14.1. *Зависимость значений* $\frac{sh\, ay}{a^2}$ *от величины а*

a	3	10	20
$\frac{shay}{a^2}$	1,11	110	$606 \cdot 10^3$

Таким образом, сколь угодно малые изменения граничных условий могут привести в данном случае к большим изменениям решений, поэтому рассматриваемая задача решения уравнения (1) — некорректна.

Пример Адамара относился к достаточно сложным задачам математической физики, к уравнениям с частными производными. Однако некорректными могут быть и совсем простые задачи.

Пример: пусть задано огородить участок земли площадью s. Минимум длины изгороди p будет в том случае, если участок имеет форму круга. Тогда, как известно, $p = p_{\min} = 2\sqrt{\pi s}$ (поскольку для круга $p = 2\pi R$ и $s = \pi R^2$, то, исключая R, получаем $p_{\min}$).

Однако это решение не имеет практического смысла — если истинная величина огораживаемой площади хотя бы на сколь угодно малую величину Δs превысит расчетное значение s, то минимальной длины изгороди $p_{\min}$ уже не хватит, изгородь замкнуть не удастся. Рассматриваемая задача некорректна, и это типично для очень многих задач на максимумы и минимумы — если мы нашли минимальное значение любой величины, удовлетворяющей некоторому условию, то уже при сколь угодно малом отличии истинной величины условия от расчетной рассчитанное нами минимальное значение окажется недостаточным, поставленное условие выполнено уже не будет. Таким образом, с некорректными задачами фактически приходится сталкиваться очень часто, во многих задачах на экстремум.

Общий рецепт решения некорректных задач несложен: поскольку прямое решение некорректной задачи практического смысла не имеет, нужно заменить некорректную задачу другой, корректной. Желательно при этом, чтобы в решение новой задачи входил параметр, причем такой, чтобы при некотором его значении рассматриваемая корректная задача переходила в исходную, некорректную, и тем самым можно было бы приблизиться к решению исходной задачи сколь угодно близко.

В примере с изгородью нужно перейти к такой формулировке: поскольку огораживаемая площадь s может измеряться с погрешностью, и максимально возможное значение погрешности равно Δs, то надо поставить следующую задачу — какой запас длины изгороди Δp нужно добавить к минимальному значению для того, чтобы при $\Delta s \neq 0$ изгородь всегда можно было замкнуть? Решение несложно: из уравнения

$$p + \Delta p = \sqrt{4\pi}\sqrt{s + \Delta s} \tag{6}$$

сразу находим

$$\Delta p = \sqrt{4\pi}(\sqrt{s + \Delta s} - \sqrt{s}). \tag{7}$$

В данном простом случае само значение Δs можно рассматривать как параметр; при $\Delta s = 0$ получаем решение исходной некорректной задачи — для огораживания участка площадью s нужна изгородь длиной $\sqrt{4\pi s}$. Само решение смысла не имеет (точнее, смысл его утрачивается при сколь угодно малом Δs). Но приблизиться к решению некорректной задачи с любой степенью точности в данном случае можно с помощью последовательности решений корректных задач. Решение приобретает смысл, если известна оценка для максимально возможной величины Δs.

После опубликования в 1902 г. первой работы Ж. Адамара о некорректных задачах стало ясным, что перед решением любой математической задачи необходимо проверить: корректна поставленная задача или нет. Если такой проверки не делать, если решать некорректную задачу обычными методами, как корректную, то почти неизбежна серьезная ошибка — математику будет казаться, что задача решена, а на самом деле это решение практического смысла не имеет и только вводит в заблуждение.

До 1902 года исследователи интуитивно избегали подобных ошибок (и, разумеется, вводили "запас" при решении задач на минимум), после опубликования работ Ж. Адамара некорректных задач стали избегать уже сознательно и постепенно начали перед решением проводить (хотя и не всегда!) проверку корректности. Простейшая из возможных проверок — повторение решения при немного измененных коэффициентах, начальных условиях и т. п. Если новое решение при немного измененных коэффициентах сильно отличается от исходного, задачу относили к некорректным, которые первоначально считали не имеющими смысла.

К середине XX века стало выясняться, что некорректные задачи часто встречаются при исследовании многих важных проблем физики и техники, поэтому просто отмахиваться от некорректных задач не следует, а нужно разрабатывать методику подхода к подобным задачам. На этом направлении важные успехи были достигнуты московской школой академика Андрея Николаевича Тихонова (1906—1995). Работы А. Н. Тихонова и его последователей (Арсенин В. Я., Гласко В. Б., Гончарский А. В., Иванов В. К., Лаврентьев М. М., Морозов В. А., Ягола А. Г. и др.) получили высокую оценку и заслуженное признание. Мы не будем подробно останавливаться на этих работах и на используемом в них методе регуляризации некорректных задач, (т. е., собственно, замене исходной некорректной задачи на сходящуюся к ней последовательность корректных задач), поскольку все эти вопросы подробно рассмотрены в учебном пособии для студентов вузов, обучающихся по специальности "прикладная математика": Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. Эта книга выдержала уже три издания (1974, 1979, 1986 гг.) и широко известна [23]. Мы не приводим также списка публикаций по решению различных некорректных задач (первая публикация А. Н. Тихонова по этой тематике датирована 1963 годом), поскольку большой список приведен в библиографии легкодоступной книги [23] (в списке литературы, приведенном в конце этой главы, добавлены лишь работы, опубликованные после 1986 года).

Рассмотрим вместо этого некоторые некорректные задачи, непосредственно встретившиеся в теории управления при синтезе оптимальных регуляторов с обратной связью. Как уже рассказывалось в *главе 13*, для ряда объектов управления минимум критерия качества лежит на границе устойчивости, и поэтому многие из задач синтеза оптимальных регуляторов являются некорректными.

Вот простой пример, приводившийся в [9], — объект управления описывается уравнением

$$4Dx = (D+1)u + \varphi(t), \tag{8}$$

где x — регулируемая переменная; $D = \frac{d}{dt}$; u — управляющее воздействие; $\varphi(t)$ — возмущающее воздействие, стационарный случайный процесс со спектром

$$S_{\varphi} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{1+\omega^2}. \tag{9}$$

Требуется найти математическую модель регулятора, обеспечивающего устойчивость замкнутой системы и минимум критерия качества:

$$J = 9\langle x^2 \rangle + \langle u^2 \rangle. \tag{10}$$

Выполнив вычисления, рекомендуемые традиционной методикой синтеза оптимального управления [9], мы найдем математическую модель регулятора:

$$(3D-5)u = 12(D+4)x, \tag{11}$$

обеспечивающего критерию качества (10) минимальное значение $J_{\min} = 0{,}4336$. Регулятор (11) обеспечивает устойчивость замкнутой системы, но если коэффициент при Dx в уравнении объекта управления (8) отклонится от своего номинального значения, и это уравнение примет вид:

$$4(1+\varepsilon)Dx = (D+1)u + \varphi(t), \tag{12}$$

то, замкнув регулятором (11) объект управления (12), убедимся, что характеристический полином замкнутой системы имеет теперь вид:

$$-12\varepsilon D^2 + (80+20\varepsilon)D + 48. \tag{13}$$

При $\varepsilon = 0$ полином (13) гурвицев, и замкнутая система устойчива, но уже при сколь угодно малых $\varepsilon > 0$ полином (13) перестает быть гурвицевым, замкнутая система теряет устойчивость, и ни о каком минимуме критерия качества (10) вообще уже нельзя говорить. Для объекта управления (8) и спектра возмущающего воздействия (9) задача о минимуме функционала (10) — некорректна.

Эту некорректность можно заранее предвидеть, поскольку для объекта управления (8) степень n операторного полинома при регулируемой переменной x равна единице, степень m операторного полинома при управлении тоже равна единице, а для спектра (9) будет $p = 0$ и $q = 1$. Следовательно, известный критерий Ю. П. Петрова:

$$p \geq m + q - 1 \tag{14}$$

здесь не выполнен, что говорит о некорректности в данном случае задачи о минимуме критерия качества (10); это подтверждает и прямое исследование полинома (13).

Таким образом, критерий Ю. Петрова (14) позволяет заранее различать корректные задачи синтеза оптимальных регуляторов от задач некорректных — и позволяет производить это различение гораздо проще, чем прямой, но гораздо более громоздкий метод повторения вычисления оптимального регулятора и характеристического полинома замкнутой системы при немного измененных коэффициентах объекта управления (тем более, что проверку надо производить при изменениях всех коэффициентов объекта управления, что для объектов высокого порядка крайне трудоемко).

Теперь рассмотрим тот подход, который предлагался в монографии [9] для решения этой некорректной задачи.

Для того чтобы удовлетворялось неравенство (14), увеличим степень числителя p в спектре (9) и заменим его при расчете регулятора на спектр

$$S_\varphi = \frac{2}{\pi}\frac{1+k^2\omega^2}{1+\omega^2}. \qquad (15)$$

Для спектра (15) имеем $p = 1$, $q = 1$; теперь неравенство (14) выполнено, и можно быть уверенным, что рассматриваемая нами задача при $k \neq 0$ станет корректной.

Действительно, выполнив прежний расчет оптимального регулятора, но уже для спектра (15), мы придем к регулятору

$$[(3 - 11k)D - (5 + 3k)]u = 12[(1 + 3k)D + 4]x, \qquad (16)$$

а замкнув этим регулятором объект управления (12), найдем характеристический полином замкнутой системы

$$(20k - 3\varepsilon + 11\varepsilon k)D^2 + (20 + 12k + 5\varepsilon + 3\varepsilon k)D + 12. \qquad (17)$$

Исследуя формулу (17), мы убеждаемся, что устойчивость замкнутой системы зависит от соотношения чисел ε и k. При $k = 0$ устойчивость теряется при сколь угодно малых $\varepsilon > 0$. Чем больше k, тем больше интервал чисел ε, при которых сохраняется устойчивость, т. е. тем больше интервал допустимых вариаций параметров объекта управления, не приводящих к потере устойчивости. С увеличением коэффициента k этот интервал очень быстро расширяется. Так, уже при $k = 0{,}1$ устойчивость сохранится для всех $|\varepsilon| \le 1$, т. е. не только для малых, но и для больших отклонений параметров объекта от расчетных значений.

Теперь нетрудно рассчитать потерю в критерии качества — ту жертву, которая была принесена ради удовлетворения дополнительного требования, — сохранения устойчивости при вариациях параметров объекта управления. Замкнув объект (8) регулятором (16) и вычисляя функционал (10) при спектре возмущающего воздействия (9), мы получим для $k = 0{,}1$ значение $J = 0{,}4374$ или всего на 0,876% больше, чем при $k = 0$. (Заметим, что расчет критерия ведем, естественно, для истинного спектра возмущающего воздействия (9); спектр (15) применяется только для расчета регулятора.) Столь малая жертва в критерии качества объясняется тем, что для объекта управления (8) существенны, в основном, малые частоты в спектре возмущающего воздействия, а переходя от спектра (9) к спектру (15), мы изменяем его в основном в районе высоких частот. Вот почему методика обеспечения сохранения устойчивости при вариациях параметров, предложенная в [9], приводит к меньшим потерям в критерии качества, чем более распространенная методика замены функционала (10) на функционал

$$J_1 = m^2\langle x^2\rangle + \langle u^2\rangle + k^2\langle \dot{u}^2\rangle, \tag{18}$$

где k — коэффициент, специально вводимый для обеспечения сохранения устойчивости при вариациях параметров.

Таким образом, выявляется прямая связь между регуляризацией некорректных задач, предложенной А. Н. Тихоновым, и методикой, позволившей преодолеть трудности с потерей устойчивости, которые так долго препятствовали практическим приложениям теории оптимального управления (об этой методике более подробно рассказывалось в *главе 13*). Параметр k во введенном для расчета регулятора спектре (15) — это, фактически, регуляризующий параметр, который позволяет заменить исходную некорректную задачу на последовательность корректных задач. Чем меньше значение k, тем ближе решение корректной задачи синтеза оптимального регулятора к исходной некорректной задаче о точном минимуме критерия качества, но зато тем меньше интервал допустимых вариаций параметров объекта управления, не приводящих еще к потере устойчивости.

14.2. Неожиданная встреча с третьим классом задач математики, физики и техники

На протяжении первых девяти десятилетий XX века все математики считали, что существует только два класса задач: издавна известный класс задач корректных (их называли еще "корректно поставленными" задачами [21]) и класс задач некорректных, введенный в рассмотрение Жаком Адамаром в 1902 году. Только в 1990 году вскрылось существование еще одного класса: класса задач, изменяющих свою корректность при эквивалентных преобразованиях исходной математической модели, в том числе и при преобразованиях, используемых в ходе ее решения. Такие задачи нельзя отнести ни к корректным, ни к некорректным. Их надо рассматривать скорее как задачи-перевертыши, задачи-перебежчики, способные перебегать из одного класса в другой и тем самым серьезно затруднять решение. Эти задачи следует выделить в отдельный, третий класс и уделить ему серьезное внимание.

Существование третьего класса задач прикладной математики значительно осложняет проблему обоснования достоверности решения прикладной задачи. Действительно, если, например, не проверить перед решением корректность и решать некорректную задачу по обычной методике, как корректную, то можно, как известно, получить ошибочный ответ. Поэтому, начиная с 1902 года, совершенно справедливо советуют перед решением проверить корректность. Эта проверка проводилась обычно по математической модели, приведенной путем эквивалентных преобразований к более удобному для исследования виду.

После исследований, проведенных в СПбГУ в 90-х годах XX века, выяснилось, что без дополнительных проверок использованных преобразований нет твердых оснований для уверенности в том, что если корректна преобразованная модель, то корректна и исходная задача, — и тогда возникает возможность серьезной ошибки.

Существование задач третьего класса было выявлено лишь в конце XX века в ходе исследований оптимального управления. Мы уже упоминали в *главе 13*, что при разработке методов синтеза оптимальных систем А. М. Лётовым были предложены регуляторы, использующие в канале обратной связи полный вектор регулируемых переменных и обеспечивающие хорошее протекание переходных процессов. Поскольку полностью значения всех регулируемых переменных очень часто измерить невозможно, то наиболее естественной была замена неизмеряемых переменных на комбинации измеряемых переменных и их производных путем эквивалентных преобразований, сохраняющих неизменными решения системы, а значит, и переходные процессы в ней. При этих преобразованиях как раз и встретились с парадоксальным явлением — первоначально рассчитанная замкнутая система, включающая в себя регулятор, использующий все регулируемые переменные, безусловно, сохраняла устойчивость при вариациях любых параметров объекта управления или регулятора. В то же время эквивалентная ей система с регулятором, использующим только одну (измеряемую) переменную и ее производные, теряла устойчивость и приводила к авариям при сколь угодно малых вариациях параметров, хотя обе системы были эквивалентны друг другу, и переходные процессы в них (при номинальных значениях параметров) были тождественны.

Впервые пример исследования таких систем был приведен в 1973 году в уже упоминавшейся в *главе 13* статье П. В. Надеждина [8]. Однако в то время причины явления, с которым тогда неожиданно встретились, еще не были поняты. Частично это было связано с тем, что П. В. Надеждин говорил не об эквивалентных, а об "элементарных" преобразованиях. Дело в том, что "эквивалентные" преобразования (их называют еще "равносильными преобразованиями") — это точно определенное математическое понятие (смотри, например, [7]): эквивалентными называют преобразования, при которых исходная и преобразованная системы имеют одни и те же решения. Что же касается "элементарных" преобразований, то они не имеют общепризнанного определения, и совершенно не ясно, какие преобразования считать элементарными и какие — нет.

Кроме того, П. В. Надеждин считал, что в рассмотренном им примере после преобразований теряется "грубость" исследуемой системы. На самом деле это не так. Известные термины "грубость", "грубые системы" были введены А. А. Андроновым, А. Л. Виттом и С. Э. Хайкиным в 1937 году ([2], стр. 341—385). Они называли так описываемые дифференциальными уравнениями объекты, которые не меняют существенно своего поведения при вариациях параметров, но при условии, что эти вариации не изменяют порядка дифференциального уравнения, описывающего объект. Эта последняя оговорка существенна. Если ее не делать, то вообще вряд ли можно будет найти пример "грубой" системы, "грубого" объекта — при изменении порядка дифференциального уравнения поведение объекта почти обязательно меняется.

Между тем в примере, рассмотренном П. В. Надеждиным, при вариациях параметров изменялся порядок уравнения — это означало, что рассмотренный в [8] пример не имеет отношения к известной проблеме "грубости" и "негрубости". Фактически в примере из [8] произошла одна из первых встреч с новым явлением (изменением корректности), но тогда, в 1973 году, это еще не было понято.

П. В. Надеждин считал, что потеря устойчивости при сколь угодно малых вариациях параметров в системе, которую ранее В. Б. Ларин, К. И. Науменко и В. Н. Сунцев считали оптимальной, свидетельствует только о непригодности предложенного и используемого ими алгоритма синтеза оптимальных систем управления, поскольку он приводит, по мнению П. В. Надеждина, к "негрубым системам". Авторы алгоритма возражали П. В. Надеждину на страницах того же журнала "Автоматика и телемеханика" в 1973 году, справедливо указывая, что рассматриваемый пример под определение "не грубой" системы, данное А. А. Андроновым и его соавторами в [2], заведомо не подходит. Однако вступившие в дискуссию авторы тогда еще не поняли, что они столкнулись с чем-то новым, требующим особого объяснения, и поэтому существа нового явления, возникшая в 1973 году, дискуссия не прояснила.

Другие неосознанные встречи с новым явлением происходили у исследователей, занимающихся устойчивостью по части переменных (В. И. Зубов [6], В. И. Воротников [3] и др.).

Вот один из примеров, приведенных в [3], — система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - 2x_3; \\ \dot{x}_2 = 4x_1 + x_2; \\ \dot{x}_3 = 2x_1 + x_2 - x_3 \end{cases} \tag{19}$$

имеет характеристический полином

$$\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1) \tag{20}$$

с положительным корнем $\lambda_3 = 1$, и поэтому все ее решения, все переменные $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ устойчивыми быть не могут. Однако по переменной x_1, система (19) устойчива, что можно проверить прямым интегрированием системы (19), после которого получаются решения:

$$x_1 = x_{10}e^{-t} + (x_{20} - 2x_{30})te^{-t};$$

$$x_2 = (2x_{30} - x_{20} - 2x_{10})e^{-t} + 2(2x_{30} - x_{20})te^{-t} + 2(x_{10} + x_{20} - x_{30})e^{t};$$

$$x_3 = (2x_{30} - x_{10} - x_{20})e^{-t} + (2x_{30} - x_{20})te^{-t} + (x_{10} + x_{20} - x_{30})e^{t},$$

где $x_{10} = x_1(0)$; $x_{20} = x_2(0)$; $x_{30} = x_3(0)$ являются начальными условиями для переменных x_1; x_2; x_3. Мы убеждаемся, что переменная $x_1(t)$ действительно устойчива.

Для того чтобы проверить устойчивость переменной x_1 без непосредственного интегрирования исходной системы, что далеко не всегда выполнимо, вводят новую переменную $\mu = x_2 - 2x_3$ и преобразуют систему (19) к новым переменным с помощью эквивалентных преобразований. Поскольку $\dot{\mu} = \dot{x}_2 - 2\dot{x}_3$, то с учетом второго и третьего из уравнений (19) имеем:

$$\dot{\mu} = 4x_1 + x_2 - 2(x_1 + x_2 - x_3) = -\mu,$$

и окончательно получаем для переменных x_1 и μ уравнения:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 + x_1 = \mu; \\ \dot{\mu} + \mu = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Система (21) имеет гурвицев характеристический полином

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2,$$

поэтому все ее решения $x_1(t)$ и $\mu(t)$ — устойчивы.

Таким образом, использование методики "μ-преобразований" позволило установить устойчивость системы (19) по переменной x_1 без непосредственного интегрирования самой системы. Поэтому методика μ-преобразований широко применялась при исследовании устойчивости по части переменных. Однако — обратим на это особое внимание — решения $x_1(t)$ и $\mu(t)$ системы (21) не только устойчивы, но и — как легко проверить — сохраняют устойчивость при вариациях любых пяти ненулевых коэффициентов системы (21). В то же время в исходной системе (19) устойчивость решения $x_1(t)$ исчезает при сколь угодно малых вариациях некоторых коэффициентов — например, коэффициента при x_2 во втором из уравнений (19). И этот пример не единичен — почти все примеры известных μ-преобразований, используемых при исследовании устойчивости по части переменных, относятся к системам, теряющим эту устойчивость при сколь угодно малых вариациях коэффициентов и параметров (поэтому такая устойчивость практического смысла не имеет, и в то же время исследование преобразованной системы не позволяет этого увидеть).

Изменения корректности решения после эквивалентных преобразований наблюдались и в задачах линейного программирования ([27], стр. 136—145) и также не получили объяснения.

Таким образом, в руках исследователей, фактически, уже находились примеры изменения свойства сохранения устойчивости при вариациях параметров (это свойство часто называют "параметрической устойчивостью") после эквивалентных преобразований уравнений. Но сущность этих примеров долго не понималась. Так, например, явления, происходящие с системами (19) и (21), даже в 1991 году в монографии [3] на стр. 79 объяснялись тем, что "свойство асимптотической устойчивости по отношению к части переменных обладает повышенной чувствительностью по отношению к вариациям коэффициентов".

На самом деле, разумеется, "повышенная чувствительность" тут ни при чем. В теории оптимального управления к 1991 году уже неоднократно обнаруживались примеры, когда параметрическая устойчивость по всем переменным (а не по части их) тоже исчезала после совершенно эквивалентных преобразований (см. [10]).

Перелом в понимании произошел в 1987 году, когда в монографии [10] был поставлен решающий вопрос: а какой, собственно, смысл заключен в утверждении, что решения некоторого уравнения, например, уравнения

$$\dot{x} + x = 0, \tag{22}$$

параметрически устойчивы или, что то же самое, сохраняют устойчивость при вариациях параметров?

Ведь, фактически, это не суждение о самом уравнении (22); это утверждение о свойствах его окрестности, а именно, утверждение о семействе уравнений

$$(1+\varepsilon_1)\dot{x} + (1+\varepsilon_2)x = 0, \tag{23}$$

где ε_1 и ε_2 малы в сравнении с единицей. Когда мы утверждаем: "решения уравнения (22) параметрически устойчивы", то это означает, что устойчивы решения всех уравнений, лежащих в его окрестности, т. е. устойчивы решения у всего семейства (23) при любых малых ε_1 и ε_2. Отсюда следовал важный вывод, опубликованный в [10]: эквивалентные преобразования, не меняющие решений самого уравнения, совсем не обязаны оставлять неизменными свойства окрестности уравнения (или системы уравнений), не обязаны сохранять неизменными свойства решений всего окружающего уравнение семейства — типа семейства (23).

Поэтому при эквивалентных преобразованиях свойство параметрической устойчивости может сохраняться, но может и не сохраняться. Этого не замечали так долго только потому, что при эквивалентных преобразованиях параметрическая устойчивость чаще всего сохраняется. Случаи несохранения параметрической устойчивости не многочисленны, но важны — поскольку неожиданная встреча с таким случаем может стать причиной ошибок в расчетах и тем самым оказаться причиной аварий и даже катастроф.

Это утверждение было подкреплено в [10] рядом примеров. Однако публикация монографии [10] не вызвала большого интереса и настороженности среди широких кругов инженеров и работников проектно-конструкторских организаций, занимающихся проектированием и расчетом систем управления, проверкой их устойчивости. Поскольку в монографии [10], согласно ее названию, шла речь об оптимальных системах, то ее читателям казалось, что неожиданные выводы о возможном изменении параметрической устойчивости после эквивалентных преобразований относятся лишь к сравнительно узкому и не всех интересующему классу оптимальных систем.

На самом деле это не так. Выводы о возможном изменении параметрической устойчивости после эквивалентных преобразований относятся к любым системам управления, и из этих выводов следует, что традиционные методы расчета устойчивости и параметрической устойчивости — не полны, не гарантируют достоверности расчета и могут быть причиной аварий и катастроф.

Вот один из примеров, приводившихся в работе [12], — система, состоящая из объекта управления:

$$(D^3 + 4D^2 + 5D + 2)x_1 = (D^2 + 2D + 1)u, \tag{24}$$

регулятора:

$$(D + 1)u = (D^2 + 4D + 5)x_1 \tag{25}$$

и описывающая переходные процессы в системе регулирования частоты вращения одного из электроприводов, имеет характеристический полином

$$\begin{aligned}\Delta = &\begin{vmatrix} \lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2; & -(\lambda^2 + 2\lambda + 1) \\ \lambda^2 + 4\lambda + 5; & -(\lambda + 1) \end{vmatrix} = \\ &= \lambda^3 + 5\lambda^2 + 7\lambda + 3 = (\lambda + 1)^2(\lambda + 3)\end{aligned} \tag{26}$$

с корнями $\lambda_1 = -3$; $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Все корни характеристического полинома отрицательны и лежат далеко от мнимой оси. Поэтому на основании традиционных методов расчета устойчивости и параметрической устойчивости, опирающихся на теорему о непрерывной зависимости корней полинома от его коэффициентов, неизбежно следует вывод: система устойчива и параметрически устойчива. На самом деле этот вывод ошибочен — система (24)—(25) теряет устойчивость при сколь угодно малых вариациях некоторых коэффициентов. Так, если коэффициент при D^2u в уравнении (24) равен не единице, а некоторому числу m, то характеристический полином системы принимает вид:

$$\begin{aligned}\Delta = &\begin{vmatrix} \lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2; & -(m\lambda^2 + 2\lambda + 1) \\ \lambda^2 + 4\lambda + 5; & -(\lambda + 1) \end{vmatrix} = \\ &= (m - 1)\lambda^4 + (4m - 3)\lambda^3 + 5m\lambda^2 + 7\lambda + 5.\end{aligned} \tag{27}$$

При $m = 1$ полином (27) совпадает, естественно, с полиномом (26). При $m = 1{,}001$ полином (27) принимает вид:

$$\Delta = 0{,}001\lambda^4 + 1{,}004\lambda^3 + 5{,}005\lambda^2 + 7\lambda + 5 \tag{28}$$

и является гурвицевым полиномом, замкнутая система устойчива. При $m = 0{,}999$ полином (27) равен:

$$\Delta = -0{,}001\lambda^4 + 0{,}996\lambda^3 + 4{,}995\lambda^2 + 7\lambda + 5$$

и уже не будет гурвицевым (нарушено необходимое условие Стодолы), замкнутая система неустойчива.

Вообще, если $m = 1 - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, то уже при сколь угодно малом ε устойчивость теряется — т. е. в системе (24)—(25) сколь угодно малое отличие некоторых коэффициентов от расчетных значений приводит к потере устойчивости, но любое исследование характеристического полинома (26) об этом ничего не скажет.

Систему (24)—(25) можно привести к нормальной форме Коши, например, введя новые переменные

$$\begin{aligned} x_2 &= \dot{x}_1 + 2x_1 - u; \\ x_3 &= \dot{x}_2. \end{aligned} \tag{29}$$

Относительно новых переменных уравнение (24) перейдет в систему трех уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 + u; \\ \dot{x}_2 = x_3; \\ \dot{x}_3 = -x_2 - 2x_3, \end{cases} \tag{30}$$

а уравнение (25) перейдет в уравнение нулевого порядка

$$u = -x_1 - 2x_2 - x_3. \tag{31}$$

Легко проверить, что решения $x_1(t)$ и $u(t)$ у систем (24)—(25) и (30)—(31) совпадают — функция

$$x_1(t) = c_1 e^{-3t} + (c_2 t + c_3) e^{-t} \tag{32}$$

является решением как системы (24)—(25), так и системы (30)—(31), что и показывает, что эти системы в отношении задачи о вычислении переменной $x_1(t)$ эквивалентны. В то же время система (30)—(31) не только устойчива, но и параметрически устойчива, т. е. сохраняет устойчивость при достаточно малых вариациях любых своих коэффициентов. Эквивалентные системы (24)—(25) и (30)—(31) различаются по свойству параметрической устойчивости.

Анализ этого и ему подобных примеров привел к выводам, опубликованным в [11] и [12]:

1. Никакое исследование характеристического полинома замкнутой системы не может всегда, во всех случаях дать правильное заключение о сохранении устойчивости при вариациях параметров.
2. Никакое исследование коэффициентов системы, приведенной к нормальной форме Коши, не может гарантировать правильного ответа на вопрос о сохранении устойчивости при вариациях параметров.

Немного позже было установлено (опубликовано в [15]), что и существование у исследуемой системы дифференциальных уравнений функции Ляпунова также не гарантирует сохранения устойчивости при сколь угодно малых вариациях параметров. Поэтому — хотя об этом очень долго никто не догадывался — существование у системы управления или у системы дифференциальных уравнений функции Ляпунова совсем не означает, что эта система устойчива с реальной, практической точки зрения. Поскольку малый дрейф параметров неизбежен, система формально устойчивая, но не обладающая параметрической устойчивостью, ничем не лучше системы неустойчивой.

3. Традиционные методы проверки устойчивости и ее сохранения при вариациях параметров не гарантируют правильности результатов расчета и должны быть дополнены.

Традиционные методы, издавна и повсеместно используемые в проектно-конструкторских организациях, заключаются в следующем: вычисляются характеристический полином замкнутой системы и его корни (обычно перед этим уравнения системы приводят к нормальной форме Коши для того, чтобы использовать стандартные программы вычисления на ЭВМ, составленные для нормальной формы записи уравнений).

Если все корни характеристического полинома лежат в левой полуплоскости комплексного переменного далеко от мнимой оси, то традиционно делался вывод о том, что система устойчива и сохранит устойчивость, во всяком случае, при малых вариациях коэффициентов и параметров, входящих в уравнения системы. Этот вывод основывался на теореме о непрерывной зависимости корней полинома от его коэффициентов, из которой следует, что если вариации коэффициентов полинома малы, то малы и вызванные ими перемещения корней на комплексной плоскости. Поэтому считалось, что корни, первоначально лежащие далеко от мнимой оси, не могут при малых изменениях коэффициентов переместиться из левой полуплоскости в правую, и система сохранит устойчивость при вариациях параметров. При этом не учитывались особые случаи, обнаруженные много позже [11, 12, 15].

Отметим, что после 1978 года оживились исследования в области сохранения устойчивости уже не только при малых вариациях коэффициентов характеристического полинома, но и при конечных, не обязательно малых, отклонениях коэффициентов от своих номинальных значений, что особенно важно для приложений.

Предположим, что некоторая система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами имеет характеристический полином

$$\Delta = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0, \tag{33}$$

но все его коэффициенты известны лишь с конечной точностью и находятся в интервалах

$$a_i - \Delta a_i \le a_i \le a_i + \Delta a_i, \tag{34}$$

где все $\Delta a_i > 0$. Как проверить, будет ли гурвицевым полином (33) при любых, не обязательно малых, изменениях своих n + 1 коэффициентов, очерченных неравенством (34)? До 1978 года считалось, что для этого нужно проверить выполнение условий Гурвица у 2^{n+1} полиномов, поскольку таково число возможных сочетаний положительных и отрицательных отклонений коэффициентов от своих номинальных значений.

В современных сложных системах управления число коэффициентов характеристического полинома может достигать и 20-ти, и 40-ка и проводить 2^{20}, а тем более 2^{40}, проверок крайне затруднительно.

В 1978 году молодой сотрудник кафедры В. И. Зубова факультета прикладной математики — процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета В. Л. Харитонов опубликовал статью [24], в которой показал, что число проверяемых полиномов может быть гораздо меньше. Работа Б. Л. Харитонова получила заслуженную известность и была подхвачена многими исследователями и в России, и за рубежом. Были опубликованы десятки работ, посвященных важной теме сохранения устойчивости при вариациях параметров.

Методика В. Л. Харитонова и его последователей сводила проблему проверки сохранения устойчивости к исследованию характеристического полинома, но в 1991—1994 годах было показано [11, 12], что никакое исследование характеристического полинома как такового, без дополнительных расчетов, без анализа преобразований исходной системы уравнений вообще не может гарантировать правильности заключений о сохранении устойчивости.

Этот вывод не сразу был признан. Статья [12] до своей публикации в 1994 году более трех лет рассматривалась в редколлегии журнала "Автоматика и телемеханика", неоднократно обсуждалась с автором и видными специалистами по теории управления. Только после публикации ее в наиболее авторитетном из российских журналов по управлению утвердилось признание научным сообществом недостаточности ранее применяемых традиционных методов проверки параметрической устойчивости, признание необходимости дополнительных проверок, описанных в [11, 12], а более подробно в [15].

Однако признание научным сообществом, кругом наиболее авторитетных специалистов по прикладной математике и теории управления еще не означает (хотя должно бы означать!) широкого признания, не означает массового практического применения результатов научного исследования.

Несмотря на то, что публикация основных результатов в журнале "Автоматика и телемеханика" относится к 1994 году [12], в XX веке использование дополнительных проверок, предложенных в [12], носило лишь единичный характер. Массового применения, широкого признания не было. Частично это, разумеется, связано с тем, что дополнительные проверки, предложенные в [12] и в [15], повышающие надежность расчетов, страхующие от аварий, требуют в то же время дополнительного труда, дополнительной работы. Поэтому не следовало ожидать, что в проектно-конструкторских организациях немедленно бросятся использовать дополнительные проверки. Их начнут делать тогда, когда будет широко признана их необходимость, когда будет повсеместно принято, что без таких проверок результаты расчетов заведомо недостоверны, и смысла не имеют.

Чисто логически это достаточно ясно — ведь если приведен хотя бы один пример того, что две системы с одним и тем же характеристическим полиномом, одной и той же матрицей коэффициентов при записи в нормальной форме Коши, одной и той же функцией Ляпунова могут в то же время коренным образом различаться по свойству параметрической устойчивости (а ведь такие примеры приводились уже в 1991—94 годах в публикациях [11, 12]), то отсюда уже впрямую вытекает, что традиционные методы, опирающиеся на исследование характеристического полинома или функции Ляпунова заведомо не полны, а, следовательно, и недостоверны. Логически ясно, что если мы хотим избежать аварий, возникающих при неверной оценке параметрической устойчивости проектируемых систем управления, то необходимо безотлагательно применить дополнительные проверки. Однако неопровержимость логического вывода еще не означает сколько-нибудь массового применения в проектно-конструкторских организациях столь важных дополнительных проверок. Как уже указывалось, массового применения в XX веке их так и не было.

Попробуем разобраться в причинах этого. Известно, что когда в 1960 году были опубликованы статьи А. М. Лётова об аналитическом конструировании регуляторов, о которых говорилось в *главе 13*, то уже через несколько лет предложенные А. М. Лётовым методы широко применялись. Точно так же, после публикации в 1961 году русских переводов работ Р. Каллмана по управляемости и наблюдаемости через 3—4 года большинство русских исследователей в области управления учли его результаты и использовали их. Чуть ли не большинство публикаций по управлению в те годы начиналось со слов "в настоящей статье рассматриваются системы управления, управляемые (или, реже, не управляемые. — *Ю. П.*) «по Калману»". Различие между теми и другими системами было быстро осознано. Таким образом, мы убеждаемся, что российское научное сообщество в те годы быстро реагировало на новые научные результаты и использовало их.

Почему этого нет сейчас? Причина частично заключается в уменьшении численности научных работников России (с 1989 по 2000 год она упала вдвое, и в еще большей степени сократилось число активно работающих), но главное — в очень резком уменьшении средств коммуникации между ними. Тиражи научных журналов упали катастрофически. Тираж журнала "Автоматика и телемеханика" в 1959 году составлял 8 тыс. экземпляров, в 1977 — 7 тыс., в 1994 — 523 экземпляра, в 2000 — 400. Тираж журнала Академии наук "Электричество": 1990 год — 5048 экз., 1997 — 1000 экз. Тираж журнала "Известия высших учебных заведений", серия "Электромеханика": 1973 — 3000 экз., 1996 — 273 экз. Все это — печальные факты недавней истории науки в целом и прикладной математики в частности (поскольку "Автоматику и телемеханику" вполне можно рассматривать как журнал, посвященный почти исключительно прикладной математике). А ведь для того, чтобы новый научный результат был подхвачен, он должен быть прочитан исследователем, который в год его публикации не поглощен полностью, до предела, своей собственной тематикой исследований, частично свободен и готов переключиться на новую перспективную проблематику. Таких исследователей немного. При тиражах научных журналов в 3—8 тыс. экземпляров подобные исследователи обязательно находились, и научные результаты подхватывались, а при тираже 300—500 экземпляров более вероятно, что "свободных" исследователей, прочитавших и готовых подхватить новый научный результат и заняться им, не найдется ни одного, что часто и происходит.

В результате научное открытие остается неиспользованным и не приносит той пользы, которую могло бы принести. По всей вероятности, существует некоторая "критическая масса" ученых, активно работающих в данной области, "критическая масса" тиражей научных журналов и книг. Если реальная "масса" меньше "критической" — наука замирает.

Научная жизнь России последних десяти лет дает достаточно материала для исследования не только поступательного развития науки, ее роста, накопления научных результатов и их практических приложений, но и для анализа кризисов в науке, ее поражений и временного отступления. Пусть все происшедшее будет хотя бы уроком на будущее.

Что касается конкретно публикаций [11, 12], то отклики на них все же были. Обсуждался вопрос: если традиционные методы проверки параметрической устойчивости, как выяснилось, действительно не полны, не надежны, не могут во всех случаях, включая особые, дать правильный ответ, то какие дополнительные расчеты могут обеспечить достоверность? Высказывались различные предложения, отраженные в статьях [4, 5, 18]. Дискуссии по данному вопросу еще далеко не закончены.

Надо еще отметить поразительное, граничащее с прямо преступным, бездействие в 1992—2000 годах государственных организаций, обязанных следить за безопасностью жителей России — таких организаций, как Гостехнадзор, Госатомнадзор, Госавианадзор и др. Работающие в этих организациях люди и их руководители получили предостережения о неполноте традиционных методов расчета, о необходимости ***потребовать*** от проектно-конструкторских организаций использования более совершенных методов, страхующих от аварий. Они читали и выслушивали эти предостережения, сочувственно кивали головами, вздыхали — и ничего, ничего не сделали.

Как известно, после 2003 года эти контролирующие организации, не выполнявшие порученного им дела, были расформированы, преобразованы в различные федеральные агентства по обеспечению безопасности. Будем ожидать, что новые организации будут более серьезно заботиться о безопасности, которая зависит не только от добросовестного обслуживания техники, но и от грамотного расчета и проектирования.

14.3. Расширение класса задач, промежуточных между корректными и некорректными

Первые примеры задач, промежуточных между корректными и некорректными, были обнаружены, как уже указывалось, в теории оптимального управления. Несколько позже подобные задачи обнаружились при решении систем однородных линейных алгебраических уравнений с параметрами и в обобщенной задаче вычисления собственных чисел матриц (впервые опубликовано в монографии [13]).

Системы линейных однородных уравнений с параметрами часто встречаются во многих приложениях — при решении линейных дифференциальных уравнений, при вычислении частот малых колебаний механических и электрических систем и во многих других практических задачах.

Пример — система уравнений

$$\begin{aligned} &(\lambda^2 - 2\lambda)x_1 + (1 - 3\lambda)x_2 = 0; \\ &-\lambda x_1 + a x_2 = 0 \end{aligned} \qquad (35)$$

является линейной однородной и поэтому, безусловно, имеет тривиальное нулевое решение: $x_1 = x_2 = 0$. Однако наибольший интерес имеет задача вычисления значений параметра λ, при которых система имеет еще и ненулевые решения. Эти значения параметра λ называются собственными значениями (или собственными числами) системы, и необходимость их вычисления возникает при решении многих важных практических задач. Исключая из (35), например, переменную x_1, получим для переменной x_2 уравнение:

$$\Delta(\lambda)x_2 = 0, \tag{36}$$

где полином Δ(λ) является определителем системы (35)

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda^2 - 2\lambda & 1 - 3\lambda \\ -\lambda & a \end{vmatrix} = (a-3)\lambda^2 + (2a-1)\lambda\,. \tag{37}$$

Такое же уравнение

$$\Delta(\lambda)x_1 = 0 \tag{38}$$

получается и после исключения из системы (35) переменной x_2. Понятно, что ненулевые решения системы (35) возможны в том и только в том случае, если определитель системы равен нулю. Приравнивая определитель нулю, получаем квадратное уравнение $(a-3)\lambda^2 + (2a-1)\lambda = 0$, из которого находим два собственных значения λ_1 и λ_2. Так, при $a = 1$ находим собственные значения $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = -0{,}5$, и задача их вычисления при $a \neq 3$ — корректна, поскольку при малых отклонениях любых коэффициентов, в том числе и коэффициента a от расчетных значений, и λ_1, и λ_2 изменяются мало. В то же время при $a = 3$ задача вычисления собственных значений для системы (35) становится некорректной: при $a = 3$ будет одно собственное значение $\lambda_1 = 0$. Если же $a = 3(1+\varepsilon)$, то $\lambda_1 = 0; \lambda_2 = 2 + \dfrac{5}{2\varepsilon}$ — т. е. уже при сколь угодно малых ε появляется второе собственное значение, которое существенно отличается от первого, не стремится к нему при $\varepsilon \to 0$ и исчезает только при точном равенстве $\varepsilon = 0$.

Теперь рассмотрим систему:

$$\begin{gathered} (1-\lambda)x_1 + x_2 + 2x_3 = 0; \\ x_1 + (1-\lambda)x_2 + 3x_3 = 0; \\ x_1 + x_2 = 0 \end{gathered} \tag{39}$$

и поставим ту же задачу вычисления собственных значений параметра λ. Вычисляя определитель системы (39)

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 2\\ 1 & 1-\lambda & 3\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

по правилу Саррюса или разложением по минорам последней строки, находим

$$\Delta(\lambda) = 5\lambda. \tag{40}$$

Приравнивая определитель нулю, находим единственное собственное значение $\lambda_1 = 0$. Нетрудно проверить, что поставленная задача корректна. Действительно, проварьировав все десять ненулевых коэффициентов системы (39) и вычисляя определитель:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}1+\varepsilon_1-(1+\varepsilon_2)\lambda & 1+\varepsilon_3 & 2(1+\varepsilon_4)\\ 1+\varepsilon_5 & 1+\varepsilon_6-(1+\varepsilon_7)\lambda & 3(1+\varepsilon_8)\\ 1+\varepsilon_9 & 1+\varepsilon_{10} & 0\end{vmatrix}$$

по правилу Саррюса или разложением по минорам последней строки, убедимся, что при малых ε_i единственное собственное значение изменится мало.

Однако вычисление определителя по правилу Саррюса или разложением по минорам реально выполнимо лишь для определителей невысокого порядка. Для тех систем однородных линейных уравнений большого порядка, с которыми приходится иметь дело на практике, чаще используют другой метод — предварительно исключают переменные одну за другой, например, с помощью домножений и сложений, что на ЭВМ выполняется быстро и легко, пока не придут к системе невысокого порядка.

Проиллюстрируем этот метод на примере системы (39). Домножим второе из уравнений (39) на $-(1-\lambda)$ и сложим с первым, а третье домножим на -1 и сложим со вторым. Переменная x_1 после этих домножений и сложений будет исключена, и мы придем к системе двух уравнений:

$$\begin{aligned}&\left(\lambda^2-2\lambda\right)x_2+\left(1-3\lambda\right)x_3=0;\\ &-\lambda x_2+3x_3=0.\end{aligned} \tag{41}$$

Система (41) имеет единственное собственное значение $\lambda_1 = 0$ — то же, что и у системы (39). Таким образом, по отношению к задаче о вычислении собственных значений параметра λ системы (39) и (41) эквивалентны, и преобразование системы (39) в систему (41) является эквивалентным преобразованием.

В то же время для системы (41) задача вычисления собственных значений — некорректна. Действительно, система (41) совпадает (с точностью до обозначений переменных) с системой (35), в которой $a = 3$. А для $a = 3$ некорректность задачи вычисления собственных значений уже была показана.

Этот пример и подобные ему другие примеры изменения корректности при эквивалентных преобразованиях, используемых в ходе решения задачи, были приведены в 1997 году во втором издании монографии [13], а также в [14, 15]. Там же было указано, что эти изменения корректности могут стать (и становятся!) еще одним серьезным источником ошибок в расчетах сверх уже известных источников ошибок. Конечно, если все коэффициенты уравнений являются небольшими целыми числами, то опасности нет. Однако в реальных системах все коэффициенты дробные, и поэтому при домножениях и сложениях неизбежно возникают ошибки округления. А в некорректных системах даже сколь угодно малая ошибка округления сразу приводит к грубой ошибке в результатах расчета.

Отметим, что процесс изменения корректности при вычислении собственных значений имеет совсем другую природу по сравнению с ранее рассмотренным примером системы (24)—(25), которая описывала опасный электропривод с нулевым запасом устойчивости. Эквивалентное преобразование системы (24)—(25) в систему (30)—(31), изменяя корректность, скрывает эту опасность, не позволяет вовремя, еще на стадии расчета, отбраковать опасную систему и избежать последующей почти неизбежной аварии.

Наоборот, задача вычисления собственных значений для системы (39) изначально корректна, и ее собственные числа можно вычислить вполне надежно, например, по правилу Саррюса. Однако эквивалентные преобразования, использованные при решении методом последовательного исключения переменных, изменяют корректность задачи, и теперь уже неизбежные сколь угодно малые погрешности округления сразу приводят в ошибочному ответу.

Для избежания ошибок в [12, 13, 14, 15] было предложено:

1. Внести уточнение в известное классическое понятие эквивалентных преобразований, а именно — ввести понятие "преобразований, эквивалентных в расширенном смысле", определив их как преобразования, которые:
   - во-первых, эквивалентны в классическом смысле, т. е. не изменяют решений преобразованной системы — согласно классическому определению: "Две системы называются эквивалентными (или равносильными), если они имеют одно и то же множество решений". (Математический энциклопедический словарь под редакцией Ю. В. Прохорова. — М., 1995. — с. 511);
   - во-вторых, не изменяют корректности решаемой задачи.

   Преобразования системы (39) в систему (41), системы (24)—(25) в систему (30)—(31) доставляют примеры преобразований, эквивалентных в классическом смысле, но не в расширенном. Эквивалентные преобразования, изменяющие параметрическую устойчивость систем управления, являются частным случаем преобразований, изменяющих корректность.

2. Объединить задачи, способные изменять свою корректность при эквивалентных (в классическом смысле) преобразованиях, используемых при их решении, в отдельный, третий класс — дополнительный к ранее известным классам корректных и некорректных задач (более подробно это было обосновано в работе [14]).
3. Начать изучение свойств преобразований, эквивалентных в расширенном смысле, и свойств задач, относящихся к третьему классу.

Третий пункт программы начал выполняться в [15]. Там описан метод "матриц степеней", который позволяет довольно просто установить, какие преобразования и для каких систем приводят к изменению корректности и какие — не приводят.

В частности, этот метод позволил установить различие между исключением переменных в классической проблеме вычисления собственных значений квадратной матрицы A и в обобщенной задаче о собственных значениях.

Как известно, классическая проблема вычисления собственных значений сводится к поиску значений параметра λ, при которых существуют ненулевые решения векторно-матричного уравнения

$$(A-\lambda E)x = 0, \tag{42}$$

где A — квадратная, размера $n \times n$ матрица; E — единичная матрица (т. е. матрица, у которой все элементы, кроме стоящих на главной диагонали, являются нулями, а на главной диагонали все элементы равны единице); x — n-мерный вектор.

Обобщенная проблема собственных значений сводится к той же задаче поиска значений λ, при которых существуют ненулевые решения уравнения

$$(A-\lambda\overline{E})x = 0, \tag{43}$$

где, в отличие от (42), $\overline{E}$ — не единичная, а квазиединичная матрица, т. е. матрица, у которой все элементы, кроме стоящих на главной диагонали, являются нулями, а на главной диагонали стоят $n-r$ единиц и r нулей. При $r = 0$ квазиединичная матрица переходит в единичную.

К уравнению (42) приводят, например, задачи о вычислении частот малых колебаний механических систем, описываемых уравнениями Лагранжа второго рода, задачи об устойчивости систем управления, описываемых дифференциальными уравнениями. К уравнению (43) приводят более сложные задачи о частотах малых колебаний механических и электрических систем, в которых учитываются голономные (не включающие производных) соотношения между переменными, об устойчивости систем управления, у которых в число уравнений входят уравнения без производных — типа уравнения (31) и т. п.

В работе [15] было показано, что при исключении переменных из уравнения (42), при сведении уравнения и соответствующего ему определителя к меньшему числу переменных, потери корректности не возникает, а при исключении переменных из системы (43) потеря корректности возможна. Это как раз и объясняет, почему ранее, в эпоху ручного счета, при вычислении собственных значений ошибок из-за изменения корректности не возникало: решение уравнения (43) при ручном счете начинали с уравнений, не содержащих λ, выражали с их помощью одни переменные через другие и приходили после этого к уравнению вида (42), уже с единичной матрицей E, но меньшего порядка, порядка $n - r$. При машинном счете важнее всего унификация, и машина исключает переменные в уравнении (43) в порядке их индексов, а при этом могут возникать неожиданные серьезные ошибки из-за изменения корректности.

Этот пример подчеркивает общее положение: при переходе к расчетам на быстродействующих вычислительных машинах необходима дополнительная проверка используемых математических методов. Если возможность изменения корректности решаемой задачи при эквивалентных в классическом смысле преобразованиях осознана, то избежать ошибок нетрудно. Главная опасность заключается в неожиданной для пользователя встрече с задачами третьего класса, в неожиданной встрече с изменениями корректности. Если пользователь знает о существовании задач третьего класса, то возможность возникновения ошибок в расчете резко уменьшается.

Любопытно отметить также, что новые стороны, новые возможности уточнения, выявились у такого, казалось бы, привычного и установившегося понятия, как эквивалентное преобразование. Действительно, эквивалентными преобразованиями пользовались много сотен лет; само слово "алгебра" происходит от арабских слов "аль-джебр", обозначающих одно из эквивалентных преобразований — перенос членов из левой части уравнения в правую или обратно с изменением знака. Употреблялась эта операция в книге арабского математика аль-Хорезми, жившего еще в первой половине X века. Окончательно сформировалась теория эквивалентных преобразований в XVIII веке — уже Леонард Эйлер широко пользовался таким преобразованием, как дифференцирование всех членов той или иной рассматриваемой системы. Правила эквивалентных (равносильных) преобразований в настоящее время изучаются в средней школе. И все же в этих привычных еще со школьной скамьи преобразованиях недавно выявились новые стороны. Оказалось, что эквивалентные в классическом смысле преобразования не всегда безобидны, что они могут изменять некоторые важные свойства преобразуемой системы, например, параметрическую устойчивость, и при решении ряда задач допустим лишь значительно более узкий класс преобразований — преобразования, эквивалентные в расширенном смысле.

Свойства таких преобразований, к сожалению, значительно сложней, чем у привычных и широко используемых преобразований, эквивалентных в классическом смысле.

После исследований, выполненных в СПбГУ, стало ясно, что к эквивалентным преобразованиям следует относиться осторожно. Если использованное преобразование оказалось эквивалентным в классическом смысле, но не в расширенном, то результат вычислений может оказаться ошибочным.

Поскольку в ходе исследований, выполнявшихся в СПбГУ, новые, ранее не замечаемые свойства обнаружились у такого фундаментального понятия математики, как эквивалентные преобразования, то можно было с самого начала ожидать, что в ближайшем будущем проявится необходимость уточнения многих положений в самых различных областях математики и ее приложений. Так и произошло.

1. Первоначально была обнаружена неполнота традиционных методов расчета устойчивости линейных и нелинейных систем. Традиционные методы — проверка знака вещественных частей корней характеристического полинома, построение функции Ляпунова — давали ошибочные результаты в тех случаях, когда используемые в ходе проверки преобразования оказывались эквивалентными в классическом смысле, но не в расширенном. Методы, восстанавливающие надежность расчетов устойчивости, были изложены в [15].

2. Далее было обнаружено, что многочисленные вычислительные алгоритмы, использующие цепочки эквивалентных преобразований — такие, как алгоритм Гаусса решения систем алгебраических уравнений, алгоритм вычисления собственных значений матриц и систем линейных однородных уравнений и т. п., — могут приводить к ошибочным решениям, если хотя бы одно из использованных преобразований оказалось эквивалентным в классическом, но не в расширенном смысле. Возможность ошибочных решений и ее причины были описаны в [13]. Детальное исследование, показывающее, что к ошибке может привести сколь угодно малая ошибка округления в вычислениях, было проведено Константином Геннадьевичем Чертковым (опубликовано в [25]).

3. Аналогичные явления были обнаружены в задачах линейного программирования. Они описаны в монографии [27]).

4. При исследовании интегральных уравнений и эквивалентных преобразований одних видов уравнений в другие (например, уравнения Вольтерры в уравнение Фредгольма) Валерий Сергеевич Сизиков обнаружил возможность изменения корректности и, как следствие, появление ошибочных решений. Его результаты были опубликованы в [16] (стр. 147—148 и далее).

5. Наиболее важные и интересные результаты были получены в области дифференциальных уравнений. Обнаружилось, что традиционные методы численного решения дифференциальных уравнений могут приводить к результатам, коренным образом расходящимся с реальным поведением исследуемого объекта, и поэтому требуют корректировки. Корректировки требуют и программы решения дифференциальных уравнений, входящие в популярные пакеты прикладных программ — такие, как MATLAB, Mathcad и др. Об этом — в *разд. 14.5*.

14.4. Новые результаты в проблеме непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметров

Поскольку все коэффициенты и параметры дифференциальных уравнений, описывающих реальные объекты, известны почти всегда с ограниченной точностью, то необходимым условием надежности всех расчетов, использующих дифференциальные уравнения, является непрерывная зависимость решений от параметров. Если непрерывной зависимости нет, то результаты расчета заведомо ненадежны, поскольку неизбежным сколь угодно малым погрешностям в задании коэффициентов и параметров могут в этом случае соответствовать большие изменения решений. Поэтому центральную роль в прикладной математике играет теорема о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметров. На ней основаны все приложения дифференциальных уравнений. Эта теорема доказана. Ее доказательства приводятся во всех подробных курсах дифференциальных уравнений, но все доказательства проводятся для систем дифференциальных уравнений, приведенных к нормальной форме Коши, т. е. к системе уравнений первого порядка (или для одного уравнения n-го порядка). Поскольку другие формы записи системы дифференциальных уравнений (системы, состоящие из уравнений различных порядков) могут быть сведены к нормальной форме путем эквивалентных преобразований, то теорему о непрерывной зависимости от параметров решений системы дифференциальных уравнений в нормальной форме обычно толкуют расширительно, полагая, что она обеспечивает хотя бы необходимые условия достоверности расчетов для любых систем уравнений.

На самом деле это не так, что доказывает уже рассмотренный ранее пример с системой (24)—(25), для которой зависимость решения от коэффициента при $D^2 u$ терпит разрыв. И пример этот не единичен (разнообразные примеры приведены в [15]), поскольку в процессе приведения системы дифференциальных уравнений к нормальной форме Коши с помощью эквивалентных преобразований, не изменяющих самих решений, такие свойства решений, как непрерывная зависимость от параметров, могут изменяться [15].

Если приходится решать систему

$$\begin{aligned} &\left(D^3+4D^2+5D+2\right)x_1=\left(mD^2+2D+1\right)x_2; \\ &\left(D+1\right)x_2=\left(D^2+4D+5\right)x_1 \end{aligned} \tag{44}$$

(которая при $m = 1$ переходит в систему (24)—(25)) для различных значений параметра m, то вблизи $m = 1$ результаты расчета недостоверны для любых значений времени t. Сколь угодно малые отклонения параметра m от значения $m = 1$ могут привести к большим изменениям решений. Задача нахождения решений системы (44) при $m = 1$ — некорректна[20].

Отметим, что второе из уравнений (44) относится к неканоническим уравнениям, поскольку в нем порядок производных в правой части выше, чем в левой. Подобные уравнения в последний раз рассматривались в учебнике В. А. Стеклова [22]. Потом ими перестали интересоваться, поскольку после приведения к нормальной форме Коши в правых частях уравнений вообще не остается производных. Поэтому нормальная форма Коши является канонической — независимо от того, была исходная система канонической или нет. Однако неканонические системы, во-первых, часто встречаются в приложениях, а во-вторых, среди них особенно часто встречаются отсутствие непрерывной зависимости решений от параметров.

14.5. Обнаружение ошибок в популярных пакетах прикладных программ (MATLAB, Mathcad и других). Методы исправления ошибок

Поскольку необходимость численного решения, численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений очень часто встречается в самых разнообразных приложениях, то численные методы были давно запрограммированы и вошли как важная составляющая часть в популярные пакеты прикладных программ — примерами могут служить пакеты MATLAB, Mathcad и многие другие.

В этих пакетах решение систем уравнений начиналось с приведения систем к нормальной форме Коши, к системе *n* уравнений первого порядка. Такое приведение к нормальной форме было, безусловно, целесообразным, поскольку позволяло охватить одной программой все огромное разнообразие различных систем уравнений. Если бы приведение к нормальной форме не делалось, то пришлось бы составлять очень большое число отдельных программ. Отдельная программа потребовалась бы, например, для решения системы, состоящей из уравнений четвертого и первого порядка, и отдельная — для системы, состоящей из уравнения второго порядка и уравнения третьего порядка. Разнообразие требующихся программ было бы очень велико, и поэтому унификация программного обеспечения, предварительное приведение интегрируемых численно систем к нормальной форме было решением совершенно правильным — тем более, что при составлении первых программ еще никто не догадывался, что приведение системы дифференциальных уравнений к нормальной форме Коши может быть преобразованием, эквивалентным в классическом смысле, но не в расширенном, может изменять корректность решаемой задачи и, в частности, — изменять свойство непрерывной зависимости решений от параметров.

Однако после того как в работах [10, 11, 12] были приведены примеры изменения корректности при эквивалентных преобразованиях, в популярные пакеты прикладных программ оказалось необходимым быстро ввести небольшие поправки. К сожалению, эти поправки не были своевременно внесены, хотя они совсем не сложны — программы численного интегрирования достаточно было дополнить небольшими программами выделения особых систем дифференциальных уравнений, не имеющих непрерывной зависимости решений от коэффициентов и параметров — примером особой системы является, например, система (24)—(25). Многочисленные примеры особых систем приведены также в монографии [15]. Без подобных поправок популярные пакеты прикладных программ могут выдавать пользователю ошибочные рекомендации при каждой встрече с особыми системами. А следствиями ошибочных решений, принятых на основе подобных рекомендаций, могут быть (и бывают!) — как уже говорилось — аварии и даже катастрофы. Примеры аварий и катастроф, причиной которых были ошибки в расчетах, приводились в монографии [15].

Методы исправления некоторых ошибочных рекомендаций, которые просочились в популярные пакеты прикладных программ и могут стать причинами аварий, изложены в [17] и [15]. Эти методы не требуют какого-либо коренного пересмотра пакетов и сводятся к добавке небольших вспомогательных программ, выявляющих особые системы и преобразования, эквивалентные в классическом смысле, но не в расширенном — последнее особенно важно для многочисленных алгоритмов, использующих цепочки эквивалентных преобразований.

14.6. Практические приложения

После того как в публикациях [11, 12] и ряде других была показана неполнота традиционных методов расчета параметрической устойчивости и продемонстрировано, что с помощью дополнительных, не очень сложных вычислений можно восстановить достоверность результатов расчета, естественно было ожидать быстрого использования этих рекомендаций. Это особенно важно потому, что ошибки в расчетах параметрической устойчивости гораздо опаснее, чем ошибки в расчете устойчивости. Если совершена ошибка в расчете, и неустойчивая система по расчету признана устойчивой, то ошибка сразу выявится на испытаниях. Если же сделана ошибка в расчете параметрической устойчивости, если запас устойчивости по изменениям параметра мал, а расчет говорит, что запас устойчивости достаточен, то на испытаниях это непосредственно не выявится (часто используемое "покачивание параметров" тоже, как показано в [15], не всегда помогает). Система может успешно пройти испытания, может даже неопределенно долгое время исправно работать в реальных условиях, а затем, при неизбежном в ходе эксплуатации малом "дрейфе" параметров, они могут "переползти" в опасный диапазон, и тогда — в совершенно непредвиденный момент времени — происходит внезапная потеря устойчивости, которая может перерасти в аварию и даже катастрофу.

В [15] были приведены примеры аварий и катастроф, произошедших из-за ошибок в расчете параметрической устойчивости. Поэтому можно было ожидать быстрого внедрения в практику проектно-конструкторских организаций дополнительных расчетов, рекомендованных в [12] и страхующих от аварий. Однако этого не произошло. Дело в том, что хотя теоретические основы дополнительных расчетов, страхующих от ошибок, были изложены в [10, 11 ,12], но их практическое применение требовало программного обеспечения, а проще — оплаты дополнительного труда программистов. Российские проектно-конструкторские организации, брошенные в новые и непривычные для них экономические условия, в 1994—2000 годах думали, в основном, лишь о своем выживании и не желали идти ни на какие дополнительные расходы. Лишь немногие проектно-конструкторские организации России к настоящему времени используют у себя дополнительные проверки, гарантирующие правильность расчетов параметрической устойчивости и учитывающие различие между преобразованиями, эквивалентными в классическом смысле и в расширенном. С течением времени таких организаций будет становиться больше, поскольку фирмы, использующие у себя дополнительные расчеты, рекомендованные в [12, 13, 15], могут с полным основанием утверждать, что их продукция более надежна, имеет меньшую вероятность аварий, чем продукция фирм-конкурентов.

Пока можно привести только отрицательные примеры. Так, в 1995—1999 годах производилась замена отслужившего свой срок вспомогательного оборудования на Ленинградской атомной электростанции (ЛАЭС). Заменялись насосы, электроприводы, шкафы управления и т. п. устройства, чей срок службы короче, чем у ядерных реакторов.

Поскольку ЛАЭС расположена всего в 70 километрах от многомиллионного города Санкт-Петербурга, то любая авария на ней особенно опасна, и Санкт-Петербургский государственный университет (СПбГУ) обратился в 1995 году к дирекции ЛАЭС и к администрации губернатора Санкт-Петербурга с предложением провести все дополнительные расчеты параметрической устойчивости вновь устанавливаемого оборудования для снижения вероятности аварий. Тогда для этого требовалась сумма, эквивалентная 20 тыс. долларов. Дирекция ЛАЭС и администрация губернатора ответили отказом. Этот отказ получил общественный резонанс. В газетах Санкт-Петербурга и газете партии "Зеленых" появились статьи, осуждающие отказ администрации губернатора принять необходимые меры для повышения безопасности ЛАЭС. Об этом стало известно шведам, которые всегда очень внимательно следят за обстановкой на ЛАЭС, расположенной в 600 км от их собственной столицы.

В 1996 году правительство России и администрация губернатора Санкт-Петербурга выступили с инициативой проведения в городе Олимпийских игр 2004 года. Швеция выставила в качестве города-кандидата свою столицу. Развернулась большая и дорогостоящая кампания по продвижению кандидатуры Санкт-Петербурга — потом было подсчитано, что на эту кампанию была истрачена из бюджета города сумма, эквивалентная 20 млн долларов. Санкт-Петербургский университет несколько раз предупреждал администрацию губернатора и правительство России о том, что отказ от конкретных предложений университета о повышении безопасности ЛАЭС будет использован (и, прежде всего, Швецией) для торпедирования кандидатуры Санкт-Петербурга. Эти предупреждения остались без ответа, и в результате в марте 1997 года на заседании Международного Олимпийского комитета в Лозанне кандидатура Санкт-Петербурга была отвергнута уже в первом туре голосования по мотиву "небезопасности города", а Стокгольм благополучно прошел на второй тур. 20 млн долларов, истраченных из бюджета Санкт-Петербурга, пропали зря — пропали, прежде всего, из-за нежелания учитывать предостережения и предложения Санкт-Петербургского государственного университета. Такова цена неуважения к науке.

Еще одно "применение" открытия, сделанного в СПбГУ, обнаружилось при защите диссертаций. Недоброжелатель диссертанта (или — что чаще — недоброжелатель его научного руководителя) задает на защите коварный вопрос: "Скажите, а Вы проверяли использованные Вами преобразования на эквивалентность в расширенном смысле?" Поскольку вряд ли можно найти диссертацию по естественным, техническим или экономическим наукам, в которой не использовались бы эквивалентные преобразования, то такой вопрос может быть задан почти на любой защите.

Реально такой вопрос задавался на нескольких защитах в Москве в 2000 году. Поскольку на необходимость проверки эквивалентности в расширенном смысле указывалось в общероссийских научных журналах несколько раз, начиная с 1991 года, то ответить на подобный вопрос (и заблаговременно провести необходимые проверки), казалось бы, совсем не трудно.

На самом деле на защитах в Москве выявилось, что диссертанты не были знакомы с литературой по данному вопросу (с научными коммуникациями в последнее десятилетие XX века, как мы уже отмечали, вообще сложилась весьма непростая ситуация). Поэтому диссертанты ответить ничего не могли, и тогда уже недоброжелателю не составляло труда доказать, что без проверки использованных преобразований результаты диссертанта недостоверны. Они могут быть либо верными, либо неверными (эксперимент может подтвердить лишь ограниченный круг результатов). А поскольку требование достоверности входит в число обязательных требований Высшей аттестационной комиссии к диссертациям, то по диссертациям, на защите которых всплыли вопросы о преобразованиях, эквивалентных в расширенном смысле, не было принято положительных решений.

Разумеется, все это совсем не те применения, которым можно радоваться...

Настоящими применениями открытий в области эквивалентных преобразований, сделанных в СПбГУ, должны были бы стать улучшение методов вычисления, уменьшение ошибок в расчетах, снижение вероятности аварий и катастроф. Эти применения запаздывают потому, что открытия, сделанные в СПбГУ, пришлись на самое тяжелое для российской науки время — на годы с 1990 по 2000. Однако время для настоящих применений, приносящих пользу людям, безусловно, придет.

14.7. Заключение

В проблеме обеспечения надежности расчетов при не идеально точных исходных данных можно выделить следующие этапы:

- ☐ в начале XX века Ж. Адамар открыл существование некорректных задач, в которых сколь угодно малым погрешностям исходных данных соответствуют большие расхождения в решениях. Такие задачи Адамар предлагал исключать из рассмотрения;
- ☐ начиная с 1963 года, академиком А. Н. Тихоновым и его последователями разрабатывается особый подход к некорректным задачам ("регуляризация"), позволивший решить ряд важных практических проблем;
- ☐ в Санкт-Петербургском государственном университете в 1987 году (публикация [10]) обнаруживается, что привычные и широко используемые эквивалентные (равносильные) преобразования уравнений, не меняя самих решений как таковых, могут изменять многие важные свойства решений (параметрическую устойчивость, корректность и др.);
- ☐ в 1998 году в СПбГУ обнаруживается существование целого класса задач (промежуточных между корректными и некорректными), меняющих корректность при эквивалентных преобразованиях, используемых при их решении. Результаты этих исследований были применены для выделения особых систем, решение которых традиционными методами ранее приводило к ошибкам в расчетах и к катастрофам и авариям. А корректировка методов и программ расчета позволяла устранить ошибки. Задачи, относящиеся к третьему классу, обнаружились при расчетах устойчивости, при численном решении дифференциальных уравнений, при вычислении собственных значений матриц, в линейном программировании, при решении интегральных уравнений (публикации [10—17, 25, 27]).

Поскольку открытия, сделанные в СПбГУ, относятся к таким широчайшим образом используемым операциям, как эквивалентные преобразования, они в дальнейшем окажут влияние и на другие разделы математики и компьютерных вычислений.

Трудные времена, которые переживала наука России в 1990—2000 годы, задержали широкое распространение и практическое использование результатов исследований, выполненных в СПбГУ.

Литература к главе 14

1. Полищук Е. М., Шапошникова Т. О. Адамар, биография. — Л.: Наука, 1990. — 254 с.
2. Андронов А. Л., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Наука. 1981. — 568 с. (повторение издания 1937 г.).
3. Воротников В. И. Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. — М.: Наука, 1991. — 284 с.
4. Гайдук А. Р. К исследованию устойчивости линейных систем // Автоматика и телемеханика, 1997, № 3, с. 153—160.
5. Гайдук А. Р. Синтез систем управления при слабо обусловленной полноте объектов // Автоматика и телемеханика, 1997, № 4, с. 133—144.
6. Зубов В. И. Математические методы исследования систем автоматического управления. — Л.: Машиностроение, 1974. — 335 с.
7. Математическая энциклопедия. Том 4, с. 800. — М.: Советская энциклопедия, 1984.
8. Надеждин П. В. О потере грубости при элементарных преобразованиях дифференциальных уравнений управляемых систем // Автоматика и телемеханика, 1973, № 1, с. 185—187,
9. Петров Ю. П. Вариационные методы теории оптимального управления. 2-е изд. — Л.: Энергия, 1977. — 280 с.
10. Петров Ю. П. Синтез оптимальных систем управления при не полностью известных возмущающих силах. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1987. — 289 с.
11. Петров Ю. П. О скрытых опасностях, содержащихся в традиционных методах проверки устойчивости // Известия ВУЗ, Электромеханика, 1991, № 11, с. 106—108.
12. Петров Ю. П. Устойчивость линейных систем при вариациях параметров // Автоматика и телемеханика, 1994, № 11, с. 186—189.
13. Петров Ю. П., Червяков В. В. Системы стабилизации буровых судов. 2-е изд, доп. — СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1997. — 261 с.
14. Петров Ю. П. Третий класс задач физики и техники — промежуточных между корректными и некорректными. — СПб., 1998. — 29 с.
15. Петров Ю. П., Петров Л. Ю. Неожиданное в математике и его связь с авариями и катастрофами последних лет. — СПб., 1999; 2-е изд., доп. —

СПб., 2000. — 120 с.; 4-е изд., доп. — СПб.: "БХВ-Петербург", 2005. — 224 с.

16. Петров Ю. П., Сизиков В. С. Корректные, некорректные и промежуточные задачи с приложениями. Учебное пособие для вузов. — СПб.: Политехника, 2003. — 261 с.
17. Петров Ю. П. Новые главы теории управления и компьютерных вычислений. — СПб.: БХВ-Петербург, 2004. — 192 с.
18. Подчукаев В. А. К проблеме грубости. Межвузовский сборник. — Саратов, 1998. — с. 206—221.
19. Поляк Б. Т., Цыпкин Я. З. Частотные критерии робастной устойчивости и апериодичности линейных систем // Автоматика и телемеханика, 1990, № 9.
20. Розенвассер Е. Н., Юсупов Р. М. Чувствительность систем управления. — М.: Наука, 1981. — 464 с.
21. Сергеев В. О. Некорректно поставленные задачи и методы их решения. — СПб., 1999. — 43 с.
22. Стеклов В. А. Основы теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.; Л.: ГИЗ, 1927.
23. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1986. — 285 с.
24. Харитонов В. Л. Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства линейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения, 1978, № 11, с. 2086—2088.
25. Чертков К. Г. Исследование чувствительности к погрешностям округления собственных значений линейных систем. — Тула: Известия Тульского государственного университета, 2002. — с. 138—140.

В дополнение к обширной библиографии по некорректным задачам, приведенной в [23], добавим еще несколько работ, опубликованных после 1985 года:

26. Вайникко Г. М., Веретенников А. Ю. Итерационные процедуры в некорректных задачах. — М.: Наука, 1986.
27. Васильев Ф. П., Иваницкий А. Ю. Линейное программирование. — М.: Факториал, 1988.
28. Васин В. В., Агеев А. Л. Некорректные задачи с априорной информацией. — Екатеринбург: Уральская издательская фирма "Наука", 1993.

29. Морозов В. А., Иваницкий А. Ю. Регуляризация задач алгебры и анализа. — М.: Изд-во Московского университета, 1987.

30. Тихонов А. Н., Леонов А. С., Ягола А. Г. Нелинейные некорректные задачи. — М.: Наука, Физматгиз, 1995.

Примечания

1. К стр. 14. Любопытно отметить, что в журнале "Наука и жизнь" за 1997 год было помещено предложенное академиком Николаем Антоновичем Доллежалем (1899—2000) геометрическое построение, которое, по мнению его автора, реализует деление на три равные части произвольного угла с помощью только циркуля и линейки.
2. К стр. 31. В начале известной повести Н. В. Гоголя "Вий" дано очень живое и красочное описание жизни учащихся аналога средневековых университетов — Киевской Академии (семинарии). От обычных университетов она отличалась тем, что старший факультет был один — богословский (факультетов права и медицины не было), но грамматике, риторике и, как и в "больших" университетах, философии учащихся обучали. Как пишет Гоголь: "Грамматики были еще очень малы; идя, толкали друг друга и бранились между собою самым тоненьким дискантом; они были почти все в изодранных и запачканных платьях, и карманы их вечно наполнены всякой дрянью, как-то: бабками, свистелками, сделанными из перышек, недоеденным пирогом… Риторы шли солиднее: платья у них часто были совершенно целы, …говорили и божились между собою тенором. Философы целою октавою брали ниже; в карманах их, кроме крепких табачных корешков, ничего не было. Запасов они не делали никаких и все, что попадалось, съедали тут же…"

   Частенько в классах устраивали бои: "Грамматики начинали прежде всех, и как только вмешивались риторы, они уже бежали прочь и становились на возвышениях наблюдать битву. Потом вступала философия с черными длинными усами, а под конец и богословия в ужасных шароварах и с претолстыми шеями. Обыкновенно кончалось тем, что богословия побивала всех, и философия, почесывая бока, была теснима в класс и помещалась отдыхать на скамьях. Профессор, входящий в класс и участвовавший когда-то сам в подобных боях, по разгоревшимся лицам своих слушателей узнавал, что бой был недурен…

   …Весь этот ученый народ был чрезвычайно беден на средства к прокормлению и притом необыкновенно прожорлив…" Далее в повести описывается, с какими приключениями встретились во время своих студенческих каникул приятели: богослов Халява, ритор Тиберий Горобец и главный герой повести Гоголя — философ Хома Брут. В целом в первой части повести дана очень живая и яркая картина жизни провинциального студенчества XVII века.

3. К стр. 39. Отметим, что такой авторитетный немецкий математик, как Феликс Клейн (1849—1925) считал, что и в работах по чистой математике следует придерживаться "стиля Декарта". В своей очень хорошо написанной книге "Элементарная математика с точки зрения высшей", которая только в переводе на русский язык выдержала четыре издания (последнее — в 1987 году), он писал (стр. 124—125 издания 1987 года): "Уместно будет сказать несколько слов о стиле математического изложения. У Евклида вы все найдете расчлененным по схеме «предположение, утверждение, доказательство», к которой он еще присоединяет «определение» (ограничение области, внутри которой действительны рассуждения); в широких кругах вы можете встретить мнение, что вся математика всегда движется по такой схеме в четыре такта". А между тем у французов, рассказывает Ф. Клейн, давно выработалась "новая, художественная форма математического изложения, которую можно назвать искусно расчлененной дедукцией. Сочинения Монжа или «Курс анализа» Пикара читаются как хорошо написанный увлекательный роман". Таким образом, Ф. Клейн (как ранее Декарт) считал, что Евклид в своем ответе царю Птолемею был неправ, в математике вполне может существовать "царская дорога" без излишних препятствий, и изучение математических трудов может быть приятным и увлекательным делом, если только автор позаботился об этом.

4. К стр. 42. О произношений имен и фамилий. Есть языки, в которых ударение жестко закреплено. Так, во французском языке оно падает всегда на последний слог: Дека́рт, Ферма́, Паска́ль. В чешском, словацком, венгерском — на первый слог: Сто́дола, Бо́яи. В польском — на предпоследний: Ба́нах. В немецком, английском, итальянском (как и в русском) таких жестких правил для ударения нет, и для проверки правильности произношения полезно заглянуть в превосходный "Математический энциклопедический словарь". — М.: Изд-во "Большая российская энциклопедия", 1995 г.

5. К стр. 51. Нельзя не упомянуть, что в математической литературе иногда отказываются причислять Эйлера к русским (российским) ученым, называя его "Петербургским академиком". Отметим, что еще в первые годы своей работы в России, Эйлер освоил русский язык, на котором и говорил, и писал. Большинство его научных работ написано на латинском языке, поскольку латынь была тогда международным языком науки, но Эйлер принимал самое активное участие в обучении и воспитании русских студентов

и молодых ученых, вырастил способных учеников, выполнял многочисленные поручения русского правительства, был активным участником научной жизни России. Сыновья и внуки Эйлера остались жить в России. Праправнуки Эйлера (сохранившие его фамилию) и в XX веке жили в Петербурге. Так, Александр Александрович Эйлер работал преподавателем в Ленинградском институте инженеров железнодорожного транспорта и, читая высшую математику, рассказывал студентам теоремы своего великого прапрадеда. Поэтому мне кажется, что Л. Эйлера надо без всяких оговорок отнести к великим русским (российским) ученым.

6. К стр. 62. Один из современников Лобачевского рассказывает в своих воспоминаниях, как молодой студент Лобачевский на спор с товарищами проехал однажды верхом на корове, держась за рога, перед зданием университета. Этот проступок также обсуждался на Совете университета и с трудом был замят. Хотя этот рассказ не подтверждается другими мемуарами и, по всей вероятности, является легендой, но и существование подобных легенд по-своему примечательно.

7. К стр. 79. От Коши идет обозначение оператора дифференцирования через букву D: $Dx = \frac{dx}{dt}$. Ранее Ньютон предложил отмечать производные точкой: $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, а Лагранж — черточкой: $x' = \frac{dx}{dt}$.

8. К стр. 93. Фамилию Чебышёв обязательно следует произносить с ударением на последнем слоге — об этом не раз упоминает сам Чебышёв.

9. К стр. 102. Заметим, что это положение отнюдь не является очевидным: такой яркий представитель университетской математики, как Карл Якоби (1804—1851) — мы говорили о нем подробно в *главе 12*, посвященной вариационному исчислению, — считал, например, что "единственная цель науки — это служить доблести человеческого ума", и что с этой точки зрения изучение теории чисел не менее важно, чем изучение дисциплин, раскрывающих нам картину мира.

10. К стр. 115. Использование вычислительных машин при доказательствах математических теорем (а к этому, несомненно, в дальнейшем будут прибегать все чаще и чаще) заставляет по-новому взглянуть на старую проблему — можно ли в математике полагаться на авторитет, а не на личное понимание?

    Часто на лекциях рассказывают следующую историю: когда еще в XVII веке маркиз де Лопиталь (кстати, автор первого печатного учебника по дифференциальному исчислению) объяснял трудное доказательство одной из теорем своему ученику — молодому дворянину, то, потеряв однажды нить рассуждения, маркиз в сердцах сказал ученику: "Доказательства я никак не вспомню, но, честное слово, теорема верна". На это ученик радостно ответил: "Так что же Вы мне сразу не сказали! Зачем длинные рассуждения? Ведь Вы дали слово дворянина — что может быть надежнее!"

Обычно история эта на лекциях приводилась как отрицательный пример — ученик Лопиталя (как и любой, изучающий математику) не должен полагаться на "слово дворянина" и доверять верности теоремы до тех пор, пока он сам не прочувствует и не поймет все этапы доказательства. Но как быть с доказательством, выполненным быстродействующей вычислительной машиной? Не придется ли, все же, положиться на "честное слово" хорошей вычислительной машины? Эти вопросы, наверное, скоро встанут на повестку дня.

11. К стр. 118. Присутствовавший на докладе академик В. И. Арнольд писал потом в своих заметках о Всемирном математическом конгрессе, что из двух тысяч делегатов, аплодировавших Э. Уайлсу, вряд ли набралось и десять человек, которые изучили его доказательство (занимающее, как уже говорилось, 150 страниц текста) или же поняли это доказательство, прослушав двухчасовой доклад. Но тут был важен спортивный успех — теорема, которая не поддавалась 350 лет, наконец, пала — и все дружно аплодировали.

12. К стр. 120. А. Н. Крылов писал эти строки в 1935 году. С тех пор маятник качнулся в сторону чрезмерной, "неразумной" строгости — как, наверное, определил бы ее А. Н. Крылов. Нельзя также пройти мимо интересных высказываний о математическом образовании во второй половине XX века одного из наиболее авторитетных современных российских математиков — академика РАН (и почетного члена многих иностранных академий) Владимира Игоревича Арнольда (род. в 1937 г.). Он не удовлетворен господствующим среди математиков второй половины XX века стилем изложения и приводит наглядный пример — там, где великий Пуанкаре (1854—1912) сказал бы: "Прямая делит плоскость на две полуплоскости" теперь пишут: "Множество классов эквивалентности дополнения $R^2 \backslash R^1$ к прямой R^1 на плоскости R^2, определяемых следующим отношением эквивалентности: две точки A, $B \in R^2 \backslash R^1$ считаются эквивалентными, если соединяющий их отрезок AB не пересекает прямую R^1, состоит из двух элементов" (цитирую по книге: Арнольд В. И. Теория катастроф. — М.: Наука, 1990. — с. 94).

В. И. Арнольд считает, что подобный стиль изложения и преподавания математики, изгоняющий из нее наглядность, интуицию, отрицающий неразрывную связь между математикой и физикой, является очень вредным и опасным, прежде всего, для самой математики, а также и для науки в целом, поскольку порождает в обществе отвращение к математике и способствует наблюдающемуся сейчас "взрывному росту всевозможных псевдонаук (вроде астрологии)". "К несчастью, я не могу отрицать виновности математического сообщества в современном неприятии математики общественным сознанием" (цитирую по статье В. И. Арнольда "Антинаучная революция и математика", Вестник Российской академии наук, том 69, № 6, 1999 г.).

Особенно интересно объяснение этих явлений, которое дает И. Арнольд: он опирается на не так давно открытое различие функций левого и правого полушарий головного мозга: левое отвечает за логическое мышление, правое — за обобщение, интуицию, целостное восприятие мира. У нормального человека полушария одинаково развиты и помогают друг другу, но есть небольшая группа людей, у которых правое полушарие по каким-либо причинам не развито, не работает, но зато (в виде компенсации) гипертрофированно работает левое. Такие люди ("левополушарники") обладают изумительными логическими способностями, зато почти все остальное им недоступно. В. И. Арнольд считает, что исключительная сложность задач, до которых дошла математика в XX веке, сложность и громоздкость используемых доказательств, занимающих иной раз сотни страниц — все это привело к тому, что такие сложнейшие задачи оказались посильными в основном лишь для "левополушарников". В результате "левополушарники" стали выдвигаться в современной математике на первые места, стали определять собой ее характер и стиль. В дальнейшем "левополушарники" стали продвигать близких себе по духу людей на преподавательские должности. В результате и в преподавании стал преобладать схоластический "левополушарный" стиль. В. И. Арнольд считает распространение "левополушарного" стиля вредным, поскольку он чужд, тяжел и труден для подавляющего большинства людей. Привыкнуть, конечно, можно ко всему, и студенты привыкают, но в целом, считает В. И. Арнольд, "левополушарные больные" сумели "вырастить целые поколения математиков, которые не понимают никакого другого подхода к математике и способны лишь учить таким же образом следующие поколения", а "законной реакцией" на это является "отвращение, которое распространяется на всю математику и может убить ее целиком" (цитирую по уже упомянутой статье в "Вестнике РАН").

Разумеется, эти высказывания являются мнением В. И. Арнольда, а не "истиной в последней инстанции". Но мнение столь авторитетного математика, как академик В. И. Арнольд, во всяком случае, должно быть выслушано.

13. К стр. 126. Отметим, что именно большей простотой математической модели по сравнению с реальным явлением объясняется та, якобы, "непостижимая" эффективность математики, о которой говорится в программах кандидатского экзамена. На самом деле все очень постижимо — если построена хорошая математическая модель, правильно отражающая основные черты исследуемого явления или процесса, то это означает, что основная часть исследования уже выполнена и осталась меньшая, более легкая часть — исследование модели. Только потому, что главная, наиболее трудная часть исследования (построение хорошей математической модели) чаще всего остается "за кадром", некоторые исследователи приписывают математике "непостижимую эффективность". На самом же деле выбрать хорошую математическую модель очень трудно (точнее — именно в ее выборе и заключена главная трудность). В физике удалось построить хорошие модели и достичь успеха, а в биологии и, особенно, в гуманитарных науках, до этого еще далеко.

14. К стр. 142. Таким образом, большинство современных математиков откладывает объяснение накопившихся в математике противоречий "на потом". Но из этого следует, что они не могут претендовать на строгость своих доказательств и на безусловную истинность доказываемых ими теорем. Любой "интуиционист" или "конструкционист" имеет полное право подвергнуть сомнению их результаты, и спасает "традиционных" математиков только то, что "интуиционисты" и "конструкционисты" пока не являются большинством.

15. К стр. 143. Хороший пример к тому, о чем говорилось в ***примечании 12***. В.А. Успенского спасло то, что в составе комиссии ВАК, рассматривающей отзыв "черного оппонента", "интуиционисты" были в меньшинстве.

    Рассматривая историю споров между "интуиционистами" и математиками, не разделяющими их подхода, можно заметить следующее:

    - в первые десятилетия XX века по отношению к абстракции актуальной бесконечности большинство ведущих математиков (Ж. Адамар, Р. Бэр, А. Лебег, Лузин Н. Н.) занимали осторожные позиции. Так, например, Н. Н. Лузин считал, что "понятие несчетной бесконечности является чисто отрицательным понятием, не имеющим никакой объективной реальности, оно вызвано лишь человеческой способностью создавать доказательства "от противного" и ничему реальному не соответствует";
    - затем, после 1939 года, наибольшее влияние получила группа французских математиков, выступивших под общим псевдонимом Н. Бурбаки. Она стремилась к построению всей математики на основе теории

множеств, причем допускались любые мощности, принималась без ограничений "аксиома Цермело" со всеми ее парадоксальными следствиями (включая и парадокс о возможности построения из одной сферы двух равных ей). Вопрос о том, приложима ли построенная таким образом математика к познанию реального мира, Н. Бурбаки, похоже, не интересовал. Потом "мода" на "бурбакизацию" математики постепенно прошла;

- в последние десятилетия XX века интерес к интуицизму и конструктивизму возродился в связи с развитием в математике вычислительной тенденции и широчайшим применением вычислительных машин в самых различных областях жизни общества. Возникли различные программы конструктивной перестройки математики. Получили развитие конструктивная логика, конструктивная теория функций, конструктивный (или вычислимый) анализ — см. соответствующие статьи в "Математическом энциклопедическом словаре" издания 1995 года (Научное издательство "Большая российская энциклопедия", Москва).

16. К стр. 208. Глава, посвященная информатике, была уже набрана, когда пришло известие о том, что в 2005 году оборвалась долгая и плодотворная жизнь академика Владимира Александровича Котельникова. Он родился в 1908 году в Казани в семье профессора Казанского университета, математика А. П. Котельникова. Окончив в 1931 году Московский энергетический институт, он уже в 1933 году стал автором интереснейшей статьи "О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи", в которой была впервые сформулирована знаменитая "теорема Котельникова" о представлении непрерывной функции с ограниченным спектром (в частности, радиосигнала) в виде сумм дискретных отсчетов. Чем меньше наибольшая из частот радиосигнала, тем меньшим числом дискретных отсчетов можно его заменить, и тем меньше информации несет в себе радиосигнал.

    Значение статьи В. А. Котельникова было понято не сразу, но впоследствии она стала — по выражению академика Ю. А. Гуляева — "одним из краеугольных камней информатики".

    В дальнейшем В. А. Котельников разработал теорию потенциальной помехоустойчивости, которая позволила выявить предельные возможности приема сигналов при наличии шумов. Эта теория была изложена в наиболее известной книге В. А. Котельникова — "Теория потенциальной помехоустойчивости", изданной в 1956 году.

Особо отметим, что В. А. Котельников не ограничивался только теоретическими исследованиями. Результаты его теоретических разработок воплощались — под его руководством — в реально работающие системы радиосвязи и радиолокации. В 1954 году В. А. Котельников стал директором только что тогда созданного Института радиотехники и электроники Академии наук СССР, где под его руководством проводилось — не говоря уже о решении проблем радиосвязи на Земле — например, радиолокационное исследование планет Солнечной системы, а в 1984 году была создана радиолокационная карта Венеры с пространственным разрешением порядка 1 км.

Кроме всего, В. А. Котельников был одним из тех ученых, которые сочетали научные исследования с общественной и государственной работой. С 1969 года он почти 20 лет был вице-президентом Академии наук СССР, в течение шести лет занимал пост председателя Верховного Совета РСФСР.

17. К стр. 242. Заметим, что наука как таковая началась именно с сомнения. Как уже говорилось в *главе 1*, на протяжении тысяч лет египетские и вавилонские писцы переписывали готовые рецепты решений, полученные когда-то их прадедами.

    Но вот пришел Фалес Милетский (640—548 гг. до н. э.) и стал сомневаться в вещах самых очевидных, например, в том, что вертикальные углы равны. Хотя всем остальным грекам это казалось ясным "как божий день", Фалес утверждал, что и это, вроде бы, несомненное положение тоже нужно доказывать. С доказательств Фалеса и началась наука.

    Еще через полтора века Зенон Элейский (490—430 гг. до н. э.) пошел в сомнениях еще дальше — он усомнился даже в том, что Ахиллес догонит черепаху. Нет, он усомнился не в самом факте, а в возможности его непротиворечивого объяснения, не нарушающего старых аксиом — и снова казавшиеся чрезмерными сомнения Зенона позволили потом прорваться в противоречивый мир бесконечного, в познание законов, царящих там. Всегда будет плодотворен старый девиз: "Подвергай все сомнению!"

18. К стр. 340. Обобщенная δ-функция Дирака, оказавшая столь большую помощь в решении задач отыскания гарантирующего управления, имела интересную историю. Она была введена выдающимся английским физиком Дираком (Dirac A. M., 1902—1984) в 1929 году для решения задач квантовой механики и определялась следующим образом:

    1. Для всех $x \neq a$ будет $\delta(x) = 0$.

2. Для $x = a$ функция $\delta(x)$ не имеет конечного значения, условно принимают, что $\delta(a) = \infty$.

3. Интеграл от δ-функции равен единице, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1. \tag{1}$$

Условия 1—3 были совершенно необычными для современной Дираку математики и воспринимались с недоверием. Однако Дирак показал, что δ-функцию можно понимать как предел многих обычных непрерывных функций. Так, например, для функции

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\frac{n}{n^2 + x^2} \tag{2}$$

равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1 \tag{3}$$

будет выполняться для любых n. Если $n \to \infty$, то при всех $x \neq 0$ будет $\varphi(x) \to 0$, а для $x = 0$ будет $\varphi(x) \to \infty$. Таким образом, при $n \to \infty$ простая непрерывная функция (2) переходит в δ-функцию Дирака. И то же самое справедливо для многих других непрерывных функций.

Но главное, конечно, заключалось в том, что δ-функция Дирака помогала в решении многих важных задач, среди которых задача о гарантирующем управлении является только одним из примеров, возможно, не самым важным.

Появление δ-функции, которая потом (после 1929 года) стала играть важную роль в математике, подтверждает то, о чем уже говорилось ранее — именно приложения играют важнейшую роль в развитии математики, в появлении все новых и новых ее разделов.

Отметим, что несмотря на большую пользу, которую приносила δ-функция в решении практических задач, математики долгое время относились к ней с недоверием (поскольку очень уж непохожей была δ-функция Дирака на функции, привычные математикам). Это недоверие не удавалось преодолеть до тех пор, пока для δ-функции не было предложено новое название, которое сразу ввело δ-функцию в круг привычных для математиков объектов. Действительно, из пунктов 1—3 определения Дирака следовало, что для любой непрерывной функции $f(x)$ справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a). \tag{4}$$

Таким образом, δ-функция Дирака ставит в соответствие каждой функции $f(x)$ число — значение функции $f(x)$ при $x = a$. Следовательно, δ-функцию Дирака можно назвать (и считать) функционалом, и в качестве ее определения использовать именно равенство (4). Если это сделать, то пункты 1—3 определения Дирака станут уже следствиями.

После того как δ-функцию определили по-новому, как функционал, недоверие математиков исчезло и началось исследование и практическое применение не только самой δ-функции Дирака, но и многих похожих на нее объектов, которые стали называть "обобщенными функциями". Теория обобщенных функций, которые исследовали, в частности, С. Л. Соболев (р. 1908), И. М. Гельфанд (род. в 1913 г.), Лоран Шварц (Schwartz L., род. в 1915 г.), стала одним из наиболее быстро развивающихся направлений в математике.

Наиболее просто и доходчиво о δ-функциях Дирака и, особенно, об их приложениях, об использовании этих функций для решения целого ряда практических задач рассказано в превосходной книге: Зельдович Я. Б., Яглом И. М. Высшая математика для начинающих физиков и техников. — М.: Наука, 1982. — 510 с.

19. К стр. 350. Таким образом, многочисленные примеры аварий, порожденных неполнотой методов расчета, наблюдались еще в 60-х годах XX века. Именно эти многочисленные аварии привели к тому, что от "аналитического конструирования" оптимальных регуляторов в его первоначальном варианте, предложенном А. М. Лётовым, быстро отказались. Однако глубокие причины аварий тогда, в 60-х годах XX века, еще не были вскрыты, и поэтому аварии (хотя и много реже) продолжали повторяться. Причинами аварий долго считали недостатки методики аналитического конструирования. Эту методику удалось усовершенствовать, и после усовершенствования "аналитическое конструирование" уже не приводило к авариям и успешно использовалось. Но сам источник аварий не был перекрыт. Ведь аварии возникали не потому, что "аналитическое конструирование" было принципиально плохим методом. Просто при эквивалентных преобразованиях, широко использовавшихся в первоначальных вариантах "аналитического конструирования", особенно часто происходило изменение такого свойства решений, как параметрическая устойчивость, почему и

возникали столь частые аварии, подорвавшие тогда доверие к оптимальному управлению. При усовершенствовании методики "аналитического конструирования" этих (и только этих) массовых аварий удалось избежать. Однако эквивалентные преобразования продолжали, разумеется, использоваться, и поэтому аварии, связанные с недостаточным пониманием сущности вычислительных методов и эквивалентных преобразований, продолжали время от времени повторяться. Истинные причины таких аварий были вскрыты много позже, в ходе исследований, выполненных в Санкт-Петербургском государственном университете.

20. К стр. 392. Любопытно отметить, что во всех известных автору доказательствах теоремы о непрерывной зависимости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений от параметров нигде не сказано прямо: "Доказательство проведено для систем уравнений в нормальной форме Коши, но поскольку почти любую систему дифференциальных уравнений можно привести к нормальной форме путем эквивалентных преобразований, то из этого следует — у любых систем уравнений, которые можно привести к нормальной форме, решения тоже будут зависеть от параметров непрерывно". Такой формулировки нет. Но в то же время нет и формулировки: "Для некоторых систем дифференциальных уравнений, систем не в нормальной форме Коши теорема может быть не верна". Фактически читатели учебников и студенты, слушающие лекции, основанные на этих учебниках, первую формулировку домысливают. И студенты, и лекторы твердо и неуклонно уверены, что у всех систем дифференциальных уравнений, правые части которых удовлетворяют условиям Липшица, и уж во всяком случае у всех тех систем, которые можно привести к нормальной форме, решения, несомненно, зависят от параметров непрерывно. Они твердо уверены в этом, хотя подобной формулировки в учебниках нет.

    Почему нет? Тут можно высказать только догадки. Возможно, что очень хорошо знающие математику авторы учебников хотели и пытались доказать теорему о непрерывной зависимости решений от параметров для *всех* систем дифференциальных уравнений, а не только для систем в нормальной форме. Доказательство у них не получалось (а сейчас мы знаем, что доказательство и не могло получиться, ибо для *всех* без исключений систем дифференциальных уравнений теорема не верна).

    Но когда писались учебники, это еще не было известно их авторам. Оставалась возможной альтернатива: либо теорема будет доказана, либо будет доказано, что она не верна. Поэтому авторы учебников избрали осторожный вариант: они дали доказательство для систем в нормальной форме, зная, что читатели и студенты домыслят верность теоремы для всех систем. Дальше уже шли беспроигрышные варианты — если теорема о непрерывной зависимости решений от параметров будет доказана для *всех* систем, то все в порядке: домысливание окажется правильным. Если же теорема будет опровергнута, то автор чист: в его учебнике ничего неверного не сказано, для систем в нормальной форме все доказано, а если читатели "домыслили" верность теоремы для всех систем, то за это "домысливание" автор учебника не отвечает.

Разумеется, все это только догадка, но, возможно, она представит интерес для вдумчивых читателей.

Приложение

Программы кандидатских экзаменов "История и философия науки" ("Философия науки")

Утверждены Приказом Министерства образования Российской Федерации № 697 от 17.02.2004.

Предисловие

Настоящие программы кандидатских экзаменов по философской части общенаучной дисциплины "История и философия науки" подготовлены специалистами ведущих университетских и академических научных центров. Они прошли этапы рассмотрения в профильных учебно-методических объединениях (УМО) и коррекции их содержания экспертными советами Высшей аттестационной комиссии в соответствии с замечаниями и пожеланиями, высказанными при их обсуждении в УМО. Программы были одобрены президиумом Высшей аттестационной комиссии Минобразования России и утверждены приказом.

Данные программы представляют собой общую для всех научных специальностей базовую часть кандидатского экзамена по указанной дисциплине, обязательный для каждого соискателя ученой степени кандидата наук единый минимум требований к уровню знаний в философии избранной научной области.

Для подготовки к экзамену соискатель использует часть I "Общие проблемы философии науки" данной программы, а также один из разделов части II "Современные философские проблемы областей научного знания", который соответствует области его научных исследований.

Порядок организации приема кандидатских экзаменов определяется соответствующими нормативными документами Минобразования России.

Программа-минимум кандидатского экзамена по философии науки

I. Общие проблемы философии науки

Введение

Настоящая программа философской части кандидатского экзамена по курсу "История и философия науки" предназначена для аспирантов и соискателей ученых степеней всех научных специальностей. Она представляет собой введение в общую проблематику философии науки. Наука рассматривается в широком социокультурном контексте и в ее историческом развитии. Особое внимание уделяется проблемам кризиса современной техногенной цивилизации и глобальным тенденциям смены научной картины мира, типов научной рациональности, системам ценностей, на которые ориентируются ученые. Программа ориентирована на анализ основных мировоззренческих и методологических проблем, возникающих в науке на современном этапе ее развития, и получение представления о тенденциях исторического развития науки.

Программа разработана Институтом философии РАН при участии ведущих специалистов из МГУ им. М. В. Ломоносова, СПбГУ и ряда других университетов. Программа одобрена экспертным советом по философии, социологии и культурологии Высшей аттестационной комиссии.

1. Предмет и основные концепции современной философии науки

Три аспекта бытия науки: наука как познавательная деятельность, как социальный институт, как особая сфера культуры. Современная философия науки как изучение общих закономерностей научного познания в его историческом развитии и изменяющемся социокультурном контексте.

Эволюция подходов к анализу науки.

Логико-эпистемологический подход к исследованию науки. Позитивистская традиция в философии науки. Расширение поля философской проблематики в постпозитивистской философии науки. Концепции К. Поппера, И. Лакатоса, Т. Куна, П. Фейерабенда, М. Полани.

Социологический и культурологический подходы к исследованию развития науки. Проблема интернализма и экстернализма в понимании механизмов научной деятельности.

2. Наука в культуре современной цивилизации

Традиционалистский и техногенный типы цивилизационного развития и их базисные ценности. Ценность научной рациональности.

Особенности научного познания. Наука и философия. Наука и искусство. Наука и обыденное познание. Роль науки в современном образовании и формировании личности. Функции науки в жизни общества (наука как мировоззрение, как производительная и социальная сила).

3. Возникновение науки и основные стадии ее исторической эволюции

Преднаука и наука в собственном смысле слова. Две стратегии порождения знаний: обобщение практического опыта и конструирование теоретических моделей, обеспечивающих выход за рамки наличных исторически сложившихся форм производства и обыденного опыта.

Культура античного полиса и становление первых форм теоретической науки. Античная логика и математика. Развитие логических норм научного мышления и организаций науки в средневековых университетах. Роль христианской теологии в изменении созерцательной позиции ученого: человек — творец с маленькой буквы; манипуляция с природными объектами — алхимия, астрология, магия. Западная и восточная средневековая наука.

Становление опытной науки в новоевропейской культуре. Формирование идеалов математизированного и опытного знания: оксфордская школа, Р. Бэкон, У. Оккам. Предпосылки возникновения экспериментального метода и его соединения с математическим описанием природы: Г. Галилей, Ф. Бэкон, Р. Декарт. Мировоззренческая роль науки в новоевропейской культуре. Социокультурные предпосылки возникновения экспериментального метода и его соединения с математическим описанием.

Формирование науки как профессиональной деятельности. Возникновение дисциплинарно организованной науки. Технологические применения науки. Формирование технических наук.

Становление социальных и гуманитарных наук. Мировоззренческие основания социально-исторического исследования.

4. Структура научного знания

Научное знание как сложная развивающаяся система. Многообразие типов научного знания. Эмпирический и теоретический уровни, критерии их различения. Особенности эмпирического и теоретического языка науки.

Структура эмпирического знания. Эксперимент и наблюдение. Случайные и систематические наблюдения. Применение естественных объектов в функции приборов в систематическом наблюдении. Данные наблюдения как тип эмпирического знания. Эмпирические зависимости и эмпирические факты. Процедуры формирования факта. Проблема теоретической нагруженности факта.

Структура теоретического знания. Первичные теоретические модели и законы. Развитая теория. Теоретические модели как элемент внутренней организации теории. Ограниченность гипотетико-дедуктивной концепции теоретических знаний. Роль конструктивных методов в дедуктивном развертывании теории. Развертывание теории как процесс решения задач. Парадигмальные образцы решения задач в составе теории. Проблемы генезиса образцов. Математизация теоретического знания. Виды интерпретации математического аппарата теории.

Основания науки. Структура оснований. Идеалы и нормы исследования и их социокультурная размерность. Система идеалов и норм как схема метода.

Научная картина мира. Исторические формы научной картины мира. Функции научной картины мира (картина мира как онтология, как форма систематизации знания, как исследовательская программа).

Операциональные основания научной картины мира. Отношение онтологических постулатов науки к мировоззренческим доминантам культуры.

Философские основания науки. Роль философских идей и принципов в обосновании научного знания. Философские идеи как эвристика научного поиска.

Философское обоснование как условие включения научных знаний в культуру. Логика и методология науки. Методы научного познания и их классификация.

5. Динамика науки как процесс порождения нового знания

Историческая изменчивость механизмов порождения научного знания. Взаимодействие оснований науки и опыта как начальный этап становления новой дисциплины. Проблема классификации. Обратное воздействие эмпирических фактов на основания науки.

Формирование первичных теоретических моделей и законов. Роль аналогий в теоретическом поиске. Процедуры обоснования теоретических знаний. Взаимосвязь логики открытия и логики обоснования. Механизмы развития научных понятий.

Становление развитой научной теории. Классический и неклассический варианты формирования теории. Генезис образцов решения задач.

Проблемные ситуации в науке. Перерастание частных задач в проблемы. Развитие оснований науки под влиянием новых теорий.

Проблема включения новых теоретических представлений в культуру.

6. Научные традиции и научные революции. Типы научной рациональности

Взаимодействие традиций и возникновение нового знания. Научные революции как перестройка оснований науки. Проблемы типологии научных революций. Внутридисциплинарные механизмы научных революций. Междисциплинарные взаимодействия и "парадигмальные прививки" как фактор революционных преобразований в науке. Социокультурные предпосылки глобальных научных революций. Перестройка оснований науки и изменение смыслов мировоззренческих универсалий культуры. Прогностическая роль философского знания. Философия как генерация категориальных структур, необходимых для освоения новых типов культуры.

Научные революции как точки бифуркации в развитии знания. Нелинейность роста знаний. Селективная роль культурных традиций в выборе стратегий научного развития. Проблема потенциально возможных историй науки.

Глобальные революции и типы научной рациональности. Историческая смена типов научной рациональности: классическая, неклассическая, постнеклассическая.

7. Особенности современного этапа развития науки. Перспективы научно-технического прогресса

Главные характеристики современной, постнеклассической науки. Современные процессы дифференциации и интеграции наук. Связь дисциплинарных и проблемно-ориентированных исследований. Освоение саморазвивающихся "синергетических" систем и новые стратегии научного поиска. Роль нелинейной динамики и синергетики в развитии современных представлений об исторически развивающихся системах. Глобальный эволюционизм как синтез эволюционного и системного подходов. Глобальный эволюционизм и современная научная картина мира. Сближение идеалов естественно-научного и социально-гуманитарного познания. Осмысление связей социальных и внутринаучных ценностей как условие современного развития науки. Включение социальных ценностей в процесс выбора стратегий исследовательской деятельности. Расширение этоса науки. Новые этические проблемы науки в конце XX столетия. Проблема гуманитарного контроля в науке и высоких технологиях. Экологическая и социально-гуманитарная экспертиза научно-технических проектов. Кризис идеала ценностно-нейтрального исследования и проблема идеологизированной науки.

Экологическая этика и ее философские основания. Философия русского космизма и учение В. И. Вернадского о биосфере, техносфере и ноосфере. Проблемы экологической этики в современной западной философии (Б. Калликот, О. Леопольд, Р. Аттфильд).

Постнеклассическая наука и изменение мировоззренческих установок техногенной цивилизации. Сциентизм и антисциентизм. Наука и паранаука. Поиск нового типа цивилизационного развития и новые функции науки в культуре. Научная рациональность и проблема диалога культур. Роль науки в преодолении современных глобальных кризисов.

8. Наука как социальный институт

Различные подходы к определению социального института науки. Историческое развитие институциональных форм научной деятельности. Научные сообщества и их исторические типы (республика ученых XVII в.; научные сообщества эпохи дисциплинарно организованной науки; формирование междисциплинарных сообществ науки XX столетия). Научные школы. Подготовка научных кадров. Историческое развитие способов трансляции научных знаний (от рукописных изданий до современного компьютера). Компьютеризация науки и ее социальные последствия. Наука и экономика. Наука и власть. Проблема секретности и закрытости научных исследований.

Рекомендуемая основная литература

1. Вебер М. Избранные произведения. — М., 1990.
2. Вернадский В. И. Размышления натуралиста. Научная мысль как планетарное явление. — М., 1978.
3. Глобальные проблемы и общечеловеческие ценности. — М., 1990.
4. Койре А. Очерки истории философской мысли. О влиянии философских концепций на развитие научных теорий. — М., 1985.
5. Кун Т. Структура научных революций. — М., 2001.
6. Малкей М. Наука и социология знания. — М., 1983.
7. Никифоров А. Л. Философия науки: история и методология. — М., 1998.

8. Огурцов А. П. Дисциплинарная структура науки. — М., 1988.
9. Поппер К. Логика и рост научного знания. — М., 1983.
10. Степин В. С. Философия науки. Общие проблемы. — М., 2004.
11. Традиции и революции в развитии науки. — М., 1991.
12. Философия и методология науки / Под ред. В. И. Купцова. — М., 1996.

Дополнительная литература

1. Гайденко П. П. Эволюция понятия науки (XVII—XVIII вв.). — М., 1987.
2. Зотов А. Ф. Современная западная философия. — М., 2001.
3. Кезин А. В. Наука в зеркале философии. — М., 1990.
4. Келле В. Ж. Наука как компонент социальной системы. — М., 1988.
5. Косарева Л. Л. Социокультурный генезис науки: философский аспект проблемы. — М., 1989.
6. Лекторский В. А. Эпистемология классическая и неклассическая. — М., 2000.
7. Мамчур Е. А. Проблемы социокультурной детерминации научного знания. — М., 1987.
8. Моисеев Н. Н. Современный рационализм. — М., 1995.
9. Наука в культуре. — М., 1998.
10. Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. — М., 1986.
11. Принципы историографии естествознания. XX век / Отв. ред. И. С. Тимофеев. — М., 2001.
12. Разум и экзистенция / Под ред. И. Т. Касавина и В. Н. Поруса. — СПб., 1999.
13. Современная философия науки: Хрестоматия / Сост. А. А. Печенкин. — М., 2000.
14. Степин В. С. Теоретическое знание. Структура, историческая эволюция. — М., 2000.
15. Степин В. С., Горохов В. Г., Розов М. А. Философия науки и техники. — М., 1991.
16. Фейерабенд П. Избранные труды по методологии науки. — М., 1986.
17. Философия / Под ред. В. Д. Губина, Т. Ю. Сидориной. — М., 2004.
18. Хюбнер К. Истина мифа. — М., 1996.

II. Современные философские проблемы областей научного знания

1. Философские проблемы математики

Введение

Настоящая программа философской части кандидатского экзамена по курсу "История и философия науки" предназначена для аспирантов и соискателей ученых степеней *всех научных специальностей, относящихся к блоку математических наук*. Программа ориентирована на анализ основных мировоззренческих и методологических проблем, возникающих в науке на современном этапе ее развития, и получение представления о тенденциях исторического развития данной отрасли. Программа разработана Институтом философии РАН при участии ведущих специалистов из МГУ им. М. В. Ломоносова, СПбГУ, ИИЕиТ и ряда других университетов. Программа одобрена экспертным советом по философии, социологии и культурологии Высшей аттестационной комиссии.

1.1. Образ математики как науки: философский аспект. Проблемы, предмет, метод и функции философии и методологии математики

Математика и естествознание. Математика как язык науки. Математика как система моделей. Математика и техника. Различие взглядов на математику философов и ученых (И. Кант, О. Конт, А. Пуанкаре, А. Эйнштейн, Н. Н. Лузин).

Математика как феномен человеческой культуры. Математика и философия. Математика и религия. Математика и искусство.

Взгляды на предмет математики. Синтаксический, семантический и прагматический аспекты в истолковании предмета математики. Особенности образования и функционирования математических абстракций. Отношение математики к действительности. Абстракции и идеальные объекты в математике.

Нормы и идеалы математической деятельности. Специфика методов математики. Доказательство — фундаментальная характеристика математического познания. Понятие аксиоматического построения теории. Основные типы аксиоматик (содержательная, полуформальная и формальная). Логика как метод математики и как математическая теория. Современные представления о соотношении индукции и дедукции в математике. Аналогия как общий метод развития математической теории. Обобщение и абстрагирование как методы развития математической теории. Место интуиции и воображения в математике. Современные представления о психологии и логике математического открытия. Мысленный эксперимент в математике. Доказательство с помощью компьютера.

Структура математического знания. Основные математические дисциплины. Историческое развитие логической структуры математики. Аксиоматический метод и классификация математического знания. Групповая классификация геометрических теорий (программа Ф. Клейна).

Философия математики, ее возникновение и этапы эволюции. Основные проблемы философии и методологии математики: установление сущности математики, ее предмета и методов, места математики в науке и культуре. Фундаменталистская и нефундаменталистская (социокультурная) философия математики. Философия математики как раздел философии.

Разделение истории математики и философии математики: соотношение фактической и логической истории, классификации фактов и их анализа.

Методология математики, ее возникновение и эволюция. Методы методологии математики (рефлексивный, проективный, нормативный). Внутренние и внешние функции методологии математики, ее прогностические ориентации.

1.2. Философские проблемы возникновения и исторической эволюции математики в культурном контексте

Причины и истоки возникновения математических знаний. Практические, религиозные основания первоначальных математических представлений.

Математика в догреческих цивилизациях. Догматическое (рецептурное) изложение результатов в математических текстах Древнего Востока. Проблема влияния египетской и вавилонской математики на математику Древней Греции.

Рождение математики как теоретической науки в Древней Греции. Пифагорейцы. Открытие несоизмеримости. Геометрическая алгебра и ее обоснование. Апории Зенона. Атомизм Демокрита и инфинитезимальные процедуры в Античности. Место математики в философии Платона.

Математика эпохи эллинизма. Синтез греческих и древневосточных социокультурных и научных традиций. Аксиоматическое построение математики в "Началах" Евклида и его философские предпосылки. Проблема актуальной бесконечности в античной математике. Место математики в философской концепции Аристотеля. Ценностные иерархии объектов, средств решения задач и классификация кривых в античной геометрии. "Арифметика" Диофанта и элементы возврата к вавилонской традиции.

Математика в древней и средневековой Индии. Отрицательные и иррациональные числа. Ритуальная геометрия трактата "Шулва-Сутра". Озарение как способ обоснования математических результатов. Математика и астрономия.

Математика в древнем и средневековом Китае. Средневековая математика Арабского Востока. "Арабские" цифры как источник новых математических знаний. Выделение алгебры в самостоятельную науку. Философия геометрии в связи с попытками доказать пятый постулат Евклида. Математика и астрономия. Математика в средневековой Европе. Практически ориентированные геометрические и тригонометрические сведения у Л. Пизанского (Фибоначчи). Развитие античных натурфилософских идей и математика. Схоластические теории изменения величин как предвосхищение инфинитезимальных методов Нового времени. Дискуссии по проблемам бесконечного и непрерывного в математике.

Математика в эпоху Возрождения. Проблема решения алгебраических уравнений 3-й и 4-й степеней как основание возникновения новых представлений о математических величинах. Алгебра Ф. Виета. Проблема перспективы в живописи и математика. "Философская теория" мнимых и комплексных чисел в "Алгебре" Р. Бомбелли.

Математика и научно-техническая революция начала Нового времени.

Проблема бесконечности. Философский контекст аналитической геометрии. Достижения в области алгебры и их естественно-научное значение. Первые теоретико-вероятностные представления. "Вероятностная" гносеология в трудах философов Нового времени и проблема создания вероятностной логики (Лейбниц). Философский контекст открытия И. Ньютоном и Г. Лейбницем дифференциального и интегрального исчисления. Проблема логического обоснования алгоритмов дифференциального и интегрального исчисления. Критика Беркли и Ньютвентвейта. Нестандартный анализ А. Робинсона (1961) и новый взгляд на историю возникновения и первоначального развития анализа бесконечно малых.

Развитие математического анализа в XVIII в. Проблема оснований анализа. Философские идеи Б. Больцано в области теории функций. К. Вейерштрасс и арифметизация анализа. Теория и философия действительного числа.

Эволюция геометрии в XIX в. и ее философское значение — открытие гиперболической геометрии и ее обоснования, интерпретации неевклидовой геометрии. "Эрлангенская программа" Ф. Клейна как новый взгляд на структуру геометрии. П.-С. Лаплас, его философские взгляды на сущность вероятности и становление теории вероятностей как точной науки.

Теория множеств как основание математики: Г. Кантор и создание "наивной" теории множеств. Открытие парадоксов теории множеств и их философское значение. Математическая логика как инструмент обоснования математики и как основание математики. Взгляды Г. Фреге на природу математического мышления. Программа логической унификации математики.

"Основания геометрии" Д. Гильберта и становление геометрии как формальной аксиоматической дисциплины.

Философские проблемы теории вероятностей в конце XIX — середине XX в.

1.3. Закономерности развития математики

Внутренние и внешние факторы развития математической теории. Апология "чистой" математики (Г. Харди). Б. Гессен о социальных корнях механики Ньютона. Национальные математические школы и особенности национальных математических традиций (Л. Бибербах). Математика как совокупность "культурных элементов" (Р. Уайлдер). Концепция Ф. Китчера: эволюция математики как переход от исходной (примитивной) математической практики к последующим. Эстафеты в математике (М. Розов).

Концепция научных революций Т. Куна и проблемы ее применения к анализу развития математики. Характеристики преемственности математического знания. Д. Даубен, Е. Копнельман, М. Кроу, Р. Уайлдер о специфике революций в математике. Математические парадигмы и их отличие от естественнонаучных парадигм. Классификация революций в математике.

Фальсификационизм К. Поппера и концепция научных исследовательских программ И. Лакатоса. Возможности применения концепции научных исследовательских программ к изучению развития математики. Проблема существования потенциальных фальсификаторов в математике.

1.4. Философские концепции математики

Пифагореизм как первая философия математики. Число как причина вещей, как основа вещей и как способ их понимания. Числовой мистицизм. Влияние на пифагорейскую идеологию открытия несоизмеримых величин и парадоксов Зенона. Пифагореизм в сочинениях Платона. Критика пифагореизма Аристотелем.

Эмпирическая концепция математических понятий у Аристотеля. Первичность вещей перед числами. Объяснение строгости математического мышления. Обоснование эмпирического взгляда на математику у Бекона и Ньютона. Математический эмпиризм XVII—XIX вв. Эмпиризм в философии математики XIX столетия (Дж. Ст. Милль, Г. Гельмгольц, М. Паш). Современные концепции эмпиризма: натурализм Н. Гудмена, эмпирицизм И. Лакатоса, натурализм Ф. Китчера. Недостатки эмпирического обоснования математики.

Философские предпосылки априоризма. Установки априоризма. Умозрительный характер математических истин. Априоризм Лейбница.

Обоснование аналитичности математики у Лейбница. Понимание математики как априорного синтетического знания у Канта. Неевклидовы геометрии и философия математики Канта. Гуссерлевский вариант априоризма. Проблемы феноменологического обоснования математики.

Истоки формалистского понимания математического существования. Идеи Г. Кантора о соотношении имманентной и транзиентной истины. Формалистское понимание существования (А. Пуанкаре и Д. Гильберт).

Современные концепции математики. Эмпирическая философия математики. Критика евклидианской установки и идеи абсолютного обоснования математики в работах И. Лакатоса. Априористские идеи в современной философии и методологии математики. Программа Н. Бурбаки и концепция математического структурализма. Математический платонизм. Реализм как тезис об онтологической основе математики. Радикальный реализм К. Геделя. Реализм и проблема неиндуктивистского обоснования теории множеств. Физикализм. Социологические и социокультурные концепции природы математики.

1.5. Философия и проблема обоснования математики

Проблема обоснования математического знания на различных стадиях его развития. Геометрическое обоснование алгебры в Античности. Проблема обоснования математического анализа в XVIII в. Поиски единой основы математики в рамках аксиоматического метода. Открытие парадоксов и становление современной проблемы обоснования математики.

Логицистская установка Г. Фреге. Критика психологизма и кантовского интуиционизма в понимании числа. Трудности концепции Г. Фреге. Представление математики на основе теории типов и логики отношений (Б. Рассел и А. Уайтхед). Результаты К. Геделя и А. Тарского. Методологические изъяны и основные достижения логицистского анализа математики.

Идеи Л. Брауэра по логицистскому обоснованию математики. Праинтуиция как исходная база математического мышления. Проблема существования. Учение Л. Брауэра о конструкции как о единственно законном способе оправдания математического существования. Брауэровская критика закона исключенного третьего. Недостаточность интуиционизма как программы обоснования математики. Следствия интуиционизма для современной математики и методологии математики.

Гильбертовская схема абсолютного обоснования математических теорий на основе финитной и содержательной метатеории. Понятие финитизма. Выход за пределы финитизма в теоретико-множественных и семантических доказательствах непротиворечивости арифметики (Г. Генцен, П. Новиков, Н. Нагорный). Теоремы К. Геделя и программа Д. Гильберта: современные дискуссии.

1.6. Философско-методологические и исторические проблемы математизации

Прикладная математика. Логика и особенности приложений математики. Математика как язык науки. Уровни математизации знания: количественная обработка экспериментальных данных, построение математических моделей индивидуальных явлений и процессов, создание математизированных теорий.

Специфика приложения математики в различных областях знания. Новые возможности применения математики, предлагаемые теорией категорий, теорией катастроф, теорией фракталов и др. Проблема поиска адекватного математического аппарата для создания новых приложений.

Математическая гипотеза как метод развития физического знания. Математическое предвосхищение. "Непостижимая эффективность" математики в физике: проблема рационального объяснения. Этапы математизации в физике. Неклассическая фаза (теория относительности, квантовая механика). Проблема единственности физической теории, связанная с богатыми возможностями выбора подходящих математических конструкций. Постклассическая фаза (аксиоматические и конструктивные теории поля и др.). Перспективы математизации нефизических областей естествознания. Границы, трудности и перспективы математизации гуманитарного знания. Вычислительное, концептуальное и метафорическое применения математики. Границы применимости вероятностно-статистических методов в научном познании.

Математическое моделирование: предпосылки, этапы построения модели, выбор критериев адекватности, проблема интерпретации. Сравнительный анализ математического моделирования в различных областях знания. Математическое моделирование в экологии: историко-методологический анализ. Применение математики в финансовой сфере: история, результаты и перспективы. Математические методы и модели и их применение в процессе принятия решений при управлении сложными социально-экономическими системами: возможности, перспективы и ограничения. ЭВМ и математическое моделирование.

Рекомендуемая основная литература

1. Антология философии математики / Отв. ред. и сост. А. Г. Барабашев и М. И. Панов. — М., 2002.
2. Беляев Е. А., Перминов В. Я. Философские и методологические проблемы математики. — М., 1981.
3. Бесконечность в математике: философские и методологические аспекты / Под ред. А. Г. Барабашева. — М., 1997.
4. Блехман И. И., Мышкис А. Д., Пановко Н. Г. Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов. — Киев, 1976.
5. Закономерности развития современной математики. Методологические аспекты / Отв. ред. М. И. Панов. — М., 1987.
6. Клайн М. Математика. Утрата определенности. — М., 1984.
7. Математика и опыт / Под ред. А. Г. Барабашева. — М., 2002.
8. Перминов В. Я. Философия и основания математики. — М., 2002.
9. Пуанкаре А. О науке. — М., 1990.
10. Стили в математике. Социокультурная философия математики / Под ред. А. Г. Барабашева. — СПб., 1999.

Литература

Книги по истории математики и вычислительной техники

1. Булгаков И. С. Счетные машины. — Машгиз, 1950.
2. Бурбаки Н. Очерки по истории математики. — М.: Издательство иностранной литературы, 1963.
3. Выгодский М. Я. Арифметика и алгебра в древнем мире. — М.; Л.: ОГИЗ, ГИТТЛ, 1941. — 252 с.
4. Гнеденко Б. В. Очерки по истории математики в России. — М.; Л.: ОГИЗ, ГИТТЛ, 1946. — 247 с.
5. Гутер Р. С., Полунов Ю. Л. От абака до компьютера. — М.: Знание, 1981. — 207 с.
6. История математики с древнейших времен до восемнадцатого века. Сборник, в 3-х т. — М.: Наука, 1970—72.
7. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в девятнадцатом столетии. — М.: Наука, 1989. — 454 с.
8. Колмогоров А. Н. Математика в ее историческом развитии. — М.: Наука, 1991. — 223 с.
9. Марков С. Н. Курс истории математики. — Изд-во Иркутского университета, 1995. — 247 с.
10. Математика XIX века. Серия книг под редакцией А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича. Первая книга вышла в 1978 г. — М.: Наука.
11. Мейер-Цур Капелин. Математические инструменты. — М.: И. Л. 1951.
12. Нейгебауер О. Точные науки в древности. — М.: Наука, 1968.
13. Очерки по истории математики. Сборник под редакцией Б. В. Гнеденко. — Изд-во Московского университета, 1997. — 423 с.
14. Раик А. Е. Очерки по истории математики в древности. — Саранск: Мордовское книжное издательство, 1977. — 370 с.

15. Рыбников К. А. История математики. — Изд-во Московского университета, 1994. — 496 с.
16. Рязанкин В. Н., Евстигнеев Г. П., Тресвятский Н. Н. Вычислительные клавишные машины. — М.: Машгиз, 1957. — 251 с.
17. Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики. — М.: Наука, издания 1978 — 336 с. и 1990 — 253 с.
18. Хрестоматия по истории математики / Под ред. А. П. Юшкевича, в 2-х кн. — М.: Просвещение, 1976 и 1977.
19. Юшкевич А. П. История математики в России. — М.: Наука, 1968. — 591 с.

Издания классиков науки

20. Архимед. Сочинения. — Физматгиз, 1962. — 639 с.
21. Гильберт Д. Основания геометрии. — М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
22. Гюйгенс Х. Три мемуара по механике. — М.: Изд-во АН СССР, 1951.
23. Декарт Р. Геометрия. — М.; Л.: ОНТИ, 1938.
24. Евклид. Начала. В трех томах. — ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948.
25. Ковалевская С. В. Научные работы. — М.: Изд-во АН СССР, 1948.
26. Крылов А. Н. Избранные труды. — М.: Изд-во АН СССР, 1958. — 803 с.
27. Крылов А. Н. Собрание трудов, в 12 т. — М.: Изд-во АН СССР, 1951—1955.
28. Лагранж Ж. Аналитическая механика. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. — 594 с.
29. Лобачевский Н. И. Полное собрание сочинений в 5 томах. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1946—1951.
30. Лузин Н. Н. Интеграл и тригонометрический ряд. — М.: Изд-во АН СССР, 1951.
31. Ляпунов А. М. Собрание сочинений в 6 томах. — М.: Изд-во АН СССР, 1954—1965.
32. Ньютон И. Математические начала натуральной философии. Перевод А. Н. Крылова с издания 1686 г. — М.: Наука, 1989. — 687 с.
33. Пуанкаре А. Избранные труды в 3 томах. — М.: Изд-во АН СССР, 1971—74.
34. Пуанкаре А. О науке. — М.: Наука, 1990. — 736 с.

35. Риман Б. Сочинения. — М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
36. Чебышёв П. Л. Избранные математические труды. — ОГИЗ, ГИТТЛ, 1946. — 200 с.
37. Чебышёв П. Л. Собрание сочинений в 5 томах. — М.: Изд-во АН СССР, 1945—51.
38. Чебышёв П. Л. Теория вероятностей. Лекции, читанные в 1879—1880. По записи А. М. Ляпунова. — М.: Изд-во АН СССР, 1936. — 253 с.
39. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных, в 2-х т. — М.: Физматгиз, 1961.
40. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление. — ОГИЗ, ГИТТЛ, 1949.
41. Эйлер Л. Интегральное исчисление, в 3-х т. — М.: Гостехиздат, 1951.
42. Якоби К. Лекции по динамике. — М.; Л.: ОНТИ, 1936.

Биографии

43. Абель Н., 1802—1829, биография, написанная О. Оре. — М., 1961.
44. Архимед, 287—212 до нашей эры, биография. В. Ф. Каган. — М.: ГИТТЛ, 1951.
45. Беббидж Ч., 1792—1871, биография. Р. С. Гутер, Ю. Л. Полупанов. — М., 1973.
46. Вейль Г., 1885—1955, биография. И. М. Яглом. — М., 1967.
47. Галуа Э., 1811—1832, биография. А. Дальма. — 1984.
48. Гаусс К. 1777—1855, биографическое исследование. В. Бюлер. — М.: Наука, 1989.
49. Гильберт Д., 1862—1943, биография. К. Рид. — М., 1977.
50. Кардано Д., 1501—1576, биография. Р. С. Гутер, Ю. Л. Полунов. — М., 1980.
51. Ковалевская С. В., 1850—1891, биография. Кочина П. Я. — М., 1981.
52. Крылов А. Н., 1863—1945, очерк жизни и деятельности. С. Я. Штрайх. — М., 1956.
53. Лагранж Ж., 1736—1813, биография. И. А. Тюлина. — М., 1977.

54. Лаплас П., 1749—1827, биография. Б. А. Воронцов-Вельяминов, 2-е изд. — М., 1985.
55. Лебег А., 1875—1941, биография. И. М. Тумаков. — М., 1975.
56. Лейбниц Г., 1646—1716, биография. И. Б. Погребысский. — М., 1971.
57. Лобачевский Н. И., 1792—1856, биография. В. Ф. Каган. — М.; Л., 1948.
58. Ляпунов А. М., 1857—1918, биография. А. М. Шибанов. — 1985.
59. Марков А. А., 1856—1922, биография. С. Я. Гродзенский. — М., 1987.
60. Ньютон И., 1643—1727, биография. С. И. Вавилов. — М., 1961.
61. Остроградский М. В., 1801—1861, биография. Б. В.Гнеденко, И. Б. Погребысский. — М., 1963.
62. Паскаль Б., 1623—1662, биография. Е. М. Кляус, И. Б. Погребысский, У. И. Франкфурт. — М., 1971.
63. Понтрягин Л. С., 1908—1988. Краткое жизнеописание Л. С. Понтрягина, составленное им самим // Успехи математических наук, 1978, т. 33.
64. Пуанкаре А., 1854—1912, биография. Тяпкин А. А., Шибанов А. С. — М., 1979.
65. Чебышев П. Л., 1821—1894, биография. В. Е. Прудников. — Л., 1976.
66. Эйлер Л., 1707—1783, биография. Р. Тиле. — 1983.
67. Эйлер Л., доклад о жизни и работах Эйлера, прочитанный А. Н. Крыловым в 1933 г. (в первом томе его трудов). — М.: Изд-во АН СССР, 1951.
68. Эрмит Ш., 1822—1901, биография. Е. П. Ожигова. — Л., 1982. — 288 с.

Именной указатель

А

Абель Нильс 79, 120, 123, 124, 429
Адамар Жак 365, 366, 368, 406
Адамс Джон 155, 156
Айзерман М. А. 319
Александр I 62
Александр Македонский 25
Александров А. Г. 359
Александров П. С. 105
Андронов А. А. 374, 398
Антифон 15
Аполлоний 25, 27, 38
Аристотель 12, 13, 127
Арнольд Владимир Игоревич 127, 404, 405
Архимед 25, 27, 29, 38, 428, 429
Архит из Тарента 15, 20

Б

Базилевский Ю. Я. 186
Банах С. 85, 402
Барбашин Е. А. 315
Барроу 42, 43
Белл А. 202
Беллман Ричард 290, 297
Бельтрами 69, 89
Берг А. И. 208
Беркли Джордж 133, 422
Бернулли братья 50
Бернулли Даниил 51, 56
Бернулли Иоганн 42, 75, 254, 255
Бернулли Яков 42, 54, 255
Бессонов Николай Иванович 177
Биркгоф Г. 144
Биссакер Роберт 34, 153
Блехман И. И. 144, 426
Бобынин Виктор Викторович 106, 107
Больцано Бернард 78, 422
Больцман Л. 231, 232, 233, 236
Бонгард М. М. 212, 214, 219
Бонч-Бруевич М. А. 208
Бояи Фаркаш 59, 60, 66
Бояи Янош 64, 67, 68, 70, 402
Брауэр 140, 424
Бригс Генри 34
Бриллюэн Л. 249
Брук И. С. 186
Бугаев Николай Васильевич 108
Буняковский Виктор Яковлевич 93
Бурбаки Н. 407, 424, 427
Буйковский А. Г. 297
Бэббидж Чарльз 169, 171, 173, 174
Бэкон Ф. 38, 415
Бэр Р. 406
Бюрги Иост 34, 153

В

Валлентайн 285, 290
Валлис Джон 59
Васильев Ф. П. 400
Вейерштрасс Карл 79, 81, 277, 97, 422
Вейль Г. 140
Вентцель Е. С. 215, 248
Веремей Е. И. 359
Вивиани 36
Виет Ф. 106, 422
Винер Норберт 219, 223, 322, 325, 328
Витт А. Л. 374
Волгин Л. Н. 360

Волькенштейн М. В. 242
Воронов Авенир Аркадьевич 317
Вороной Г. Ф. 96
Воротников В. И. 375, 398
Выгодский М. Я. 107, 152
Вышнеградский Иван Алексеевич 303, 304, 305, 309, 361

Г

Гайдук А. Р. 398
Галилей 36, 39, 81, 415
Гаусс Карл Фридрих 65, 66, 67, 68, 69, 89
Гегель 22, 77, 85
Гедель Курт 90, 91, 424, 425
Гельфанд И. М. 410
Гернет Н. Н. 282, 283, 284, 285, 287, 288, 289, 290, 291, 298
Герон 27, 152
Гессе 265
Гессель 112
Гильберт Давид 84, 88, 89, 90, 130, 143, 278, 283, 423, 424, 425, 428, 429
Гиппий из Элиды 20
Гиппократ Хиосский 15, 20
Глушков Виктор Михайлович 187, 244, 247
Гнеденко Б. В. 105, 106, 427
Гольдшмидт 281, 282
Граве Дмитрий Александрович 95, 96
Губин В. Б. 250
Гурвиц Адольф 303, 306, 381
Гурман В. И. 298
Гутенберг И. 199
Гюйгенс Христиан 35, 36, 37, 428
Гюнтер Н. М. 285, 289, 298

Д

Давыдов Борис Львович 286
Даламбер Жан 51, 52, 133
Дедекинд Рихард 83
Декарт Р. 38, 39, 42, 107, 402, 415, 428
Деламейн Ричард 34, 153
Демидов С. С. 107
Демьянов В. Ф. 298
Дидона 273, 274
Диокл 27
Диофант 28, 42, 115, 421
Дирак 409
Дирихле 42
Доллежаль Николай Антонович 401
Дрейфус Ф. 243
Дьюи 199
Дюбуа-Реймон 278

Е

Евдокс Книдский 15, 17, 20, 27
Евклид 20, 21, 22, 23, 24, 25, 27, 28, 38, 40, 58, 59, 71, 87, 90, 421, 422, 428
Егоров Дмитрий Федорович 104

Ж

Жаккар 203
Железнов Н. А. 228
Жуковский Николай Егорович 103, 104

З

Зейдель 80, 124
Зеймс 341
Зельдович Я. Б. 410
Зенон Элейский 15, 408, 421
Золотарев Е. И. 96
Зубов Владимир Иванович 298, 315, 320, 359, 360, 375, 398

И

Иоганн из Гмундсена 31
Иоганн Мюллер (Региомонтан) 34
Иоффе А. Ф. 98
Ипатия 28
Исаак Барроу 43

К

Кавальери Б. 42, 132
Калман Р. 292, 293, 295, 296, 352, 360
Кант Иммануил 122, 129, 420, 424
Кантор Георг 81, 82, 83, 84, 91, 423, 424
Кантор М. 106
Канторович Леонид Витальевич 188, 189, 190, 192, 193
Кардано 33, 106, 429
Карно 107
Карцев М. А. 186
Кейль 49, 50
Кеплер И. 132, 14, 39, 42
Килби Джек 195
Китайгородский А. И. 228
Клаузис Р. 222
Клебш Рудольф 266
Клейн Феликс 69, 89, 144, 402, 421, 422
Клеро Алексис Клод 51
Кнезер А. 277
Ковалевская Софья Васильевна 97, 312, 428, 429
Колмановский В. Б. 300
Колмогоров Андрей Николаевич 105, 322, 325, 328, 427
Коперник Николай 34
Коркин Александр Николаевич 96, 99
Корчанов В. М. 359
Котельников Владимир Александрович 208, 407, 408
Коши Огюстен 79, 94, 95, 110, 114, 119, 120, 123, 124, 125, 126, 133, 134, 136
Коэн 91, 140
Кронекер Л. 83
Кротов Вадим Федорович 278, 281, 298
Крутько П. Д. 360
Крылов Алексей Николаевич 22, 24, 39, 56, 99, 100, 101, 120, 156, 202, 321, 322, 404, 428, 429
Кулебакин Виктор Сергеевич 317, 318
Куммер Эрнест 42, 116
Кун Т. 131, 418, 423

Л

Лаврентьев М. А. 105
Лагранж Жозеф Луи 51, 107, 259, 260, 263, 275, 281, 282, 429
Лакатос И. 114, 414, 423, 424
Ламберт Иоганн 59
Ламе 116
Лаплас Пьер Симон 51, 52, 422, 429
Ларин В. Б. 360, 374
Лебег А. 406
Лебедев Сергей Алексеевич 186
Леверье Урбен 155
Леди Лавлейс 172, 173, 183
Лежандр Адриан 51, 59, 67, 258, 263
Лейбниц Готфрид Вильгельм 42, 47, 48, 49, 50, 107, 133, 163, 164, 255, 422, 424, 429
Леонардо Пизанский 32
Лётов Александр Михайлович 346, 352, 361
Литтлвуд Дж. 119, 138
Лиувилль 94, 116
Лобачевский Николай Иванович 60, 61, 62, 64, 65, 67, 70, 87, 89, 129, 156, 403, 428, 430
Лопиталь Гийом Франсуа 42, 50, 128, 255, 403
Лошмидт И. 229, 233
Лузин Николай Николаевич 104, 105, 318, 406, 420, 428
Луиджи Феррари 33
Лука Пачоли 33
Лурье А. И. 315, 361
Людвиг Больцман 225
Люилье 111, 112, 120
Люстерник Л. А. 105
Ляпунов Александр Михайлович 95, 96, 97, 311, 312, 313, 314, 315, 428, 430

М

Максвелл Дж. К. 222, 302, 303, 361
Малкин И. Г. 315
Марков Андрей Андреевич 87, 96, 430
Матвеев Н. М. 127
Мёбиус 114
Менелай 27
Меньшов Д. Е. 105
Михайлов А. В. 316
Моисеев Н. Д. 315
Монж 107
Мопертюи Пьер 266, 267, 268
Морзе С. 202
Мышкис А. Д. 144

Н

Надеждин Петр Владимирович 331, 374, 398
Найквист 316
Науменко К. И. 360, 374
Нейман Джон фон 181
Непер Джон 34, 153
Николо Тарталья 33
Никомед 27
Ньютон Исаак 39, 42, 43, 46, 47, 49, 50, 107, 156, 254, 422, 428, 430

О

Однер Вильгодт Теофил 165
Октавиан Август 25
Орем Н. 31
Остроградский Михаил Васильевич 63, 93, 430
Отред Уильям 34, 153

П

Пановко Я. Г. 144
Пападуло-Керамевс 27
Папалекси Н. Д. 208
Папп Александрийский 28, 38
Паскаль Блез 42, 162, 164, 402, 430
Паш 88, 424
Пеано 88
Первозванский А. А. 361
Петр I 48
Петров Борис Николаевич 318
Петров Ю. П. 107, 190, 296, 333
Петросян Леон Аганесович 359
Пиацци 65
Пифагор 12, 13, 131
Платон 19, 20, 28, 73, 421
Плутарх 26
Пойа (Полиа) Дьердь 124
Подчукаев В. А. 399
Понселе 107
Понтрягин Лев Семенович 286, 287, 289, 430
По́пов В. М. 320
Поппер К. 123, 124, 414, 419, 422, 423
Поснов Николай Николаевич 177, 190
Поссе К. А. 96
Пригожин Илья Романович 229, 234, 236, 237, 241, 242
Прокл 28, 59
Птолемей I 25
Пуанкаре Анри 84, 85, 229, 231, 232, 420, 424, 426, 428, 430

Р

Рамеев Б. И. 186
Рассел Б. 84
Раут 302
Рибет Кеннет 118
Риккати 51
Риман Бернгард 69, 70, 72, 429
Робинсон А. 134, 422
Рождественский Д. С. 98
Розенвассер Е. Н. 361, 399
Рыбников К. А. 64, 107, 428

С

Сабит ибн Корра 59
Садомцев Ю. В. 362
Саккери Джироламо 59, 60
Сергеев В. О. 399
Сизиков Валерий Сергеевич 391, 399
Смирнов Владимир Иванович 98
Смолуховский Мариан 229, 233
Соболев С. Л. 410
Спиноза Б. 38, 131
Стеклов Владимир Андреевич 96, 313, 392, 399
Стенгерс Изабелла 229
Степанов В. В 126
Степин В. С. 419
Стодола Аурель 306, 332, 379, 402
Стокс 80
Сунцев В. Н. 360, 374
Суслин М. Я. 105
Сципион дель Ферро 33

Т

Талдыкин А. Т. 107
Тамаркин Я. Д. 98
Танияма Ю. 118
Тарский А. 85, 86, 87, 140, 424
Тарталья Николо 39, 106
Теэтет 15, 20
Тимофеев Л. И. 217
Тихонов Андрей Николаевич 369, 372, 399
Томсон У. 222
Торричелли 36, 42
Тьюринг Алан Матисон 183

У

Уайлс Эндрю 118, 128
Уатт Джемс 154, 301
Уингейт 34
Урысон П. С. 105

Ф

Фаваро А. 106
Фалес Милетский 10, 11, 18, 28, 408
Фейерабенд П. 419
Фельдбаум Александр Аронович 287, 292, 293
Феодор из Кирены 15, 20
Ферма Пьер 42, 115, 118, 128, 266, 402
Феррари 33
Фибоначчи 32, 422
Фихтенгольц Г. М. 137, 140
Флеминг Амброзиус 180
Фомин В. Н. 362
Форест Ли 180
Фрадков А. Л. 362
Франк-Каменецкий Д. А. 228
Фрей Герхард 118
Фурье Ж. Б. 264

Х

Хайкин С. Э. 374
Хайям Омар 59
Харди 119, 422
Харитонов В. Л. 381, 399
Харкевич А. А. 208, 212
Хартли 209, 211
Хинчин А. Я. 105
Холлерит Герман 202, 203, 204

Ц

Цермело Эрнст 85, 231, 232, 233, 229, 407
Цузе Конрад 177

Ч

Чаплыгин Сергей Алексеевич 104
Чебышёв Пафнутий Львович 93, 94, 95, 96, 97, 120, 164, 311, 312, 403, 429, 430
Чезаро Эрнесто 136

Червяков В. В. 399
Черноусько Ф. Л. 300
Чертков Константин Геннадьевич 391, 399
Чехов А. 149
Чжу Шицзе 11

Ш

Шанин Николай Александрович 87
Шварц Лоран 410
Шеннон Клод 209, 211, 214, 228
Шиккард Вильгельм 163
Шмидт О. Ю. 107
Шнирельман Л. Г. 105
Шокли Уильям 184
Шрейдер Ю. А. 214
Штейнер Я. 111
Штибиц Джордж 176
Щипанов Георгий Владимирович 317, 318, 363

Э

Эверард Томас 153
Эдисон 180, 202
Эйлер Леонард 42, 51, 52, 54, 55, 56, 57, 107, 109, 111, 114, 115, 116, 125, 164, 255, 258, 273, 281, 282, 310, 390, 402, 429, 430,
Эйнштейн 72, 420
Энгельс Ф. 40
Эратосфен 27
Эренфест Павел Сигизмундович 98
Эри 155, 156
Эрмит 94

Ю

Юсупов Р. М. 399
Юшкевич А. П. 107, 427, 428

Я

Яглом И. М. 131, 410
Ягола А. Г. 400
Якоби Карл 264, 265, 403, 429
Якубович В. А. 362, 363
Яновская С. А. 107
Янушевский Р. Т. 363

Предметный указатель

А

Абак 146
Абстракция:
  актуальной бесконечности 77, 87, 138, 139
  потенциальной бесконечности 77, 138
  потенциальной осуществимости 138
Аварии 394
Академия наук 51
Аксиома 20, 130
  Гильберта 88, 130
  Евклида 20, 129
  Цермело 85, 86, 105
Алгоритм "последовательного удвоения" 146
Античный мир 29
Апория — "Ахиллес и черепаха" 15
Арабская нумерация 32
Арабские цифры 32
Арифмометр "Феликс" 166

Б

Бесконечно малые величины 50—53
Бесконечность 16, 17, 25, 27, 41, 55, 140
Бесконечные множества 81

В

Вавилонская математика 7
Валик Лейбница 163, 190
Вариационные задачи 256
Взвешенная энтропия 241, 272
Вторая вариация 261, 262, 263
Второе начало термодинамики 236
Вырожденные функционалы 290, 291, 352
Вычислительные полнотекстовые машины 204

Г

Гипотеза:
  Айзермана 319, 320
  континуума 83, 90, 91, 140
  Суслина 105
  Таниямы 118
Графическое интегрирование 49
Грубые системы 374
Гурвицев полином 307, 326

Д

Демон Максвелла 222
Десятичные логарифмы 34
Диаграмма Вышнеградского 308, 310
Динамическое программирование 290
Диодный импульсатор 189
Дифференциал 48, 133, 134
Дифференциалы высших порядков 133
Дифференциальная игра 345
Дифференциальные уравнения 57, 178, 375, 380, 391—393
Доказательство в математике 8, 9, 10, 11, 12, 22, 68, 110, 119, 125, 127, 128

З

Задача:
  Дидоны 273
  игровая 344

  - о брахистотроне 254

Закон исключительного третьего 141

И

Изменения корректности 389
Изолированные системы 236
Изопериметрическая задача 273, 277
Инвариантность 318, 319
Интеграл 49
Интегральные уравнения 391
Интегрирующий прибор 49
Интуиционизм 140—143
Информация 147, 199, 201, 206, 208—229
История науки 106, 107, 242
Исчисление бесконечно малых 44, 46, 47

К

Катастрофы 394
Квадратные уравнения 11
Квадратура круга 14
Колесо Однера 165
Количество информации 209
Конструктивизм 87, 142
Контрпример 124, 239, 270, 320
Корректность 351
Корреляционная функция 323, 327, 329, 357
Косинус-преобразование Фурье 323
Критерий В. Ф. Кротова 271
Критерий Ю. П. Петрова 333, 370, 371
Критерий В. М. Попова 320

Л

Логарифмическая линейка 34, 152—155
Логарифмы 34, 155

М

Максимум 42
Малая вычислительная машина "Урал" 186
Математическая модель 100
"Математические начала натуральной философии" 46
Математический сборник 103, 108
Математическое доказательство (см. Доказательство в математике)
Материк истины 90
Матричные условия Калмана 294
Машина:
  - IBM-603, 183
  - "Вильнюс" 192
  - "Вятка" 192
  - "Киев" 187
  - "Нева-1" 191
  - "Сетунь" 187
  - "Стрела" 186
  - БЭСМ-1, 186
  - М-20, 186
  - Тьюринга 183
  - ЭНИАК 181, 182

Метод вариаций 259, 261
Минимум 42
Мир бесконечного 138
Московский университет 102
Московское математическое общество 103, 108
Мощности бесконечных множеств 82
Мощность континуума 82
Мусейон 25
Мысленный эксперимент 110, 125, 137, 234, 235
  - Максвелла 223

Н

Наблюдатели Люенбергера 352

Научный журнал 49
"Начала" Евклида 22, 23
Некорректные задачи 368
Необратимость 230
Неравенство Буняковского 93

О

Обобщенная:
  сумма 136, 137
  теорема Эйлера 284
Обыкновенные дифференциальные уравнения 102
Одиннадцатая аксиома Евклида 58, 64
Оператор 325
Острова истинности 90, 143
Открытые системы 236
Ошибки округления 387

П

Пакеты MATLAB, Mathcad 393
Парадигма 131—137
Парадокс 41
  Б. Рассела 84
  Лошмидта 233
Параметрическая устойчивость 376, 377, 379
Парижская Академия 51
Первая вариация 261, 335
  интеграла 268
Перфокарта 202, 242
Перфоратор 203
Плоскостной транзистор 184
Погрешность округления 154, 387
Полезная информация 212, 213, 214
Полиномы Чебышёва 94
Понятие "информация" 216
Постановка преподавания 101
Постулаты 20
  Лобачевского 129
  Евклида 21
Потеря корректности 389
Почленное интегрирование 45
Правило множителей Лагранжа 275, 276, 277
Преобразования эквивалентные в расширенном смысле 390
Преподавание прикладной математики 101, 102
Принцип:
  выбора наилучшей проекции 95
  максимума 287
  минимума производства энтропии 236
  наименьшего действия 266
  Пригожина 237, 239, 240, 241, 271
  стационарного действия 268
Природа математических утверждений 114
Проблема:
  вычисления собственных значений 388
  необратимости 230
  собственных значений 388
  Суслина 105
  устойчивости 313
Пространство Урысона 105
Профили Жуковского 104
Пятый постулат 21, 58, 60, 129

Р

Разложение в ряд 45, 52
Расходящиеся ряды 135, 136, 137
Регуляризация некорректных задач 372
Регулятор Уатта 301
Регуляторы:
  астатические 303
  непрямого действия 306
  оптимальные 327—329, 334, 338, 339, 354

Реле 174, 176, 177
Релейные схемы 174
Релейный триггер 181
Решение кубических уравнений 33
Решение уравнений 3-й и 4-й степеней 34
Ряд:
    Ламберта 157
    Лейбница 157
    Фибоначчи 32
Ряды Дирихле 157
Ряды расходящиеся 135

С

Серия вычислительных машин "Минск" 187
Система "не управляемая по Калману" 296
Случайный процесс 324, 370
Смена парадигм 131—137
Смысловая информация 214, 215
Стрела времени 229, 236
Суаньпан 148
Сумма бесконечного ряда 139
Существо математического доказательства 109
Счетно-аналитические машины 204

Т

Табулятор 203
Тезаурус 214, 215
    чувств 218
    эстетических впечатлений 218
Тезисы Вышнеградского 305, 308
Теорема:
    Гернет 284
    Ньютона—Лейбница 49
    о возвращении Пуанкаре 231, 232
    о непрерывной зависимости решений систем дифференциальных уравнений от параметров 126, 391, 392, 411
    об *n* интервалах 287
    Пифагора 61
    Пригожина 237
    Суслина 105
Теория инвариантности 318
Трактат Евклида "Начала" 20
Триггер 176, 185
Трисекция угла 14

У

Удвоение куба 14
Управление "по возмущению" 317
Управляемость по Калману 295, 296
Уравнения 57
    Вольтерры 391
    высших степеней 11
    Лагранжа 269
    Фредгольма 391
    Эйлера 257, 259, 260, 265, 267
    Эйлера—Пуассона 257, 346, 352
    Якоби 265
Условия:
    Гурвица 307
    скачка 288
    Якоби 265, 268
Усовершенствование маятниковых часов 35
Устойчивое подсемейство 329
    экстремалей 352, 353, 358
Устойчивость 302
    по части переменных 375, 376

Ф

Факультеты прикладной математики 102
Фильтры Калмана 352
Флюенты 44
Флюксии 44

Флюктуации 235, 236
Формализм 143
Формулы:
  Кардано 33
  Хартли 210, 211
  Шеннона 210, 211, 216
Функции Ляпунова 315, 380, 382
Функционал 325, 335

Х

Характеристический полином 294, 328, 332, 370, 378, 379, 381

Ц

Целевая информация 219
Циклоида 35, 37

Ч

Частотные методы 316, 317
Черчение географических карт 95
Численные вычисления 101
Число Лошмидта 230

Ш

Школьные программы 24

Э

Эвольвента 36, 37
Эвольвентное зацепление 164
Эволюта 36, 37
Эйлеровские регуляторы 353, 354, 357, 358
Эквивалентные (равносильные) преобразования 159, 160, 351, 365, 388
Электронный триггер 180
Энтропия 221, 222, 223, 225, 226, 228, 230, 231
  распределения вероятностей 228